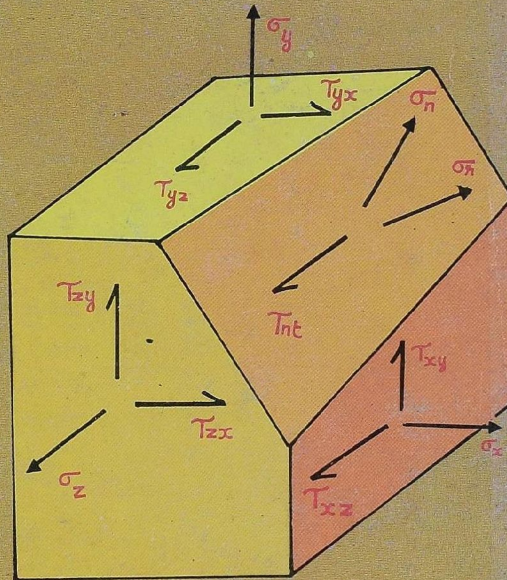
SUBSIDISED
LOW COST **L C S E** EDITIONS
NBT, INDIA

திண்ம விசையியல்

அ. இளங்கோவன்





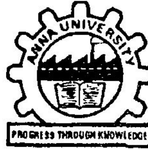
அண்ணா பல்கலைக் கழகம்
சென்னை - 600 025

திண்ம விசையியல்

பொறியியல் பாடநூல்-1

திண்ம விசையியல்

அ. இளங்கோவன்.
பேராசிரியர், கட்டடப் பொறியியல்,
அண்ணா பல்கலைக்கழகம்,
சென்னை - 600 025.



அண்ணா பல்கலைக்கழகம்,
சென்னை - 600 025.

முதற் பதிப்பு

திருவள்ளுவராண்டு 2026, ஐப்பசிமாதம் — நவம்பர், 1995

பதிப்புவகை: மாணவர் சலுகைப் பதிப்பு

விலை ரூ. 126.00

SUBSIDISED
LOW COST
L C S E
EDITIONS
NBT INDIA

This book has been subsidised by the Government of India through the National Book Trust, India for the benefit of students.

தேசிய புத்தக நிறுவன நிதிச் சலுகை பெற்ற வெளியீடு

விற்பனை உரிமை: பதிவாளர், அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை - 600 025.

பணி ஒருங்கிணைப்பு:
வளர்தமிழ் மன்றம், அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை-600 025.

அச்சிட்டோர் :

பாவை பிரிண்டர்ஸ் (பி) லிட்., எண்: 142, ஜானி ஜான்கான் சாலை,
சென்னை - 600 014.

தொலைபேசி: 832441

அணிந்துரை

பொறியியல் கல்வியைத் தமிழில் பெறுதற்கான வாய்ப்புகளை உரு வாக்கி நமது தமிழகப் பொறியாளர்கள் அறிவு நுட்பத்திலும் வினைத் திட்பத்திலும் மேம்பட்டவர்களாக விளங்க உதவ வேண்டுமென்பது நம் அனைவரின் நெடுநாளைய அவா. இக்குறிக்கோளை நோக்கிய பணிகளில் பல்வேறு இயக்கங்களும், ஆர்வலர்களும் நெடுங்காலமாகவே தொடர்ந்து ஈடுபட்டு வந்துள்ளனர். கட்டுரையாக்கம், கலைச்சொல்லாக்கம், கருத்துப் பரிமாற்றம் முதலாய வகைகளில் அமைந்த இப்பணிகள் ஆர்வத்தைப் பரவலாக வளர்ப்பதில் வெற்றிபெற்றுள்ளன என்பதில் ஐயமில்லை. இப்பணிகளின் பயனைச் செழுமைப்படுத்த இன்றியமையாத தேவையும் அடுத்தகட்டமுமாக அமைவது பாடநூல் வெளியீடு. 1991-ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில், தமிழக அரசு, பொறியியல் துறையில் பட்டக்கல்விக்கும் பட்டயக்கல்விக்கும் தேவையான பாட நூல்களைத் தமிழில் வெளியிடும் பொறுப்பினை அண்ணா பல்கலைக்கழகத்திற்குப் பணித்து, ரூ. 300,000 நிதி ஒதுக்கீடும் செய்தது. இத்திட்டத்தின் வாயிலாக, அண்ணா பல்கலைக் கழகத்தின் பாடநூல் வரிசையில் **திண்ம விசையியல்** (Mechanics of Solids) என்னும் இந்நூல் வெளிவருகிறது.

பொறியியல் துறைகள் அனைத்திற்கும் பொதுவாய அடிப்படைத்துறை திண்ம விசையியல்; பொறியியல் கல்வியின் தொடக்கக் கட்டத்திலேயே கற்கப்பட வேண்டிய துறையாகும். திண்ம உறுப்புகளின் மீது விசைகள் செயல் படுவதால் தோன்றும் புற, அக விளைவுகளை ஆய்ந்து, உறுப்பு களின் வலிமைப் பண்புகளை நிறுவுதல் இத்துறையின் கருப்பொருளாக அமைவதால் பொறியியல் வடிவமைப்புகளின் (Engineering Design) அடித்தளமாக இத்துறை விளங்கி வருகிறது. பொறியியல் கல்விப்பணியில் முப்பது ஆண்டுகளுக்கு மேலாக ஈடுபட்டு வந்துள்ள பேராசிரியர் அ. இளங்கோவன் அவர்கள் எழுதியுள்ள இந்நூல் வெளிவருகின்ற கட்டத் தில், பொறியியல் கல்லூரிகளில் சில பாடங்களையாவது தமிழில் கற் பிக்கத் தொடங்கவேண்டுமென்ற முயற்சி நடைமுறைபெற முனைப்பான செயல்பாடுகள் மேற்கொள்ளப்பட்டு வருதல் பொருத்தமான சூழலை நினைவூட்டுகிறது.

பொறியியல் பட்டக்கல்வியின் தொடக்கநிலைப் பாடத்திட்டத்தின் தேவையை முன்னிட்டு எழுதப்பட்டுள்ள இந்நூல் எளிய, சிறு வாக்கியங் களால் நல்ல முறையில் எழுதப்பட்டுள்ளது. அடிப்படைக் கருத்துக்களைத் தெளிவாக விளக்கப் பெருமுயற்சி மேற்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. நறுக்கு விசை, வளைதிருப்புமை போன்ற கருத்துக்களும் அவற்றின்கணக்கீடுகளும் தெளிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளன. தகைவு நிலை ஆய்வுகள், ஆற்றல்

கோட்பாடுகள் ஆகிய அத்தியாயங்கள் மிகவிரிவாகவும் தெளிவாகவும் விளக்கப்பட்டுள்ளன. பொருத்தமான கலைச்சொற்கள் உருவாக்கப் பட்டுள்ளன. உலகப் பொதுவான குறியீடுகளாலேயே சமன்பாடுகளும் சூத்திரங்களும் தரப்பட்டுள்ளதால் இந்நூலின் உரைக்கோவை ஆங்கில நூல்களையும் கட்டுரைகளையும் படிப்பதற்குதவும் பாலமாகவும் பயன் படவல்லது.

அண்ணா பல்கலைக்கழகத்தின் பொறியியல் பாடநூல் வரிசையின் முதல் வெளியீடாய இந்நூல் பொறியாளர்கள், பொறியியல் ஆசிரியர்கள் மாணவர்களிடையே பெரும் வரவேற்பைப்பெறும் என நம்புகிறேன். தொடர்ந்து பல சிறந்த பாடநூல்களையும் அண்ணா பல்கலைக்கழகம் விரைவில் தமிழில் வெளியிடவிருக்கிறது என்பதைத் தெரிவித்து இப் பணிக்குத் தமிழ்கூறு நல்லுலகத்தின் முழு ஆதரவையும் வேண்டுகிறேன். தாய்மொழிக் கல்வியே நாட்டின் வளமான எதிர் காலத்திற்கு ஏற்ற அடித் தளம் என்பதனை உணர்ந்த அறிவியல் பொறியியல் துறை அறிஞர்களும் இப்பணியில் ஈடுபட்டால் அண்ணா பல்கலைக்கழகம் வரவேற்று ஒத் துழைப்பு நல்குமெனத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

மு. ஆநந்தகிருட்டிணன்

சென்னை-600 025.
10.10.1995.

முனைவர் **மு. ஆநந்தகிருட்டிணன்**
துணைவேந்தர்
அண்ணா பல்கலைக்கழகம்.

பதிப்புரை

''பிறநாட்டு நல்லறிஞர் சாத்திரங்கள்
தமிழ் மொழியிற் பெயர்த்தல் வேண்டும்
இறவாத புகழுடைய புதுநூல்கள்
தமிழ்மொழியில் இயற்றல் வேண்டும்''

— *என்பது மாக்கவி **பாரதியின்** கருத்து*

அதற்கிணங்க அறிவியல் துறை நூல்கள் பலவற்றையும் தமிழில் ஆக்கித் தருதல் அறிவியலறிஞர்களின் பொறுப்பாகும். அந்த வகையில் திண்ம விசையியல் என்னும் இந்நூல் அண்ணா பல்கலைக்கழகத்தின் செம்பதிப் பாக வெளிவருகிறது.

பொறியியல் பட்டக் கல்வியையும் பட்டயக் கல்வியையும் தமிழில் பயிற்றுவிக்க வேண்டும் என்பது அரசின் குறிக்கோளாகும். அக்குறிக் கோளைத் தடையின்றி எய்த அனைத்துப் பாடநூல்களும் தமிழில் வெளி யிடப்படுதல் இன்றியமையாத தேவையாகும். இதற்கெனத் தனியே நிதி யொதுக்கீடு அளித்து அனைத்துப் பல்கலைக்கழகங்களும் தத்தம் வரை யறைக்குட்பட்ட பாடங்களுக்குத் தமிழில் பாடநூல் வெளியிடவேண்டும் எனத் தமிழக அரசு ஆணையிட்டது. அவ்வாணையில் அண்ணா பல்கலைக் கழகம் பொறியியல் பாடநூல்களை வெளியிட வேண்டுமெனப் பணித்தது. அம் முயற்சியில் அண்ணா பல்கலைக்கழகத்தின் வளர்தமிழ் மன்றப் பிரிவு ஈடுபட்டது. தகுதிசான்ற நூல்களை வெளியிட வேண்டுமென்பதற்காகத் தக்காரைத் தேர்வு செய்வதற்கென வல்லுநர்குழு அமைக்கப்பட்டது. அவ் வல்லுநர் குழுவின் தேர்ந்த பரிந்துரையின்படி 'திண்ம விசையியல்' எனும் நூலை எழுதுமாறு அண்ணா பல்கலைக்கழகக் கட்டமைப்புப் பொறியியல் துறைப் பேராசிரியர் முனைவர் அ. இளங்கோவன் அவர்கள் பணிக்கப் பட்டார்கள். பட்டக் கல்விக்கான இப்பாடநூலை அண்ணா பல்கலைக் கழகம் வெளியிடுவதில் பெருமிதமடைகிறது. இந்நூலை மாணவருலகம் மட்டுமின்றிப் பொறியியலறிஞர்களும் போற்றி வரவேற்பார்கள் என்று நிச்சயிக்கின்றேன்.

இந்நூலின் எழுத்தமைப்புப் (Type-setting) பணியைச் செய்து வழங் கிய சிவாச்செல் (Shivachel) நிறுவனத்தாருக்கும், பக்க அமைப்புச் செய்து ஒளிப்படம் எடுத்து வழங்கிய அண்ணா பல்கலைக்கழக அச்சுப் பொறி யியல் துறையினருக்கும், குறிப்பாக அத்துறைத் தலைவர் முனைவர் நா. சங்கரநாராயணன் அவர்களுக்கும், அழகிய முறையில் அச்சிட்டு வழங்கிய பாவை அச்சகத்தாருக்கும் நன்றி. இப்பணியினைச் சிறந்தமுறை யில் விரைந்து முடித்திட அனைத்து வகையிலும் துணை நின்று ஆற்றுப் படுத்தியதோடு இந்நூலுக்கு அணிந்துரையும் வழங்கியுள்ள அண்ணா

பல்கலைக்கழகத் துணைவேந்தர் முனைவர் மு. ஆநந்தகிருட்டிணன் அவர் களுக்கும், இந்நூலாக்க முயற்சியில் துணைநின்ற அனைத்துப் பெருமக் களுக்கும் நன்றி. இப்பணியைச் சீரிய முறையில் நிறைவுறுத்திய அண்ணா பல்கலைக்கழக வளர் தமிழ் மன்றப் பிரிவின் தனியலுவலர்கள் திருவாளர் கள் முனைவர் மு. கண்ணன், ப. இராமலிங்கம் ஆகியோரின் கடமை யுணர்வைப் பாராட்டுகிறேன்.

இந்நூலை அச்சிடுதற்கு இந்தியத் தேசியப் புத்தக நிறுவனம் (National Book Trust, India) உருபா. 63,097/- உதவித் தொகையும், (அச்சுச் செலவு மதிப்பீட்டில் 50 விழுக்காடு), நூலாசிரியர்க்கு 20 விழுக்காடு மதிப்பூதியமும் தர வழங்காணை பிறப்பித்து, இந்நூல் மலிவு விலையில் கிடைக்கப் பெரிதும் உதவி புரிந்துள்ளமைக்கு நன்றியையும் பாராட்டுகளையும் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

அண்ணா பல்கலைக்கழகத்தின் இம்முயற்சியில் இன்னும் பல நூல் கள் வெளி வரவிருக்கின்றன. இம்முயற்சிக்கு ஊக்கந்தரும் வகையில் தமிழில் புலமை மிக்கப் பொறியியல் அறிஞர்களின் நல்லாதரவை வேண்டுகிறேன்.

சென்னை - 25
15.10.1995.

முனைவர் **கோ. இராமையன்**
பதிவாளர்
அண்ணா பல்கலைக்கழகம்

முகவுரை

பொறியியல் கல்விக்கு இன்றியமையாத அடிப்படைத் துறைகளுள் ஒன்று திண்ம விசையியல். எனவே, பொறியியல் துறை நூல்களைத் தமிழில் ஆக்க வேண்டும் என்ற எண்ணம் எழும்போது திண்ம விசை யியல் இயற்கையாகவே முதலிடம் பெறுகிறது. இந்நூலினை எழுதவும், எழுதப்பட்ட நூல் அண்ணா பல்கலைக்கழக வெளியீடாகப் பதிப்பிக்கப் படவும் கிடைத்த வாய்ப்பு மிகவும் மனநிறைவூட்டுகின்றது.

நமது நாடு விடுதலை பெற்ற பின்னர், ஒரு சில ஆண்டுகளுக்குள் நம்மனைவர்க்கும் எல்லா நிலைகளிலும் தாய்மொழி வாயிலாய்க் கல்வி கற்கும் வாய்ப்புக் கிடைக்கும் என்று ஆவலுடன் எதிர் நோக்கி யிருந்தோம். நாற்பத்தைந்தாண்டுகளுக்கு முன்னரே அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம் இயற்பியல், வேதியியல், வடிவகணிதம், கோண கணிதம், இயற்கணிதம், அளவையியல் முதலான பல்வேறு தரமான கல்லூரிப் பாடநூல்களைத் தமிழில் வெளியிட்டு, இதனைச் செய்திடும் ஆற்றலுக்கு நம்மிடையே பஞ்சமில்லை யென்று நம்பிக்கையும் ஊட்டி யது. அதேநிலையில் முயற்சிகள் தொடர்ந்திருப்பின்... என்பதைப் பற்றி இன்று ஏங்குவது பொருளற்றதாகிவிட்டது.

தாய்மொழி வழிக் கல்வியை நடைமுறைக்குக் கொண்டுவரும் முயற்சிகளில் இன்று நாம் பின்னடைந்துள்ள நிலைமைக்கு அடிப் படையான காரணங்களைப் பற்றிக் கருதல் அவசியம். ஆனால், தமிழில் தர இயலுமா? என்பது அடிப்படைச் சிக்கல் அன்று என உறுதியாகக் கூற முடியும். தமிழில் தர இயலும் என்ற நிலை உறுதியான பின்னரும் நம்மால் தாய்மொழியில் ஏன் கல்வியளிக்க இயலவில்லை? என்பதற் காக பிற காரணங்களை ஆராய்ந்து விரைவில் தீர்வு காணல் நம் மனைவரின் கடமையாகும்.

சூழ்ச்சி முடிவு துணிவெய்தல் அம்முடிவு
தாழ்ச்சியுள் தங்குதல் தீது

என்னும் குறளுரைக்கேற்ப தீர்வு கண்டதும், மேலும் தாமதமின்றி நடைமுறைச் செயலாக்கத்திலும் முனைந்திடல் நம் கடன்.

உயர்நிலையில் தாய்மொழிவழிக் கல்வியை அளிக்க நாம் தாம தித்து வரும் ஒவ்வொரு நாளும் அறிவுத்துறைகளின் வளர்ச்சியில் நமது முன்னேற்றத்திற்கும் உலக அளவிலான நிலைமைக்குமிடையே இடைவெளி மிகுத்துவரல் கண்கூடு. வளர்ந்த நாடுகளுக்கிணையாக வருங்காலத்தில் நாமும் உயர வேண்டுமெனில், உடனடியாகத் தாய் மொழிக் கல்விக்கு ஏற்பாடு செய்தலே முதற்படி என்பது உலக நாடுகள்

பலவற்றின் வளர்ச்சி வரலாறு நமக்குக் காட்டும் உண்மை. இக்குறிக் கோளை நோக்கிய முயற்சிப்படிகளில் ஒன்றாகத் **திண்ம விசையியல்** எனும் இந்நூல் உருவாகி வெளிவருதற்கு ஊக்கமும் ஆக்கமும் தந்துதவிய பலரை யும் நினைவுகூர்தல் ஆசிரியர்க்கு உவகை தரும் கடனாயமைகிறது.

தஞ்சைத் தமிழ்ப் பல்கலைக்கழகம் தோற்றுவிக்கப்பட்ட தொடக்கக் காலத்தில் தமிழ்வழிப் பொறியியல் நூல்களை வெளியிடும் திட்டம் பற்றிய கருத்தரங்கு ஒன்று தமிழ்ப் பல்கலைக் கழகத் தமிழ் வளர்ச்சித் துறையால் நடத்தப்பட்டது. கருத்தரங்கின் பயன் முடிவுகளுள் ஒன்றாகப் பல்வேறு துறைகளிலும் நூல்களை எழுதுவிக்கும் பணி தொடங்கப் பட்டபோது **பொருள் வலிமையியல்** (Strength of Materials) என்ற துறையில் நூல் எழுதும் பணி இந்நூலாசிரியருக்குக் கொடுக்கப்பட்டது. 1982-ஆம் ஆண்டில் எழுதி முடிக்கப்பட்ட நூல் அச்சுக்குத் தயாரான நிலையில் நிதி நிலை காரணமாக இருட்டிலேயே காத்திருக்க நேர்ந்தது. மீண்டும் 1991 ஆம் ஆண்டில் தமிழக அரசு நூல் வெளியீட்டுத் திட்டத்தில் ஆர்வம் காட்டிப் பல்வேறு பல்கலைக்கழகங்களுக்கும் ஊக்கமளித்தபோது, பொறி யியல் துறையில் பாடநூல்களை வெளியிடும் பொறுப்பு அண்ணா பல் கலைக்கழகத்துக்கு அளிக்கப்பட்டது. அதன் விளைவாகத் **திண்ம விசை யியல்** என்னும் தலைப்புடன் புதிய வளர்ச்சிகளுக்கேற்பத் திருத்தப்பட்டும், புதிய பகுதிகள் சில சேர்க்கப்பட்டும் இந்நூல் இப்போதைய வடிவில் உரு வெடுத்துள்ளது.

இப்பணிக்கு மிகவும் ஊக்கமும் தந்து உதவியவர்களில் முதன்மை யானவர் அண்ணா பல்கலைக்கழகத் துணைவேந்தர் முனைவர் ஆநந்த கிருட்டிணன் அவர்களும், தமிழ்ப் பல்கலைக்கழக முன்னாள் துணை வேந்தர் முனைவர் வ. அய். சுப்பிரமணியம் அவர்களும் ஆவர். இந்நூல் உருவாக்கத்தின் பல்வேறு கட்டங்களிலும் துணைநின்று உதவியோர் பலர் எனினும் குறிப்பாக நினைவு கூரத்தக்க பெருமக்கள், தஞ்சைப் பல்கலைக் கழகத் தமிழ் வளர்ச்சிப் புலத் தலைவர் முனைவர் இராம. சுந்தரம், தமிழ்ப் பல்கலைக்கழகத் துணைவேந்தர் முனைவர் அவ்வை து. நடராசன், அண்ணா பல்கலைக்கழக முன்னாள் துணைவேந்தர் முனைவர் வா. செ. குழந்தை சாமி, தமிழறிஞர், இலக்கணச்செம்மல் இராம. சுப்பிரமணியன், அண்ணா பல்கலைக்கழகப் பேராசிரியர்கள் புருசோத்தமன், கணபதி, ஆனந்த ராசன் ஆகியோரின் கருத்துரைகள் நூல் பெரிதும் வளம்பெற உதவியுள்ளன.

அன்றியும், அண்ணா பல்கலைக்கழகப் பாடத் திட்டக்குழு இந்நூலின் வடிவமைப்பு அச்சிடல் முதலிய பணிகளில் நெறிகாட்ட, அதனைத் திறம் படச் செயல்படுத்த உதவிய தகைமையாளர்கள் பேரா. சங்கரநாராயணன் (அச்சுப் பொறியியல்), பேரா. கணபதி, பொறிஞர் உலோ. செந்தமிழ்க் கோதை, மணவை முஸ்தபா, முனைவர் மு. கண்ணன் (வளர்தமிழ் மன்ற

முன்னாள் தனி, அலுவலர்), ப. இராமலிங்கம் (வளர்தமிழ் மன்றத் தனி அலுவலர்), ஆகியோருடன் உடன் பணியாற்றிய ஆசிரியர்கள் மாணவர்கள் ஆகியோர் பணியும் நன்றியோடு நினைவுகூரத்தக்கது.

குறிப்பாக ஆசிரியப் பெருமக்களில் கோபால் செயராமன், க. செகதீசன், இ. ஆறுமுகம், சாமுவேல் நைட் ஆகியோருடன், கூ. சுப்பிரமணியன், பாலசுப்பிரமணியன், கல்யாண சுந்தரம் முதலிய மாணவர்களின் கருத்துரைகளும் பல்வேறு கட்டங்களில் நூலின் செம்மைப்பாட்டுக்கு மிகவும் உதவியுள்ளன. நூல் உருவாக்கத்தின் பல்வேறு கட்டங்களிலும் தமது சொந்த நூலினுக்கு இணையான அக்கறையுடன் பொறிஞர் செந்தமிழ்க் கோதை அவர்கள் அயராது உழைத்துள்ளார் என்பதும் குறிப்பிடத்தக்கது.

நூலினை அழகுறத் தட்டச்சு செய்து உதவிய திரு. என். சதானந்தன், அச்சுக் கோப்புச் செய்த சிவாசெல் நிறுவனம், ஒளிப்பட நகல் தயாரித்த அண்ணா பல்கலைக்கழக அச்சுப் பொறியியல் நுட்ப உதவியாளர் திரு. கலைச்செல்வன், அச்சிட்டுத் தந்த பாவை அச்சகத்தார் ஆகியோருடன் வெளியீட்டாளராம் அண்ணா பல்கலைக்கழகப் பதிவாளர் அவர்களும் இந்நூலின் வெற்றியில் சிறந்த பங்காற்றியுள்ளனர்.

இந்நூல் வெளியீட்டுக்கு நிதியுதவி தந்து மலிவு விலையில் நூலினை வெளியிடப் பெருந்துணை புரிந்துள்ள தேசிய புத்தக நிறுவனமும் (National Book Trust) நமது நெஞ்சார்ந்த நன்றிக்குரித்தாகின்றது.

நமது தேவை மிகமிகப் பெரிது. அதில் மிகச் சிறியதோர் பகுதியையே இந்நூல் நிறைவு செய்ய முற்படுகிறது. மேலும் பல அறிவியல், பொறியியல், தொழில் நுட்ப நூல்கள் தமிழில் வெளிவரவும் அதன் பயனாய்த் தமிழ்வழிக் கல்வி சிறந்து நாமும் வளர்ந்துயரும் எதிர்காலத்தை நோக்கிய முயற்சிகளில் மேலும் பலர் முனைந்து ஈடுபடவேண்டுமென்ற ஆவலுடன், இந்நூல் உருவாக்கத்தில் பல்வகை யாலும் உதவிய அனைவரையும் நன்றியுடன் நினைவு கூர்கிறேன்.

அரிய என்று ஆகாத இல்லை பொச்சாவாக்
கருவியாற் போற்றிச் செயின்.

சென்னை-25 **அ. இளங்கோவன்**
15.10.1995

பொருளடக்கம்

1. இயல் அறிமுகம்

1.1 பொறியாளர் பணியில் திண்ம விசையியல்

பொறியாளர் பணியில் அன்றாடம் நாகரிக சாதனங்களின் படைப்பு அல்லது ஆளுகை இடம்பெறுதலை நாம் அறிவோம். இச்சாதனங்கள் கட்டுமானங்களாகவோ, பொறிகளா கவோ, அமைப்புகளாகவோ, இருக்கலாம். நாகரிகத்துக்குத் தேவையான இன்றியமையாத நீர்வழங்கல், இவற்றுக்கோர் எடுத்துக்காட்டாகும். இப்பணியில் தேவைப்படுவனவற்றை இனி நோக்குவோம். கிடைக்கும் இடத்திலிருந்து தேவையான இடத்தில் நீரைச் சேர்ப்பதற்குத் தேவைப்படும் இறைப்புப்பொறி, சேர்ந்த நீரைத் தேக்கிவைக்கத் தொட்டி, இரண்டனையும் இணைக்கவும், தொட்டியிலிருந்து தேவையான இடத்திற்கு நீரைப் பாய்ச்சவும், தேவையான குழாய் அமைப்புகள் முதலிய சாதனங்கள் தேவைப்படுதலை உணர்கிறோம். இவை போல அன்றாட வாழ்விற்குத் தேவைப்படும் பல்வேறு சாதனங்களைப் பற்றியும் எண்ணிப் பார்க்கும்போது, அவை அனைத்தின் படைப்பிலும் பொதுவான கூறுகள் சில இருத்தலைக் காணமுடிகிறது.

1. சாதனங்களின் வடிவம், அளவு முதலியன, எந்தநோக்கத்திற்குத் தேவைப்படுகின்றன என்பதனையொட்டி முடிவு செய்யப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாய் ஒரு மிதிவண்டிச் சக்கரத்தின் விட்டம், இருக்கையின் உயரம், இரு சக்கரங்களுக்கிடையிலுள்ள தூரம் முதலியவற்றை, மிதிவண்டியைப் பயன்படுத்துவோர் நிலையைக் கொண்டே முடிவு செய்ய வேண்டும்.

2. சாதனத்தின் செயல்பாட்டைப் பொறுத்து அதன்மீது செலுத்தப்படும் விசைகளை ஆய்வு செய்கின்றோம். இவ்விசைகள் நேரடியாய் ஏதாவது ஓர் உறுப்பின்மீது செலுத்தப்பட்டாலும் உறுப்புகளுக்கிடையிலான இணைப்புகளால் வேறு பல உறுப்புகளுக்கும் அவை செலுத்தப்படலாம். அதனால், சாதனம் பயன்படும் தன்மையையொட்டிப் பல்வேறு உறுப்புகளிலும், உறுப்புகளின் பகுதிகளிலும் செலுத்தப்படும் விசைகளின் தன்மைகள், திசைகள், அளவுகள் யாவற்றையும் ஆய்ந்தறிய வேண்டும்.

3. உறுப்புகளின் மீது விசைகள் செலுத்தப்படும்போது தோன்றும் விளைவுகளைத் தாங்கி, அமைப்புகள் உருக்குலையாமல் இருக்க வேண்டுமாயின், அவற்றை எவ்வாறு (எந்த வடிவில், எந்த அளவில், எத்தகைப் பொருள்களைக் கொண்டு) அமைக்க வேண்டும் என்பதை ஆராய்ந்து சாதனத்திற்கு இறுதி வடிவம் கொடுக்க வேண்டும்.

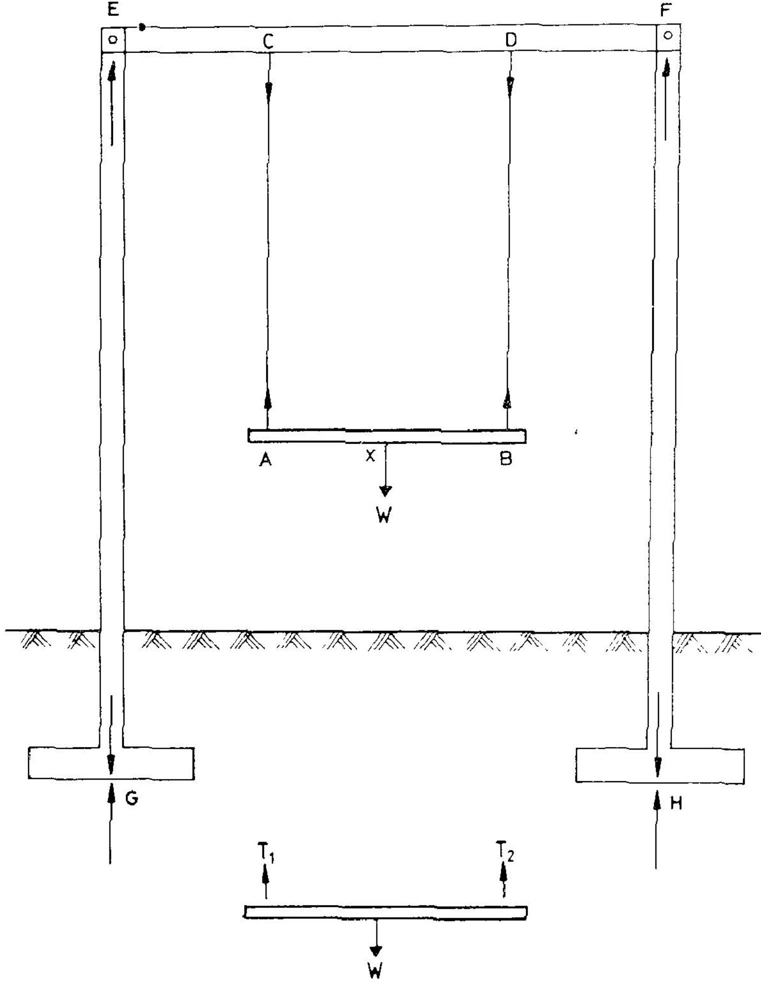
கட்டடப் பொறியாளராயினும், எந்திரப் பொறியாளராயினும், மின்சாரப் பொறி யாளராயினும் பிறதுறைப் பொறியாளராயினும் அவரது பணியில் இம்மூவகை ஆய்வுகளும்

தேவைப்படுதலைக் காணலாம். ஈண்டு ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டினைக் காணலாம். நீர்பாயும் குழாய் எவ்வளவு நீளமிருக்க வேண்டும் எவ்வளவு விட்டம் இருக்க வேண்டும் என்பன போன்ற விவரங்களைத் தேவையை ஒட்டி (அஃதாவது நீர் கிடைக்குமிடத்திற்கும், தேவைப்படுமிடத்திற்குமுள்ள தூரத்தையும், பாய வேண்டிய நீரின் அளவையும்) முடிவு செய்துகொண்டபின், குழாயின் சுவர் எப்பொருளால், எவ்வளவு தடிப்பாய் இருக்க வேண்டும் என்பதை முடிவு செய்ய வேண்டும்; இவற்றில் கவனிக்கவேண்டுவன யாவை என்பதனை இனிப் பார்ப்போம்.

பாயும் நீர் குழாயில் அழுத்தத்துடன் செல்லும். (அழுத்தமில்லையேல் நீர் பாய முடியாது.) இவ்வழுத்தத்தால் தோன்றும் விசையைத் தாங்கும் வலிமை குழாய்க்கு இருக்க வேண்டும். அவ் வலிமையில்லையேல் குழாய் வெடித்துப் போகலாம். உப்பிவிடலாம். அதனால், இத்தகைய உருக்குலைவுகள் தோன்றாதிருக்கும் வண்ணம் குழாய்ச் சுவரின் தடிப்பினை வரையறுக்க வேண்டும். குழாயினை உருவாக்கப் பயன்படும் பொருளை ஒட்டி இது மாறுபடும். ஒரேவிதமான சூழ்நிலையில் பிளாஸ்டிக் குழாய்க்குத் தேவைப்படும் தடிப்பும், உருக்குக் குழாய்க்கு தேவைப்படும் தடிப்பும் வெவ்வேறாய் இருப்பதைக் காணலாம்; பயன்படும் பொருளின் வலிமைப் பண்புகளையொட்டி இவை முடிவு செய்யப்படுகின்றன. ஒரு மில்லிமீட்டர் தடிப்பு இருக்க வேண்டிய குழாய்க்குப் பதிலாய் அரை மில்லிமீட்டர் தடிப்புக் குழாய் பயன்படுத்தப்பட்டால் குழாய் தாங்காது ; மாறாய் இரண்டு மில்லிமீட்டர் தடிப்புக் குழாய் பயன்படுத்தப்பட்டால் பொருள் வீணாகும் ; செலவும் மிகுதியாகும். அதனால் சரியான, போதுமான அளவீட்டை ஆய்ந்தறிவதே செம்மையான படைப்புப் பணியாகும். இத்தகைய ஆய்வு, குழாயின் சுவர் அளவிற்கு மட்டுமன்று; ஒரு கட்டடத்தில் சுவர், ஒரு மின்கம்பியின் அளவு, ஒரு சம்மட்டியின் கைப்பிடியின் அளவு, ஒரு கட்டிலின் கால் அளவு, ஓர் எந்திர உந்துகோலின் விட்டம், ஒருவிண்கலக் குழாயின் சுவர், இரும்புப் பாதைத் தண்டவாளத்தின் அளவு, புகைவண்டிச் சக்கரத்தின் அளவு, சக்கரத்தையும் உந்துகோலையும் இணைக்கும் நழுவு தண்டின் அளவு முதலாய எண்ணற்ற பலவிதமான வடிவமைப்புச் சூழல்கள் அனைத்தையும் எண்ணிப்பார்த்தால் ஓர் அடிப்படையான தேவையை உணரமுடியும். அஃதாவது குறிப்பிட்ட உறுப்புகளின்மீது செலுத்தப்படும் விசைகளை ஆய்தல், அவ்விசைகள் உறுப்புகளின்மீது தோற்றுவிக்கும் விளைவுகளை ஆய்தல் எனும் இரண்டும் அடிப்படைக் கட்டங்கள் என்பதனை உணரலாம். இந்த அடிப்படையான ஆய்வுகளே திண்ம விசையியலின் கருப்பொருளாகும். இதனால், திண்மவிசையியல் பொறியாளர்கட்குத் தேவையான அடிப்படை அறிவுகளுள் தலையாய ஒன்று என்பது புலனாகிறது.

1.2 இயலின் கருப்பொருள்

திண்ம விசை இயலின் பயன் யாது என்பதனைக் கண்டோம். இனி அதன் கருப்பொருள் யாதெனக் காண்போம். எந்தவொரு சாதனத்தையும் பயன்படுத்தும்போது, அதன் மீது விசைகள் செயல் படுகின்றன என்பதைக் கண்டோம். இனி, முதலில், விசைகளின் செயல்பாட்டை விளக்கமாய் அறிய, எளியதோர் எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம். குழந்தைகள் விளையாட்டுக்குரிய ஊஞ்சல் ஒன்று, படம் 1.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன் அமைப்பில் விசைகள் செயல்படுந் தன்மையை நோக்குவோம்.



படம் 1.1 ஊஞ்சல் மீது செயல்படும் விசைகள்

AB என்பது ஊஞ்சல் பலகை. இதன்மீது ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் (X) ஒருவன் அமரும்போது அவனது எடை W, கீழ் நோக்கிய விசையாய்ச் செலுத்தப்படும். இஃது ஒன்றுமட்டுமே பலகையின்மீது செயல்படும் விசையாயிருப்பின் இவ்விசை பலகையில் இயக்கத்தை தூண்டும். அஃதாவது, பலகை கீழே விழுந்துவிடும். இதனைக் தடுக்க வேண்டுமாயின், W க்கு எதிரான விசைகள் செலுத்தப்படவேண்டும். இவ்விசைகளைச் செலுத்துவன பலகையோடு கட்டியிருக்கும் CA, DB என்னும் கயிறுகளே. இக் கயிறுகள் பலகையை மேல்நோக்கி இழுக்கின்றன; பலகை, கயிறுகளைக் கீழ்நோக்கி இழுக்கின்றது. இன்னும் தெளிவாய்க் கூறுவதாயின் பலகையின்மீது கயிறுகள், மேல்நோக்கிய விசைகளைச்

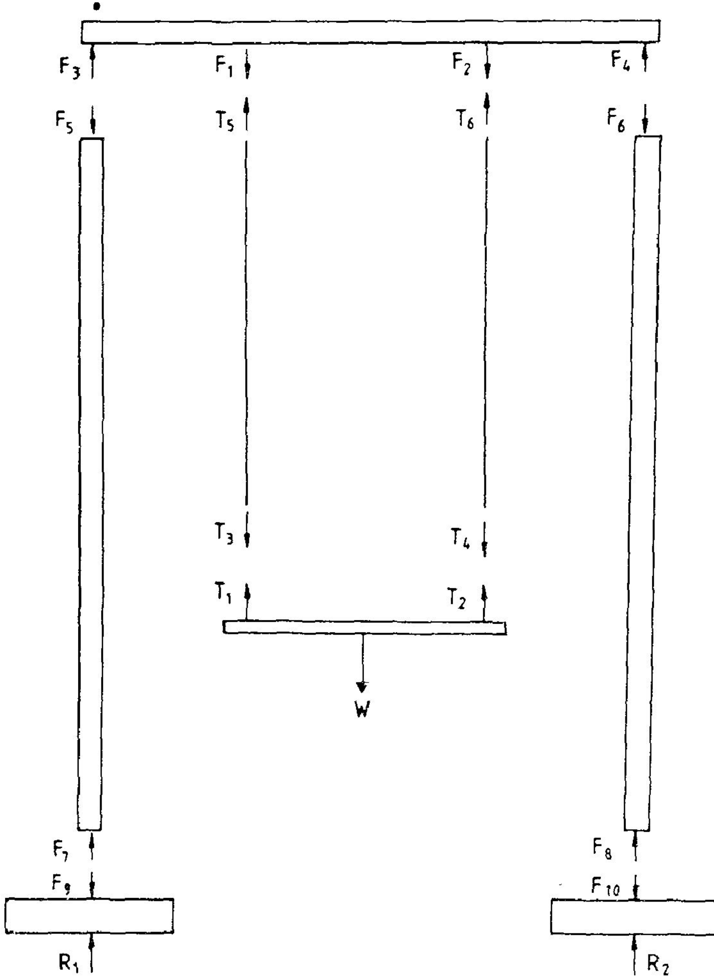
செலுத்துகின்றன; பலகை, கயிறுகளின்மீது கீழ்நோக்கிய விசைகளைச் செலுத்துகிறது. எனலாம். இவ்வாறு கயிறுகள் ECDF என்னும் விட்டத்தின்மீது கீழ் நோக்கிய விசைகளைச் செலுத்துகிறது என்பதையும் காணமுடியும். விசைகள் செலுத்தப்படும் தன்மை, தாங்கப்படும் தன்மைகளைப் படம் 1.2 விளக்குகிறது.

முதலில் பலகையை மட்டும் நோக்குவோம். இதன்மீது செயல்படும் விசைகள் W, T_1, T_2 என்பன. W என்பது புறவிசை. இவ்விசையின் அளவும், செலுத்தப்படும் புள்ளி X உம் ஊஞ்சல் பயன்படுத்தப்படும் விதத்தைப் பொருத்து அமையும். W எனும் விசையின் அளவு, செலுத்தப்படும் திசை, புள்ளி இவற்றை ஒட்டி T_1 T_2 என்னும் விசைகளின் அளவுகளை விசைநிலையியல் (Statics) விதிகளைக் கொண்டு காணலாம். (கணக்கீட்டு விவரங்களை ஆங்காங்குப் பின்னர் விரிவாய்க் காண்போம்). பொதுவாய், T_1, T_2 என்னும் விசைகள் பலகையைச் சமனிலை (Equilibrium) யில் இருத்தத் தேவையான அளவில் இருக்க வேண்டும் என்பதை மட்டும் இங்கு உணர்ந்தால் போதும். பலகையைப் பொறுத்தமட்டில் W என்பதை விசை (Action) என்றும், T_1, T_2 என்பனவற்றை எதிர்விசைகள் (Re-actions) என்றும் கூறலாம்.

எதிர்விசையைச் சாதனத்தின்மீது (இங்கு பலகையின்மீது) வெறுமனே செலுத்த முடியாது ; அதற்கும் சாதனங்கள் வேண்டும். இவற்றைத் தாங்கிகள் (Supports) என அழைக்கிறோம். CA, DB என்னும் கயிறுகள், பலகைக்குத் தாங்கிகளாய் விளங்குகின்றன. அதேசமயம், ECDF எனும் விட்டம் கயிறுகளுக்குத் தாங்கியாக விளங்குகிறது. EG, FH என்னும் கம்பங்கள் விட்டத்திற்குத் தாங்கிகளாய் விளங்குகின்றன. கம்பங்கள் கடைக்கால்களால் தாங்கப்படுதலையும், கடைக்கால்கள் பூமியால் தாங்கப்படுதலையும் உணரலாம். அதனால், எல்லாச் சுமைகளும் இறுதியாய்ப் பூமியால் தாங்கப்படுகின்றன என்பதை உணரமுடியும்.

ஊஞ்சல் என்னும் இத்தகைய சாதனம் இல்லையென்றால், W என்னும் சுமை, நேரடியாய்ப் பூமியால் தாங்கப்படும். இச்சாதனம் நமக்கு ஒரு பயன்பாட்டு வசதியை அளிக்கிறது. சுமை செயல்படும் இடத்திலிருந்து இறுதித் தாங்கிக்கு (பூமிக்கு) விசை செலுத்தப்படுதற்கு இணைப்புகளாகவே சாதனத்தின் உறுப்புகள் பல்வேறு விதங்களின் பயன்படுதலைக் காண்கிறோம். ஒரு குறிப்பிட்ட சூழலில் சாதனத்தின் பல்வேறு உறுப்புகளும் எவ்வாறு சுமைகளை ஏறகின்றன எவ்வாறு செலுத்துகின்றன என்பன புறவிளைவுகளாகும். பலவகைச் சாதனங்களில் நிலையியல் (Statics) விதிகளின் துணை கொண்டு புறவிளைவுகளை ஆய்ந்தறியலாம். இனி எந்த ஓர் உறுப்பும் (புறத்தில்) ஒரு முனை விசைகளையே மறுமுனை விசைகளாய்ச் செலுத்தும்போது அகவிளைவுகளும் தோன்றலைத் தவிர்க்க இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒருமூட்டையைத் தலைமேல் வைத்துக் கொண்டு நிற்கும் ஒருவன், அந்தச் சுமையைத் தன் கால்களில் வழியாகத் தரைமீது செலுத்துவான்; அதே சமயத்தில் உடலின்மீதும் பல அகவிளைவுகள் தோற்றுவிக்கப்படும். அதனால், புறவிளைவுகளோடு அகவிளைவுகளையும் ஆய்தல் முக்கியக் கூறாகும்.

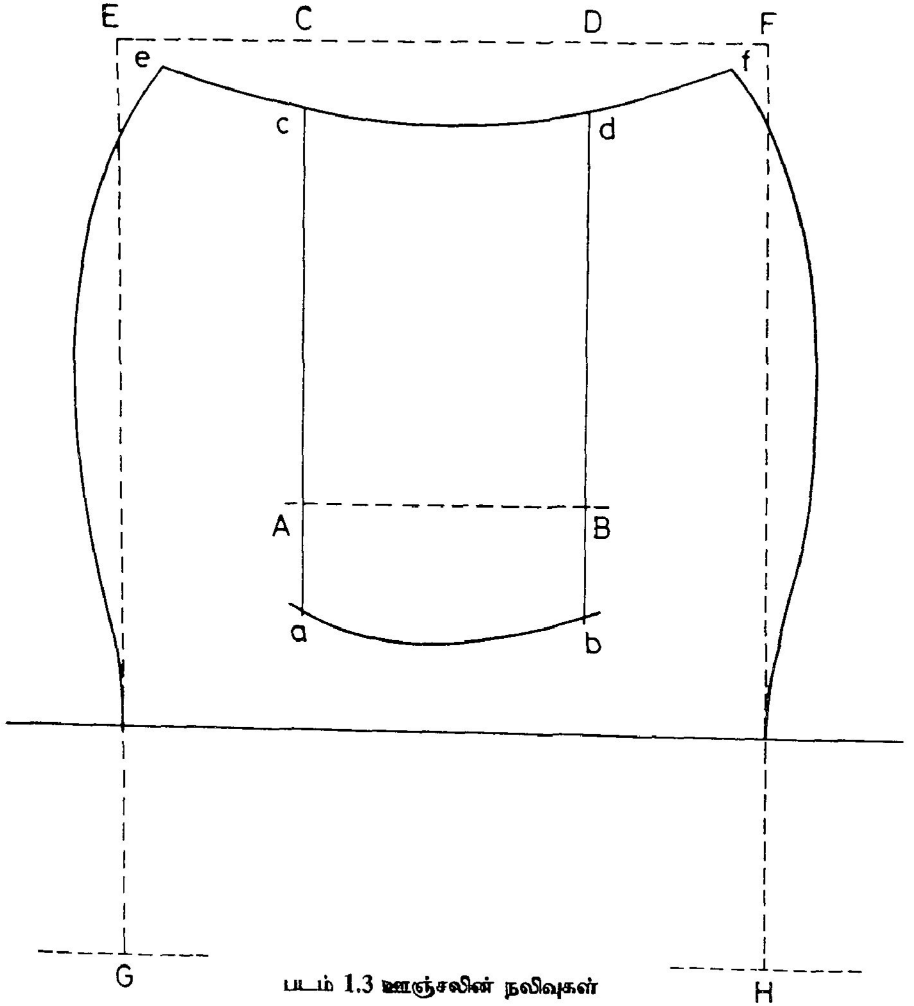
ஊஞ்சல் எடுத்துக்காட்டையே மீண்டும் நோக்குவோம். ஊஞ்சற்பலகைக்குப் பதில் ஒரு மெல்லிய மூங்கில்கழி, அதனைத் தொங்கவிடுதற்கு இரப்பர் கயிறுகள் தாங்கு சட்டத்தற்கும்



படம் 1.2 ஊஞ்சலின் விசைப்படம்

ஓரளவு மெல்லிய முங்கில் கழிகள். இவற்றைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் ஊஞ்சலின்மீது சுமையை வைத்தால் விளையும் விளைவுகளைப் படம் 1.3 காட்டுகிறது.

இப் படத்தில் கயிறுகள் நீண்டிருப்பதையும், கழிகள் வளைந்திருப்பதையும் காணலாம். அஃதாவது, விசைகள் செலுத்தப்படும் போது இவ்வுறுப்புகள் நலிவடைந்துள்ளன என்பதைக் காண்கிறோம். இந் நலிவுகள் (Deformations) விசைகள் செயல்படும்போது தோற்றுவிக்கப்படும் அகவிளைவுகளில் ஒருகூறாகும். இதே ஊஞ்சலை உருக்குக் கொண்டு உருவாக்கியிருப்பின்



படம் 1.3 ஊஞ்சலின் நலிவுகள்

தளர்வுகள், நம் கண்ணுக்குப் புலப்படாவிடினும் சிறிதளவு இருத்தலை நுண்ணிய அளவீடுகளால் அறியலாம். பொதுவாகத் திண்மங்களை (Solids), தளர்திண்மங்கள் (Deformations Solids), தளராத் திண்மங்கள் (Rigid Solids) எனப் பிரிப்பர். திண்மவிசையியலில் தளர்திண்மங்களின்மீதுள்ள விளைவு பற்றி ஆய்ப்படுவதால் இவ்வியல் தளர்திண்ம விசையியல் (Mechanics of Deformable Solids) என அழைக்கப்படுகிறது. தளராத்திண்மம் என்பது ஒரு கற்பனையே. ஆதலின், தளர்திண்மமே திண்மம் என்று குறிக்கப்பட்டு வருகிறது. (Rational Man என்பதற்குப் பதிலாய் Man என்றே குறிப்பிடுதலை நோக்குக). அதனால், இவ்வியல், திண்ம விசையியல் (Mechanics of Solids) என்றே வழங்கப்படுகிறது. அதனால், பொருள் வலிமை இயல் அல்லது

திண்ம விசை இயலின் கருப்பொருள், தளர்திண்மச் சாதனங்களின்மீது விசைகள் விளைவிக்கும் புற, அகவிளைவுகளின் ஆய்வு என உரைக்கலாம். (அகவிளைவுகளில் நலிவுகளேயன்றி அகவிசைகளும் அடங்கும். புற அக விளைவுகள் பற்றிய விரிவான விளக்கங்களைப் பின்னர்க் காண்போம்). அதனால், இவ்வியல், சாதனங்களின் வடிவமைப்பினைக் (Design) கற்பதற்கு அடிப்படைத் தேவைகளுள் (Prerequisite) ஒன்று என்பதும் தெளிவாகிறது.

1.3 அடிப்படைத் தேவைகள்

இவ்வியல் கற்பதற்குத் தேவையான அடிப்படையறிவு விசையியல்(mechanics) எனலாம். விசையியலின் தொடக்க அறிவே இதனைத் தொடங்குவதற்குப் போதுமானதாகும். மேலும், இன்றிமையாத தேற்றங்கள், அடிப்படைக் கருத்துகள் யாவும் இந்நூலிலேயே தேவையான அளவிற்கு விளக்கப்படுகின்றன; அதனால், பள்ளிக் கல்வியில் ஒருவர் பெற்ற விசையியல் அறிவே, இவ்வியலைக் கற்கப் போதுமானதாகும்.

அடுத்துத் தேவைப்படும் அடிப்படை அறிவு கணிதம். திண்மை விசையியலின் தொடக்கநிலைக் கல்விக்கு மிக எளிய கணித அறிவே போதும். இதில் கணக்கீடுகளைவிடக் கருத்துகளும் சிக்கல்களை ஆழ்ந்து சிந்திக்கும் பயிற்சியும் மிகவும் முக்கியமாகும். அதனால் எண்கணிதத்துடன் (Arithmatics) தொடக்க நிலையளவுக்கு இயற்கணிதம் (Algebra), கோண கணிதம் (Trigonometry), வடிவ கணிதம் (Geometry) கலனகணிதம் (Calculus) எனும் துறைகளில் தெளிவான அறிவும் பயிற்சியும் தேவைப்படும். இங்கு ஓர் எச்சரிக்கை; திண்மவிசையியலின் அடிப்படை அளவிற்குத் தேவையான கணிதம் பற்றியே தற்போது குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. ஆனால், மேல்நிலைகளில், இவ்வியலின் ஆய்வுகள் சிலவற்றைச் சரியான முறையில் மேற்கொள்ளுதற்கு, இன்றுவரை வளர்ச்சியடைந்துள்ள கணிதஅறிவு முழுதுமே போதா என்பதை உணர வேண்டும். அத்தகைய சூழல்களில் தோராயமான தீர்வுகளையே (Approximate results) பெற முடியும் என்பதையும், ஒவ்வொரு தோராயமும் தீர்வின் வரம்பு களை மட்டுப்படுத்தும் தன்மையதாய் விளங்குவதையும் காண முடியும். மேலும், தோரா யங்கள் தீர்வில் மட்டுமின்றிச் சிக்கலை எடுத்துரைக்கும் நிலையிலேயே மேற்கொள்ளவேண்டிய சூழ்நிலைகளும் நிலவுதலைக் காணலாம்.

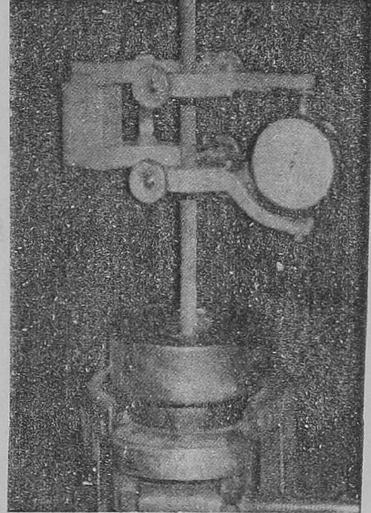
திண்ம விசையியல் ஒரு கற்பனைத் துறை அன்று நடைமுறையில் மிகுதியாய்ப் பயன்படும் ஓர் இயலாகும். அதனால் பொருள்களின் அடிப்படைப் பண்புகள் பற்றிய இயற்பியல் (Properties of Matter) அறிவும் ஓரளவு தேவைப்படும். நேரடியாய் ஆய்வுக் கூடங்களிலிருந்தோ, நூல்களின் வாயிலாகவோ பொருள்களின் அடிப்படைப் பண்புகளைப் பற்றிய அறிவைப் பெற்ற பின்பே, பொருள் வலிமை இயலில் பயனை நடைமுறையில் பெற இயலும். இவையனைத்துடன் சிக்கல்களை நடைமுறைக் கண்ணோட்டத்துடன் கூர்ந்து சிந்தித்துப் பகுத்துவரும் பயிற்சியும் மிகவும் இன்றியமையாததாகும். மேலும், இத்துறையின் பல்வேறு பகுதிகளும் ஒன்றனுக் கொன்று நெருங்கிப் பிணைந்திருப்பதைக் காணலாம். அதனால், இவ்வியலை முறையாய்த் தொடர்ச்சியாய் கற்றல், மிகுந்த பயன்பெறும் வழியாகும்.

2. தகைவும் விகலமும்
(Stress and Strain)

21 ஓர் எளிய நீட்சிச் சோதனை

விசைகள் பொருள்களின்மீது விளைக்கும் புற அக விளைவுகளைக் கற்றல், பொருள் வலிமை இயலின் அடிப்படைக் கூறாகும் எனக் கண்டோம். இங்கு எளிய சூழ்நிலையொன்றில் இவ்விளைவு பற்றிக் கணலாம். சோதனைப் பொறி ஒன்றில் கம்பியொன்றனைப் பொருத்தி, அதனை இருபுறமும் பற்றி இழுக்கச் செய்து, அதனால் தோன்றும் விளைவு களை ஆய்தல், பொருள் வலிமை ஆய்வுக் கூடங்களில் அன்றாடம் செய்யப்பட்டு வரும் சோதனைகளுள் ஒன்றாகும்.

படம் 2.1 இல் காட்டியவாறு ஒருகம்பி, பொறியின் கிடுக்கிப் பிடிப்புகளில் உறுதியாகச் சிக்க வைத்து இழுக்கப்படுகி றது. செலுத்தப்படும் இழுவிசையின் அள வைக் காட்டப் பொறியில் அளவு காட்டி (Indicator) ஒன்று உள்ளது. இழு விசையின் விளைவாகக் கம்பி நீட்சியடையும். நீட்சி யின் அளவைக் காட்டற்குரிய அளவியும் பொருத்தப் பட்டுள்ளது. செலுத்தப்படும் விசையின் அளவினைச் சிறிது சிறிதாய் அதிகரித்து ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் விசை யும் அது சார்ந்த நீட்சியும் பதிவு செய்யப் படுகின்றன. இவ்வளவீடுகளைக் கம்பி பிய்ந்து போகும் வரை மேற்கொள்ளல் நல்லது; எனினும், நீட்சியளவீட்டுக் கருவி யின் பாதுகாப்பினை முன்னிட்டுச் சற்று முந்திய கட்டத்திலேயே நீட்சி அளவீடு களை நிறுத்திவிடுவர்.



படம் 2.1 நீட்சிச் சோதனை
(மென் உருக்கு வரைவு)

சோதனையின் அடுத்த கட்டம் அள வீடுகளுக்கிடைவிலுள்ள தொடர்பினைக் காண்பதாகும். இழுவிசையும் நீட்சியும்

ஒன்றோடொன்று தொடர்புடையன என்பதை நம் பட்டறிவும் (Experience) உள்ளுணர்வும் (Intution) உணர்த்தும்; இவ்விரண்டிற்கும் இடையிலுள்ள சரியான தொடர்பினை நிறுவுவதே இச் சோதனையின் நோக்கமாகும். இழுவிசையையும் நீட்சியையும் நேரடியாய்த் தொடர்புபடுத்த முடியும். ஆனால், பொருளின் அடிப்படைப் பண்புகளை நன்குணர வேறு அளவீடுகள் தனிசிறந்து விளங்குகின்றன. அவை, தகைவு (stress), விகலம் (Strain) என்பனவாகும்.

செலுத்தப்படும் விசை அளவினை அது செலுத்தப்படும் பரப்பளவினால் (கம்பியின் குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பு) வகுக்க, ஓர் அலகு பரப்பின் மீது செலுத்தப்படும் விசைஅளவு பெறப்படும். இதனையே தகைவு என அழைக்கிறோம்.

எ.கா.	செலுத்தப்படும் விசை	=	40 கிலோ நியூட்டன்
	கம்பியின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு	=	500 mm^2
	தகைவு	=	40000 ÷ 500
		=	80 N/mm^2 அல்லது 80 MPa*

(அஃதாவது ஒரு சதுர மில்லிமீட்டர் பரப்பின்மீது செலுத்தப்படும் விசை = 80 நியூட்டன்)

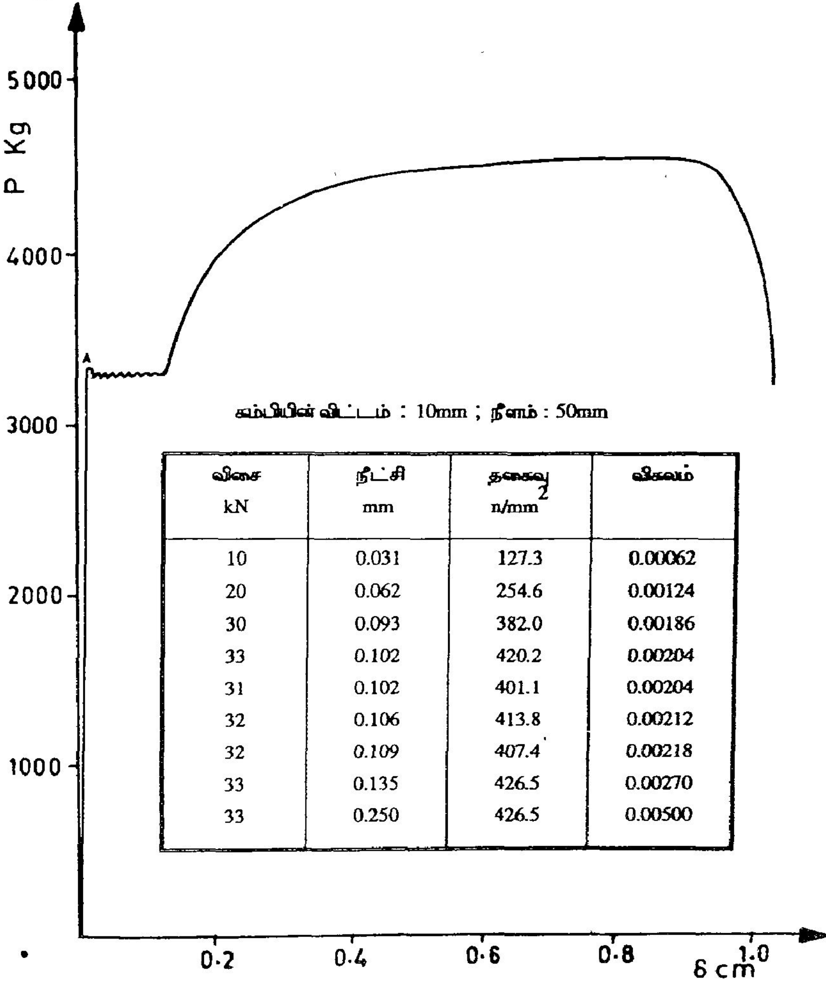
அவ்வாறே கம்பியின் மொத்த நீட்சியைக் (Elongation) கம்பியின் நீளத்தால் வகுக்க, ஓர் அலகு நீளமுள்ள கம்பியின் நீட்சி கிடைக்கும். இதனையே விகலம் (Strain) என அழைக்கிறோம்.

எ.கா	கம்பியின்நீளம்	=	120 மி.மீ.
	கம்பியின்நீட்சி	=	0.036 மி.மீ.
	விகலம்	=	0.036 ÷ 120
		=	0.003 மி.மீ/மி.மீ. (அல்லது 0.003 மீ/மீ)

இப்போது காட்சியளவில் கிடைத்த அளவீடுகளைக்கொண்டு ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் தகைவு, அதனைச் சார்ந்த விகலங்களைக் கணக்கிட்டு இரண்டனுக்குமிடையேயுள்ள தொடர்பினைத் - தகைவு - விகல உறவினை (Stress Strain relationship) நிறுவ இயலும். இவ் உறவு சோதிக்கப்படும் கம்பியின் நீளம், குறுக்குவெட்டுப் பரப்புகளைச் சார்ந்திராமல், மூலப் பொருளின் தன்மையைமட்டுமே சார்ந்திருக்குமாதலால் இஃது ஓர் அடிப்படை உறவாகும்.

* தகைவின் அடிப்படை அலகினைச்சுருக்கமாய் N/m^2, அல்லது பாஸ்கல் (Pascal) Pa எனவும், இதன்பேரலகு Mega Pascal (N/mm2)என்பது MPa எனவும், வழங்கப்படுகின்றன.

படம் 2.2 இல் ஒருமென் உருக்குக் கம்பியின் மீது நிகழ்த்தப்பட்ட நீட்சிச் சோதனையின் அளவீடுகளும் தகைவு விகல உறவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இச் சோதனையடிப்படையில் பெறப்பட்ட இழுவிசை நீட்சி உறவும், தகைவு விகல உறவும் காட்டப்பட்டுள்ளன.



கம்பியின் விட்டம் : 10mm ; நீளம் : 50mm

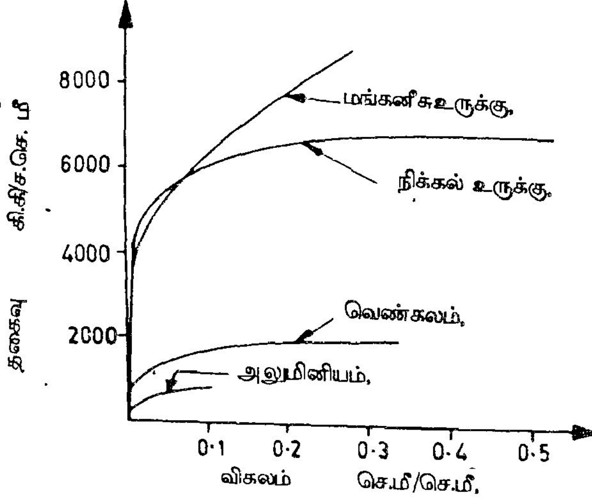
விசை kN	நீட்சி mm	தகைவு n/mm^2	விகலம்
10	0.031	127.3	0.00062
20	0.062	254.6	0.00124
30	0.093	382.0	0.00186
33	0.102	420.2	0.00204
31	0.102	401.1	0.00204
32	0.106	413.8	0.00212
32	0.109	407.4	0.00218
33	0.135	426.5	0.00270
33	0.250	426.5	0.00500

நீட்சிச் சோதனை (மென் உருக்கு) வரைவு

படம் 2.2

பொருள் வலிமைப் பண்புகளில் மிக முக்கியமானதும் அடிப்படையானதுமான ஓர் உறவு தகைவு விகல உறவேயெனக் கண்டோம். பொறியியல் அமைப்புகளில் பயன்படும் பல்வேறு

பொருள்களுக்கும் இத்தகைய சோதனைகள் மூலம் தகைவு விகல உறவினை நிறுவ இயலும். சில முக்கியப் பொருள்களின் தகைவு விகல உறவுகள் வரைபடம் 2.3 இல் தரப்பட்டுள்ளன.

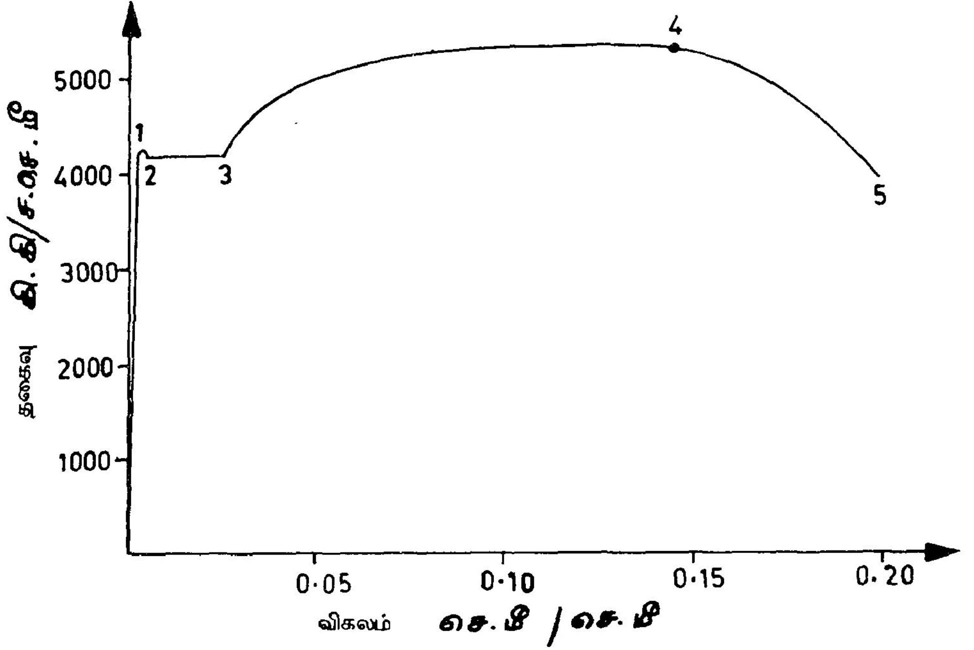


படம் 2.3 சில உலோகங்களின் தகைவு விகல உறவுகள்

2.2 நெகிழ்ச்சி, மீட்சி எல்லை, மீள்மைக் கெழு

ஒரு பொருளின் தகைவு விகல உறவிலிருந்து அப்பொருளின் வலிமைப் பண்புகளைக் கற்க முற்படுவோம். பல்வேறு வகையான பொருள்களுக்கும் தகைவு விகல உறவுகள் பல்வேறு விதமாய் இருப்பினும் அவை யாவற்றுக்கும் பொதுவான தன்மையொன்று இருப்பதைக் காணலாம். அஃதாவது தகைவு-விகல வரைவின் தொடக்கப் பகுதி நேர்கோடாய் இருப்பதை நோக்கலாம். தகைவின் அளவு இந் நேர்க்கோட்டுப் பகுதிக்குள் அடங்குமெனில் தகைவும் விகலமும் நேர்விகிதப் பொருத்தமுடன் இருப்பதை உணர்கிறோம். அதுமட்டும் இன்றித் தகைவின் அளவு இவ்வெல்லைக்குள் இருப்பின், தகைவு நீக்கப்படும் போதோ, குறைக்கப்படும் போதோ அவற்றிற்கேற்ற அளவில் விகலமும் குறைவதைக் காண்கிறோம். இவ் வெல்லையே (படம் 2.2 இல் 'A' என்னும் புள்ளியால் குறிக்கப்படுகிறது) மீட்சி எல்லை (Elastic limit) என அழைக்கப்படுகிறது. மீட்சி எல்லைக்குள் தகைவுக்கும் விகலத்திற்கும் உள்ள விகிதம் நிலையா (constant) யிருக்கும். இவ் விகிதத்தையே மீள்மைக்கெழு (Elastic Modulus) என அழைக்கிறோம்.

அடுத்து மீட்சி எல்லைக்குப் பின்னர்த் தகைவு-விகல உறவின் தன்மைகள் பலவிதமாயிருத்தலைப் பல்வேறு பொருள்களின்மீது சோதனைகள் பல செய்து அறிந்துள்ளனர் இவ்வேறுபாடுகள் விரிவாகப் பின்னர் ஒரு தனி அத்தியாயத்தில் விளக்கப்படும். எனினும், இங்கு ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் தகைவு -விகல உறவினை முழுமையாய் ஆய்ந்து, சில பொதுவான உண்மைகளைக் கற்போம். பொறியியல் துறையில் பெருமளவில் பயன்படும் மென்உருக்கின் தோராயமான தகைவு-விகல உறவு படம் 2.4 இல் தரப்பட்டுள்ளது. இவ்வுறவுப் படத்தினைப் பல்வேறு பகுதிகளாய்ப் பிரிக்க முடியும்.

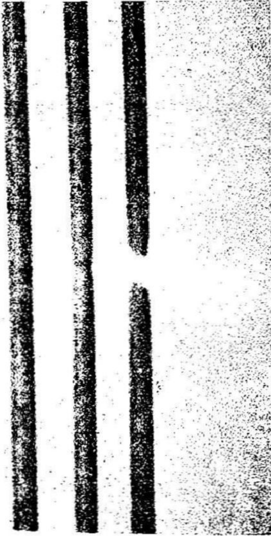


படம் 2.4 மென் உருக்கின் தோராயமான தகைவு விகல உறவு

சோதனையின் தொடக்கநிலையை 0 என்னும் புள்ளி குறிப்பிடுகிறது. இதிலிருந்து 1 என்னும் புள்ளிவரை இவ்வுறவு நேர்கோடாக அமைந்துள்ளது. தகைவும் விகலமும் வரையில் 01 எல்லைக்குள் இருக்கும் வரை பொருளுக்கு மீள்திறன் (Elastically) இருப்பதைக் காண்கிறோம். தகைவு 1 என்னும் புள்ளியை எட்டாதவரை, எந்தக் கட்டத்திலும் தகைவு விலக்கப்படும் போது அதற்கேற்ற அளவிற்கு விகலமும் குறைந்துவிடும் என்பது சோதனைகளின் மூலம் நிறுவப் பட்டுள்ளது. அதனால் 1 என்னும் புள்ளி குறிப்பிடும் தகைவின் அளவினை மீட்சி எல்லை (Elastic limit) என அழைக்கிறோம்.

செலுத்தப்படும் தகைவின் அளவு, மீட்சி எல்லையை எட்டிவிடும்போது ஒரு புதிய திருப்பத்தைக் காண்கிறோம். இங்கு ஒரு சிறு பகுதி, 12 தெளிவற்றதாக அமைந்துள்ளது. இங்குப் பொருளின் உள்கட்டமைப்பில் (Internal Structure) மாற்றங்கள் தோன்றித் தகைவு-விகல உறவின்தன்மை மாறத் தொடங்குகிறது. இந்நிலையை நெகிழ்ச்சி (Yielding) என அழைக் கிறோம். மீட்சி எல்லையின் இறுதியில் நெகிழ்ச்சி தொடங்குவதால், இவ் வெல்லை நெகிழ்ச்சி நிலை (Yield Point) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. நெகிழ்ச்சி தொடங்கியபின் தகைவு சிறிது தளர்ச்சியடைய விகலம் சற்று மிகுவதையும் காணலாம். அதனால், புள்ளி 1, மேல்நெகிழ்ச்சி நிலை (upper yield point) என்றும், புள்ளி 2, தாழ்நெகிழ்ச்சி நிலை (lower yield point) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. தாழ்நெகிழ்ச்சிநிலையை அடைந்த பின்னர்ப் பொருள், குழைவு

நிலையை (Plasticity) எய்துகிறது. அஃதாவது, தகைவில் ஏற்றம் ஏதுமில்லாமலேயே, விகலம் மிகுந்து கொண்டே போவதைக் காண்கிறோம். இக்குழைவு நிலையின்போது (படத்தில் 2,3 என்னும் பகுதி), பொருளின் உள்கட்டமைப்பில் மாற்றங்கள் பல தோற்றுவிக்கப்பட்டு அவற்றின் விளைவாய் இறுதியில் பொருள்மேலும் கூடுதலான தகைவினைத் தாங்கும் வலிமையைப் பெறுகிறது. இதன் விளைவாகத் தகைவு-விகல உறவு வரையில் 3 என்னும் புள்ளிக்கு அப்பால் விகலம் மிகும்போது தகைவும் மிகுதலை நோக்கலாம். இந்நிலையை விகல விறைப்பு (Strain Hardening) என அழைக்கிறோம். விகல விறைப்புநிலையில் சிறிது எல்லையைத் தாண்டிய பிறகு பொருளின் உச்சத் தகைவு (Ultimate stress) நிலை தோன்றுகிறது (படத்தில் 4 என்னும் பகுதி). இதற்குப் பின்னர் விகலம் வேகமாய் மிகுந்துகொண்டே செல்வதையும், அதேசமயம், கம்பியின் மீது செலுத்தப் படும் தகைவின் அளவு குறைந்து கொண்டே வருவதையும் நோக்கலாம். (படத்தில் 45 என்னும் பகுதி). இவ் எல்லைக்குள் கம்பியின் ஏதாவதொரு பகுதியில் குறுக்கம் (Necking), தோன்றி, வேகமாய் மிகுந்துகொண்டே சென்று, இறுதியாய்க் குறுக்கப் பகுதியில் கம்பி, இரு துண்டுகளாய்ப் பிய்ந்து போகிறது. குறுக்கத்தின் பல்வேறு நிலைகளைப் புகைப் படம் 2.5இல் நோக்கலாம்.



படம் 2.5 இழுபடும் மென் உருக்கின் பல்வேறு நிலைகள்

மென் உருக்கின் தகைவு விகல உறவு விளக்கம் ஓர் எடுத்துக்காட்டாகவே இங்குத் தரப்பட்டுள்ளது. இதனைப் போன்றே பல்வேறு பொருள்களின் தகைவு-விகல உறவுகளைச் சோதனைகள் மூலம் நிறுவ முடியும். பொருள்களின் தன்மைக்கு ஏற்ப, இவ்வுறவுகள் பல்வேறு விதமாய் அமைந்திருத்தலையும் நாம் காண முடியும். எடுத்துக்காட்டாக, படம் 2.3 இல் செம்பு, அலுமினியம் போன்ற சில பொருள்களின் தகைவு விகல உறவுகள் தரப்பட்டுள்ளன. ஆனால், இவ்வுறவு வரைகள், பொருள்களின் வலிமைப் பண்பின் ஒரு பகுதியையே காட்டுகின்றன. மென் உருக்கு உதாரணத்தையே வைத்துக்கொண்டு மேலும் சில தன்மைகளை ஆராய்வோம்.

பொருள்களின்மீது செலுத்தப்படும் தகைவு நீக்கப்பட்டால் (அல்லது தகைவின் ஒரு பகுதி குறைக்கப்பட்டால்) என்ன நிகழ்கிறது? என்பதைக் காண்போம். தகைவு, நெகிழ்ச்சி எல்லையை மீறாத வரை, தகைவு குறையும் அதேவிகிதத்தில் விகலமும் குறைதலைக் காணலாம்.

அஃதாவது பொருள் விகலத்திலிருந்து மீட்சி அடைகிறது. அதனால், வரையில் 01 என்னும் புள்ளிக்குரிய தகைவின் அளவினை **மீட்சி எல்லை** (Elastic limit) என அழைக்கின்றோம். இதே அளவு தகைவினை அடைந்ததும் பொருள் நெகிழ்ச்சியடையத் தொடங்குவதால் அத் தகைவின் அளவினை நெகிழ்ச்சி எல்லை என்றும் அழைப்பதை முன்னர் அறிந்தோம். தகைவின் அளவு மீட்சி எல்லைக்கு உள்ளாகவே இருக்கும்வரை தகைவும், விகலமும் நேர்விகிதப் பொருத்தமுடன் இருக்கும் என்பதை நம் சோதனைகள் உணர்த்து கின்றன. இவ்வுண்மை ராபர்ட் ஹூக் என்பாரின் பெயரால் **ஹூக் விதி** (Hooke's Law) என வழங்கி வருகிறது. இவ்விதியின் பொதுமை வடிவினைப் பின்னர் விளக்கமாய்க் காண்போம். இங்கு அதன் எளிய வடிவினைக் காணலாம். தகைவு, σ என்னும் குறியீட்டாலும், விகலம் ε என்னும் குறியீட்டாலும் வழங்க,

$$\sigma \propto \varepsilon \qquad 2.1$$

என்பது விதியின் எளிய வடிவமாகும்.

அஃதாவது σ = ஒரு மாறிலி $\times\ \varepsilon$ 2.2

சமன்பாடு 2.2 இல் வரும் மாறிலி **மீள்மைக்குணகம்** (Elastic Modulus) என அழைக்கப்படுகிறது. நீளவாட்டுத் தகைவுக்கான மீள்மைக் குணகத்தை (Young's Modulus) எனக் குறிப்பிட்டு, இதனை E என்னும் குறியால் சுருக்கமாய் எழுதுகிறோம். அஃதாவது

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad 2.3$$

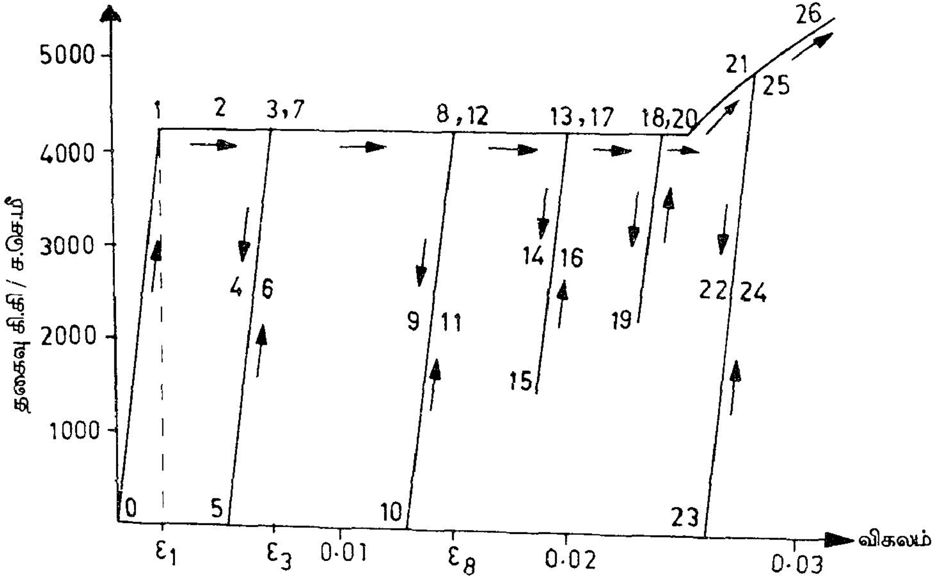
சமன்பாடு 2.3 ஐ எவ்விதச் சூழலில் பயன்படுத்த முடியும்? என்பதைத் தெளிவாக்க, மீட்சி எல்லைக்கப்பால் என்ன நிகழ்கிறது? என்பதை விரிவாய் நோக்க வேண்டும்.

ஒருமென் உருக்குக் கம்பியில் மீட்சி எல்லைக்கும் அதிகமான விகலம் தோற்றுவிக்கப் பட்ட பின்னர்த் தகைவு முழுமையாகவோ, பகுதியாகவோ நீக்கப்பட்டால் என்ன நிகழ்கிறது? என்பதைப் படம் 2.6 இல் விளக்கமாய்க் காணலாம். தகைவு σ_y யை எட்டி பின் விகலம் ε_3 யை அடையும் வரை குழைவு நிலையை அனுமதித்துப் பின்னர் தகைவினை நீக்குவோம். இப்போது கம்பி, தன் பழைய நிலையை அடைவதில்லை. மாறாய்த் தகைவு விகல வரையில் 01 என்ற கோட்டுக்கு இணையான மற்றொரு நேர்க்கோடாக மீட்சி வரை (345) இருப்பதைக் காணலாம். அதாவது தகைவு முழுமையும் நீக்கப்பட்ட பின்பும் விகலம் முழுமையாய் நீங்குவதில்லை. மாறாகக் கம்பியின் நீளம் மிகுந்திருக்கும். அதாவது தோற்றுவிக்கப்பட்ட விகலம் ε_3 இல் ஒரு பகுதி (ε_1) மட்டுமே நீங்குகிறது. மீதி விகலம் கம்பியில் நிலையான நலிவைத் தோற்றுவித்து விடுகிறது. இதன் அளவினை **நிலைகுலைவு** (Permanent Set) என்கிறோம்.

நிலைகுலைவு $= \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \varepsilon_5$

மீண்டும் கம்பியின்மீது தகைவு செலுத்தப்படும்போது தோன்றும் விகலத்தின் அளவுகள் 5678 என்னும் பகுதியில் காட்டப்பட்டுள்ளன. விகலம் ε_8 ஆக இருக்கும்போது மீண்டும் தகைவினைக் குறைக்க முற்படுவோம். இங்கும் விகல நீக்கம் முன்போன்றே இருத்தலைக்

காணலாம். தகைவு முழுமையாய் நீக்கப்படாமல் மீண்டும் மிகுக்கப்பட்டாலும் இதே தன்மையில் விளைவுகள் தோன்றுவதைப் படம் 2.6 இன் 8 9 10, 10 11 12, 13 14 15, 15 16 17 18, 18 19, 19 20 21, முதலாய வரைபகுதிகள் காட்டுகின்றன. அதாவது ஒவ்வொரு முறையும் தகைவு, குழைவு நிலையைத் தோற்றுவிக்கும்போது உண்டாகும் நிலைகுலைவுகளின் அளவுகள், முந்தைய நிலை குலைவுகளின் மொத்த அளவோடு சேர்ந்து மிகுந்து கொண்டே போகின்றன. அதே போக்கில் குழைவு எல்லையைத் தாண்டிவிட்டால் விகல விறைப்பு நிலையும் தோன்றுதலைக் காணலாம். இவற்றிலிருந்து வடிவமைப்பாளர் அறிய வேண்டிய பொருட்பண்பு யாது? என்பதை இனி நோக்குவோம்.



படம் 2.6 மென் உருக்கின் நிலைகுலைவும் விகல விறைப்பும்

ஒரு பொறி அல்லது பொறியமைப்புத் தனது பணியைச் செவ்வனே நிறைவேற்ற அது தன் வலிமையை இழக்காமல் இருந்தால் மட்டும் போதாது; அதன் வடிவமும் குலையாமல் இருக்க வேண்டும். ஆனால் மீட்சி எல்லையைத் தாண்டும் அளவிற்குத் தகைவுகள் செலுத்தப்படின், பொருள், நிலையான சீர் குலைவை எய்தி, அதன் பயனை இழக்கும் நிலை அடையலாம். அதனால், பொறியமைப்புகளில் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுகளின் அளவு மீட்சி எல்லையைத் தாண்டாவண்ணம் வடிவமைப்புகளை உருவாக்குதல் பொறியாளரின் பொறுப்பாகும். பொருளின் தன்மையை உணர்ந்துகொள்ளும் பொருட்டே தகைவு விகல உறவின் முழுமையான விவரங்களையும் அறிந்தோம். ஆனால், வடிவமைப்பிற்குப் பயன்படுத்தப் போகும் பொருள்வலிமை இயல் துறையில் தகைவுகள் எப்பொழுதும் மீட்சி எல்லைக்குள் இருப்பதாகவே கருதி ஆராய்வோம்.

23 வலிமை (Strength) :

ஒருபொருள் தாங்கக் கூடிய தகைவின் அளவினை அதன் முழு வலிமை (Ultimate Strength) என்று கூறுகிறோம். முழு வலிமைக்குச் சமமான தகைவினைச் செலுத்தினால் பொருள், சிதைவு (Failure) அடைந்து விடுமாகையால் வடிவமைப்பில் முழுவலிமையின் ஒரு சிறு பகுதியையே நாம் அனுமதிக்கின்றோம். இவ்வலிமை பொருளின் பாதுகாப்பினை உறுதி செய்வதால் இது காப்பு வலிமை (Safe Strength/Safe Stress) என அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக உருக்கின் முழுவலிமை 420 MPa என்றும், நாம் 140 MPa தகைவையே அனுமதிப்பதாகவும் கொண்டால் முழுவலிமையில் மூன்றில் ஒருபகுதி தகைவையே அனுமதிக்கிறோம். இவ்வாறு செய்வதன் மூலம் பொருள், வடிவம் குலையாமலும், வலிமை இழக்காமலும் இருப்பதை உறுதி செய்கிறோம். முழு வலிமைக்கும் காப்பு வலிமைக்கும் உள்ள விகிதம் காப்புக் காரணி (Factor of Safety) என அழைக்கப்படுகிறது.

மேலே கண்ட உதாரணத்தில்

$$\text{காப்புக் காரணி} = \frac{\text{முழு வலிமை}}{\text{காப்பு வலிமை}} = \frac{420}{140} = 3$$

காப்புக் காரணி 3 என்பது ஒருகுறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டேயின்றி எல்லாப் பொருள்களுக்கும் எல்லாச் சூழ்நிலைகளுக்கும் இதுவே பொருந்தும் என்று கொள்ளக் கூடாது. எவ்வெச் சூழ்நிலைகளில் என்ன காப்புக் காரணியைப் பயன்படுத்தலாம் என்பதைப் பொறியாளர்கள் தக்க வரைமுறைகளின் (Standards) துணைகொண்டும் தமது அனுபவத்தின் துணைகொண்டும் முடிவு செய்ய வேண்டும். இம்முடிவுகளின் விளைவாய் உருவாகும் அமைப்பில் எந்த ஒரு புள்ளியிலும் தகைவின் அளவு மீட்சி எல்லையினின்றும் போதிய அளவில் குறைவாயிருக்கும் வண்ணம் உறுதி செய்ய வேண்டும்.

முடிவாய் நாம் செலுத்தும் விசைகளின் விளைவாய்த் தோன்றும் தகைவுகள், மீட்சி எல்லைக்குள் தான் இருக்கும் என்ற அடிப்படையிலேயே நாம் பொருள் வலிமை இயலைத் தொடங்குகிறோம். அதனால், இனி வரும் பகுதிகள் பலவற்றுள்

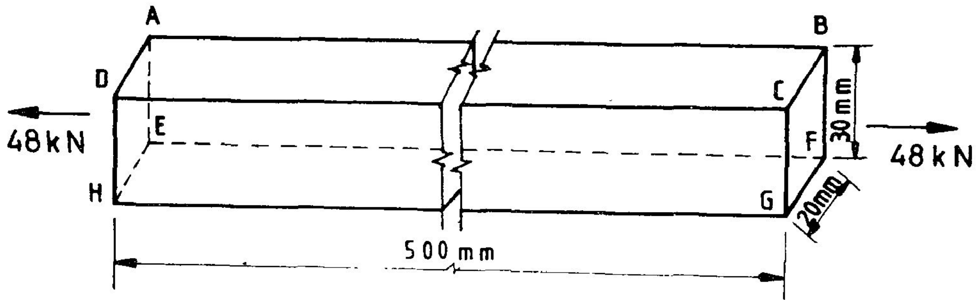
$$\sigma = E\varepsilon \qquad 2.3$$

என்னும் உறவு அடிப்படையாகக் கருதப்பட்டே வலிமை ஆய்வுகள் மேற்கொள்ளப்படும். அடுத்துவரும் சில அத்தியாயங்களில் சமன்பாடு 2.3 இன் அடிப்படையில் வலிமை ஆய்வுகளைக் காண்போம்.

2.4 பாய்சான் விகிதம் (Poisson's Ratio)

இதுவரை தகைவு விகல உறவு என்னும் கருத்தை ஒருகுறுகிய பொருளிலேயே பயன்படுத்தி வந்தோம். அதாவது நாம் எத்திசையில் நீள்விசையைச் செலுத்துகின்றோமோ, அதே திசையில் தோன்றும் நீட்சியைப் பற்றியே இதுவரை பேசி வந்தோம். ஆனால், கம்பியில்

விசை செலுத்தப்படாத மற்றத் திசைகளில் கூட விகலம் தோன்றுவதைச் சோதனைகளில் நோக்கலாம். இதனை விளக்க ஓர் எடுத்துக்காட்டினைக் காண்போம்.



படம் 2.7

எ.கா.

500 மி.மீ. நீளமும், 20 மி.மீ. × 30 மி.மீ குறுக்களவுகளும் உள்ள ஒருகம்பியின் மீது நீள்விசை செலுத்துவதாய்க் கொள்வோம். நீள்விசையின் அளவு 48000 நியூட்டன் இருக்கும்போது நீட்சியடைந்த கம்பியின் நீளம் 500.2 மி.மீ எனக் கொள்வோம்.

$$\text{நீள்தகைவு} = \frac{\text{நீள்விசை}}{\text{குறுக்குப் பரப்பு}} = \frac{48000}{30 \times 20} = 80 \ \text{N/mm}^2$$

$$\text{நீட்சி} = 500.2 \text{ மி.மீ} = 500 \text{ மி.மீ} = 0.2 \text{ மி.மீ.}$$

$$\text{நீள் விகலம்} = \frac{\text{நீட்சி}}{\text{தொடக்க நீளம்}} = \frac{0.2}{500} = 0.0004 \text{ மி.மீ.}$$

$$\text{மீள்மைக் குணகம்} = \frac{\text{தகைவு}}{\text{விகலம்}} = \frac{80}{0.0004} = 2 \times 10^5 \ \text{MPa(N/mm}^2)$$

அல்லது 200 GPa (kN/mm^2)

இவ் எளிய கணக்கீடுகள் சமன்பாடு 2.3 இன் அடிப்படையில் (அதாவது மீட்சி எல்லையைத் தாண்டாத நிலையில்) தரப்பட்டுள்ளன. ஆனால், கம்பியின் நீளத்தில் மட்டுமின்றி மற்ற அளவுகளிலும் மாற்றம் தோன்றுவதைச் சோதனைகள் காட்டுகின்றன. அதாவது, மேற்கண்ட

தகைவு செலுத்தப்பட்ட நிலையில் அதன் குறுக்களவுகளும் மாறியிருப்பதை அளந்து காட்ட முடியும். குறுக்களவுகள் 19.988 மி.மீ. × 29.97 செ.மீ. என மாறியிருப்பதாய்க் கொள்வோம்.

அதாவது, தகைவு செலுத்தப்படும் திசைகளுக்கு செங்குத்துத் திசைகளிலும் (அத்திசைகளில் தகைவு இல்லாத போதும்) விகலம் தோற்றுவிக்கப்படுகிறது. தகைவு செலுத்தப்பட்ட திசை AB யை x திசை எனக் கொண்டு மற்றச் செங்குத்துத் திசைகள் (EA, AD) இரண்டினையும் முறையே y, z திசைகள் எனக் கருதி இம்மூன்று திசைகளிலும் விகலங்களைக் கணக்கிடுவோம்.

ஏற்கனவே கண்டவாறு, x திசையில் விகலம் ε_x = 0.0004

$$y \text{ திசை விகலம், } \varepsilon_y = \frac{y \text{ திசையில் நீட்சி}}{y \text{ திசையில் தொடக்க நீளம்}}$$

$$= \frac{y \text{ திசையில் இறுதிநீளம்} - y \text{ திசையில் தொடக்க நீளம்}}{y \text{ திசையில் தொடக்க நீளம்}}$$

$$= \frac{19.998 - 20}{20}$$

$$= -0.0001$$

அவ்வாறே z திசையின் விகலம், ε_z

$$= \frac{29.997 - 30}{30} = \frac{-0.003}{30} = -0.0001$$

இங்கு ஓர் உண்மை புலப்படுகிறது. தகைவு செலுத்தப்படும் திசையேயின்றி மற்றச் செங்குத்துத் திசைகளிலும் விகலம் தோற்றுவிக்கப்படுகிறது; தகைவு செலுத்தப்படும் திசைக்குச் செங்குத்தான மற்றத் திசைகளில் தோற்றுவிக்கப்படும் விகலங்கள், தகைவின் திசையில் தோன்றும் விகலத்திற்கு எதிரானதாயும் தகைவுத் திசை விகலத்தின் ஒரு நிலையான பின்னமாயும் (Constant fraction) இருப்பதைக் காண்கிறோம். இவ்விளைவினைப் பாய்சான் விளைவு என்றும் பின்னத்தைப் பாய்சான் விகிதம் (Poisson's Ratio) என்றும் அழைப்பர். இவ் விகிதம் ν (நியூ) என்னும் கிரேக்க எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. மேற்கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக் காட்டில்

$$\nu = -\frac{(-0.0001)}{0.0004} = 0.25$$

மீள்மைக்கெழு E பாய்சான் விகிதம் இரண்டும் மீட்சி எல்லைக்குள் நிலை எண் களாயிருப்பதால் அவை இரண்டினையும் அடிப்படையான மீள்மை மாறிலிகள் (Elastic Constants) எனலாம். இவை பொருளின் வடிவமைப்பு முதலாய தன்மைகளைச் சார்ந்திராமல், பொருளின் மூலக்கூறுமைப்பினையே சார்ந்திருப்பதால் இவை அடிப்படை மாறிலிகளாகும்.

பொறியியலில் புழங்கி வரும் சில பொருள்களின் E, v மதிப்புகள் பட்டியல் 2.1இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

2.5 திசைச் சீர்மை (Isotropy)

பொருளின் மீள்மை மாறிலிகள்பற்றிக் கற்கும்போது ஒரு இயல்பான ஐயம் எழுகிறது. அஃதாவது, ஒருதிசையில் (x எனக் கொள்வோம்), தகைவு செலுத்தி அது விளைவிக்கும் விகலங்களையும், செலுத்தப்பட்ட தகைவுக்கும் தோற்றும் விகலங்களுக்குமுள்ள உறவு களையும் கற்றோம். ஆனால், பிறிதொரு திசையில் (y, z திசைகளிலோ, அல்லது வேறு ஏதாவது ஒரு திசையிலோ) தகைவு செலுத்தப்படும்போது இதே உறவுகள் இருக்குமா என்னும் ஐயமே அது.

அஃதாவது $\dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$ = E என்று சோதனை மூலம் கண்டறிந்த மீள்மைக் கெழு E எனில்

$\dfrac{\sigma_z}{\varepsilon_z}$ = E அல்லது

$\dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_y}$ = E என எழுத முடியுமா?

சுருங்கச் சொன்னால், மீள்மைப் பண்புகள் எல்லாத் திசைகளிலும் ஒரே அளவினதாய் இருக்கின்றனவா? என வினவுவோம். இவ்வினாவிற்குரிய விடையைச் சோதனைகளின் மூலம்தான் காண முடியும். பல பொருள்களின்மீது நடத்தப்பட்ட சோதனைகளிலிருந்து சில பொருள்களுக்கு மீள்மைப் பண்புகள் எல்லாத் திசைகளிலும் ஒரே அளவினவாய் இருப்பதைக் கண்டுள்ளனர். இத்தன்மையைத் **திசைச்சீர்மை** (Isotropy) என அழைத்து, அத் தன்மை கொண்ட திண்மங்களை, *திசைச்சீர்த் திண்மங்கள்* (Isotropic solids) என அழைக்கின்றனர். மீள் மைப் பண்புகள் திசையை ஒட்டி மாறும் பொருள்களை **திசைச்சார் மீள்பொருள்** (Anistropic material) என அழைக்கின்றோம். திசைச்சார் மீள்தன்மையில் பலவகையான தன்மைகள் உள. எனினும், இந்நூலைப் பொருத்தமட்டிலும் திசைச் சீர்த்திண்மங்களின் வலிமை ஆய்வு மட்டுமே கருதப்படும்.

2.6 கணச்சீர்மை (Homogeneity)

பொருள்களின் பண்புகளை ஆய்வதில் மற்றொரு வினாவையும் எழுப்பலாம். படம் 2.8ஐ நோக்குக. நீள்விசை T செலுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு கம்பியில் A, B, C என மூன்று துணுக்குகளை எடுத்துக் கொள்வோம். $\sigma = E\varepsilon$ என்னும் சமன்பாடு மூன்று துணுக்குகளுக்குமே பொருந்தும் என்னும் அடிப்படையிலேயே நம் ஆய்வுகள் நடத்தப்படும் என்று முன்னர் எடுத்துரைத்தோம். ஆனால், இப்போது எழுப்பப்படும் வினா மூன்று துணுக்குகளுக்குமே E இன் மதிப்பு ஒன்றாக இருக்குமா? அல்லது,

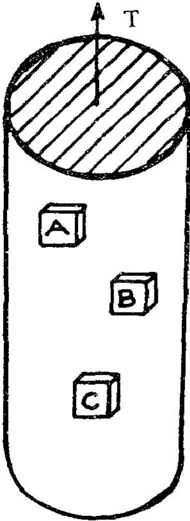
$$\sigma_A = E_A \varepsilon_A$$

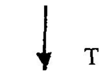
$$\sigma_B = E_B \varepsilon_A$$

$$\sigma_C = E_C \varepsilon_C$$

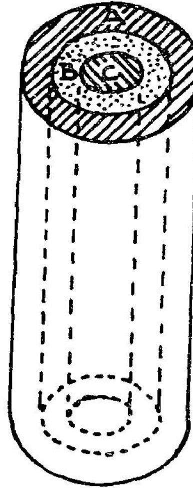
என வெவ்வேறு மீள்மைக் கெழுக்களால் (E_A, E_B, E_C முதலியன) பொருளின் பண்புகள் குறிக்கப்படவேண்டுமா என்பதே. பொருளின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் மீள்மைப் பண்புகள் மாறாதிருப்பின் அப் பொருளை கனச்சீர்ப் (Homogeneous) பொருள் என்கின்றோம். பொருள் வலிமையியலில் கனச்சீர்ப் பொருள்களை ஆய்வது மட்டுமே போதாது. புள்ளிக்குப் புள்ளி அல்லது துணுக்குக்குத் துணுக்குப் பண்புகள் மாறுபடுகின்ற கனச்சீரற்ற (Heterogenous) பொருள்களையும் நாம் ஆயப் போவதில்லை.

படங்கள் 2.9, 2.10 ஆகியவற்றில் காட்டியுள்ளவாறு சிற்சில கனச் சீர்ப் பொருள்கள் இணைந்த கூட்டு உறுப்புகளையும் ஆய வேண்டிய தேவைகள் தோன்றலாம். அவ்வாறு செய்யும்போது வேறுபட்ட கனச்சீர்மை கொண்ட பகுதிகள் எண்ணிக்கையிலடங்குவனவாக வும் (finite) வரையறுக்கப்பட்ட எல்லைகள் கொள்வனவாகவும் (with defined limits) இருத்தல்

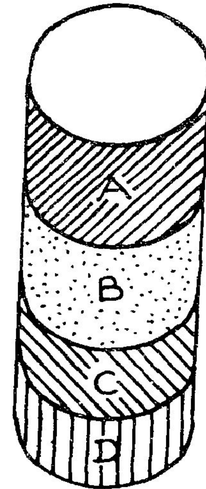




படம் 2.8



படம் 2.9



படம் 2.10

அவசியம். கனச்சீர்மை வேறுபாடுகள் பற்றி ஏதும் கூறப்படாதவரை பொருள் முழுமையும் ஒரே கனச்சீர்மை கொண்டதாகவே கருதி ஆய்வுகள் செய்யப்படும். இவ் அடிப்படைக் கருதுகோள்களையும், அவற்றின் தேவைகளையும், அதன் விளைவாக ஆய்வுகளில் புகுத்தப்படும் தோராயத் தன்மைகளையும் நன்கு உணர்ந்திருப்பதே பொருள் வலிமையியலறிவின் வலுவான அடித்தளமாகும்.

2.7 அலகுகளும் கணங்களும் (Units and Dimensions)

அலகுகள், கணங்கள்பற்றிய அடிப்படைகளை இயற்பியல் (Physics) முதலான துறைகளில் கற்கிறோம். அதனால், இங்குச் சுருக்கமாகச் சில அலகுகளையும் அவற்றின் பயன்பாடுகளையும் நோக்குவோம். பொருள் வலிமையியலில் நாம் கருத வேண்டிய மூன்று அடிப்படை அளவீடுகள், விசை (Force), நீளம், காலம் என்பன. (இயற்பியலில் விசைக்குப் பதிலாகப் பொருண்மை (Mass) அடிப்படை அளவீடாக அறிமுகப் படுத்தப்பட்டிருக்கும்). இம் மூன்று அளவுகளுக்கும் தக்க அலகுகளை வரையறை செய்தபின் எளிதாய்ப் பயன்படுத்த இயலும்.

கடந்த காலத்தில் பல்வேறு நாடுகளிலும் பல்வேறு விதமான அலகு முறைகள் பயன்படுத்தப்பட்டு வந்தன. அவற்றுள் FPS (Foot, Pound, Second), CGS (Centimetre, Gram, Second), MKS (Metre, Kilogram, Second) முறைகள் சிலவாகும். அஃதாவது முறையே நீளம், பொருண்மை (அல்லது விசை) காலம் ஆகிய அளவுகளுக்குப் பயன்படுத்தும் அடிப்படை அலகுகளின் பெயராலேயே இவ் அலகு முறைகள் பயன்படுத்தப்பட்டு வந்தன. எடுத்துக்காட்டாக MKS முறையில் நீளத்தின் அடிப்படை அலகு 1 மீட்டர்; பொருண்மையின் அடிப்படை அலகு 1 கிலோ கிராம்; நேரத்தின் அடிப்படை அலகு 1 வினாடி.

ஆனால் தற்சமயம் உலகம் முழுதும் பொதுமையாகி வரும் Systems International (சுருக்கமாய் SI எனக் குறிக்கப்படும்) அலகுகளைப் பின்பற்ற நமது நாடும் முடிவு செய்து பல்வேறு துறைகளிலும் செயல்படுத்தி வருகிறது; இம் முறையில் சில முக்கிய அலகுகளை நோக்குவோம்.

நீளம் : நீளத்தின் அடிப்படை அலகு மீட்டர் ஆகும். ஆனால், பொருள் வலிமையியலில் இது பல சூழல்களில் பெரிய அலகாக அமைந்துவிடும். அதனால் மில்லி மீட்டரும் இடத்திற்கேற்பப் பயன்படுத்தப்படும்.

1 மீட்டர் = 1000 மி.மீ.

பொருண்மை : இதன் அடிப்படை அலகு கிலோகிராம்.

ஒரு கிலோகிராம் பொருண்மையுள்ள பொருள்மீது 1 மீ/வினாடி/வினாடி அளவு முடுக்கம் தோற்றுவிக்கத் தேவைப்படும் விசையே ஒரு நியூட்டன் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

விசை : விசையின் அடிப்படை அலகு நியூட்டன். (சுருக்கமாய் N எனக் குறிக்கப்படும்) பெருவிசைகளைக் குறிக்கக் கிலோ நியூட்டன் (kN அதாவது 1000N) என்னும் அலகு பயன்படுத் தப்படும்.

காலத்தின் அடிப்படை அலகு 1 வினாடி (Second)

இனிச் சில முக்கிய வழி அலகுகளை (Derived Units)யும் நோக்குவோம்.

வேலை அல்லது ஆற்றல் (Work or Energy)

ஒரு நியூட்டன் விசை 1 மீட்டர் தூரம் நகரும்போது செய்யப்படும் வேலையின் அளவு 1 மீட்டர் நியூட்டன் (m.N) ஆகும். சிறு அலகாக mm.N (மில்லிமீட்டர் நியூட்டன்) பயன்படுத் தப்படலாம். வேலை செய்யும் திறனே ஆற்றல். ஆதலின் வேலை, ஆற்றல் இரண்டும் ஒரே அலகால் குறிக்கப்படுகின்றன.

தகைவு (Stress)

அடிப்படை அலகு (SI முறையில்) 1 பாஸ்கல் (Pa எனக் குறிப்பிடப்படும்). ஒரு சதுர மீட் டர் பரப்பின் மீது 1N விசை செலுத்தப்பட்டால் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவு 1 பாஸ்கல் ஆகும். ஆனால் பொறியியல் பயன்பாட்டில் இது மிகச் சிறு அளவானதால் 1 சதுர மில்லிமீட்டர் பரப் பின்மீது 1N விசை (அதாவது $1N/mm^2$) என்பது பழக்க அலகாக இருந்துவருகிறது.

$$1N/mm^2 = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ MPa}$$

(MPa என்பது Mega Pascal என்பதன் சுருக்கம்).

சில சமயங்களில் மிகுதியான தகைவினைக் குறிக்க Giga Pascal-GPa என்னும் அலகும் பயன்படுத்தப்படும்.

$$1 \text{ GPa} = 1000 \text{ MPa}$$

ஆற்றல் வீதம் (Power)

வேலை செய்யப்படும் வீதத்தையே ஆற்றல் வீதம் அல்லது திறன் என்கிறோம். 1 வினாடி யில் செய்யப்படும் வேலையின் அளவு ஒரு மீட்டர் நியூட்டன் எனில் பயன்படுத்தப்படும் ஆற்றல் ஒருவாட் (Watt) ஆகும். இதுவும் பொறிஇயல் பயன்பாட்டில் சிறிய அலகே ஆதலால், பல சூழல்களில் கிலோவாட்டு (ஆயிரம் வாட்டு - kW) என்னும் அலகு பயன்படுத்தப்படும்.

விகலம் (Strain)

இது உண்மையில் ஒரு பின்னமே அஃதாவது பொருளின் மொத்த நீட்சி (அல்லது மொத்தக் குறுக்கம்), தொடக்க நீளத்தின் பின்னமாக உரைக்கப்படுவதே விகலம் எனக் கண் டோம். இது mm/mm அல்லது m/m என்பன போன்று நீள விகிதங்களால் உரைக்கப்படும்.

திருப்புமை (Moment)

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி (அச்சு)யிலிருந்து ஒருவிசைப் பாதையின் செங்குத்துத் தூரம், விசையின் அளவு இவை இரண்டின் பெருக்கல் தொகையே திருப்புமை என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதனால் திருப்புமையின் அலகு நியூட்டன் மீட்டர் (Nm) அல்லது கிலோ நியூட்டன் மீட்டர் (kNm) என்று பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மேற்குறிப்பிட்ட அலகுகளே பெரும்பாலும் பொருள் வலிமை இயலில் புழங்குகின்றன. அரிதில் புழங்கும் சில அலகுகளைப் பற்றி அவ்வப்போது காண்போம்.

இனி அலகுகளுக்கும் கணங்களுக்கும் உள்ள தொடர்பு, வேறுபாடு இரண்டனையும் சில எடுத்துக்காட்டுகளால் விளக்குவோம்.

முதலில் தகைவினை எடுத்துக்கொள்வோம். அடிப்படையில் இது விசையைப் பரப்பளவால் வகுக்கக் கிடைப்பதாகும்.

$$\text{அதாவது,} \quad \frac{\text{விசை}}{\text{பரப்பு}} = \frac{\text{விசை}}{\text{நீளம்} \times \text{நீளம்}} = \text{விசை} \times \text{நீளம்}^{-2}$$

என உரைத்து குறியீட்டு முறையில் $\frac{F}{L_2}$ அல்லது FL^{-2} எனக் குறிப்பிடலாம். $\frac{F}{L^2}$ * அல்லது FL^{-2} என்பதே தகைவின் அடிப்படைக் கூறாகும். இதனையே தகைவின் கணம் (Dimension) என அழைக்கின்றோம். இங்கு முக்கியமாய் நாம் கவனிக்க வேண்டிய கருத்து ஒருவழி அளவின் கணம் என்பது அது எவ்வடிப்படை அலகுகளைக்கொண்டு எவ்வாறு உரைக்கப்படுகிறது என்பதே ஆகும். மேலும், கணம் என்பது அலகிடும் முறைகளைச் சார்ந்து இருப்பதில்லை என்பதையும் நாம் நோக்கலாம்.

இவ்வாறே விகலத்தின் கணம் என்ன? என்பதைக் காணப்புகின் அது $\frac{L}{L}$ அஃதாவது கணம் இல்லாத அளவு (வெறும் விகிதமே) என்பதை நோக்குகிறோம். மீள்மைக் கெழு = தகைவு , விகலம் எனக் கண்டோம். விகலம் கணமில் (Non-dimensional) அளவாதலால் மீள்மைக் கெழுவின் கணமும் FL^{-2} தான்.

$$\text{ஆற்றல் வீதம்} = \frac{\text{வேலை}}{\text{நேரம்}} = \frac{\text{விசை} \times \text{தூரம்}}{\text{நேரம்}}$$

அதனால், ஆற்றலின் கணம் FLT^{-1} ஆகும்.

---

* விசைக்கு மாறாகப் பொருண்மை (Mass) அடிப்படை அலகாகக் கொள்ளப்படின் விசை = பொருண்மை X முடுக்கம் என்பதால் விசையின் கணம் $M.LT^{-2}$. ஆகவே தகைவின் கணம், $FL^{-2} = MLT^{-2}\,L^{-2} = ML^{-1}\,T^{-2}$ என வரும். பொருள் வலிமை இயலில் இஃது அவ்வளவு வசதியாய் இராது.

பல்வேறு அளவுகளுக்கும் SI அலகுகள், கணங்கள் ஆகியன பட்டியல் 2.3 இல் தரப் பட்டுள்ளன. தேவைப்படும்போது ஆங்கு நோக்குக.

2.8 குறியீடுகள், பயன்பாடுகள் (Symbols and Usages)

இந் நூலின் முதலிரு அத்தியாயங்களிலும் சிற்சில குறியீடுகளும் அளவீடுகளும் புழங்கப்பட்டுள்ளன. சில கருத்து விளக்கங்களைத் தருமுன் வரையறைகள் எளிதில் செய்ய இயலாதென்பதால் இதுவரை அவை தவிர்க்கப்பட்டன. ஆனால், இனிவரும் நூற்பகுதிகளில் வரும் குறியீடுகளும் அவை பயன்படுத்தப்படும் பாங்கும் இங்குத் தெளிவாக்குதல் அவசியம்.

1. அளவீடுகள், அலகுகள் முதலியன தமிழிலும், தேவையான இடங்களில் (அடைப்புக் குறிகளுள்) ஆங்கிலத்திலும் தரப்படும்; ஆனால் குறியீடுகள் (symbols) தற்போது பழக்கத்தில் உள்ள ஆங்கில/கிரேக்க எழுத்துகளைமட்டுமே பயன்படுத்திக் கூறப்படும்.

எ.கா.

ஆரத்தகைவு (Radial Stress) என உரைநடையில் வரும்; ஆனால், குறியீடாக σ_r மட்டுமே பயன்படுத்தப்படும்.

2. சமன்பாடுகளை விளக்கமாக உரைக்கும்போது தமிழிலும் அவற்றின் கணக்கீடுகள் குறியீடுகளாலுமே உரைக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாய்

செய்யப்படும் வேலை = விசை × விசை அதன் திசையில் நகர்ந்த தூரம்

= 75 N x 1.4 m

= 105 m.N

(தமிழில் குறியீடுகளைத் தரமுடியாது என்பதன்று, ஆனால், தமிழ் வழிப் பொறியியல் அறிவைத் தெளிவுறப் பெற்றவர் ஆங்கில மொழியறிவினை மட்டுமே துணைகொண்டு ஆங்கில நூல்கள், தாளிகைகளில் காணப்பெறும் செய்திகளையும் கட்டுரைகளையும் கற்றறிய இம்முறை தேவைப்படுகிறது)

நூலில் பயன்படுத்தப்படும் பல்வேறு குறியீடுகளும் நூலின் தொடக்கத்திலேயே (குறியீட்டு விளக்கம், பட்டியல் 2.2) தெளிவுறுத்தப்படுவதால் தேவைப்படும் சமயங்களில் ஆங்கு நோக்குக.

2.9 பயன்பாட்டு விளக்கங்கள்

பட்டியல்கள் 2.2, 2.3 ஆகியவற்றில் தரப்பட்டுள்ள அலகுகள், காரணிகள் ஆகியவற்றின் நடைமுறைப்பயன், சில எடுத்துக்காட்டுகளின் துணையோடு கீழே விளக்கப்படுகிறது.

பட்டியல் 2.2 இல் SI முறைகளில் அடிப்படை அலகுகள் (Standard Units) தரப் பட்டுள்ளன. ஆனால் நடைமுறையில் பயன்படுத்தும்போது இவை மிகச்சிறு அளவுகளாகவோ,

மிகப் பெரும் அளவுகளாகவோ இருப்பின், கணக்கீடுகளின் எளிமையை முன்னிட்டுச் சில அடைகளைப் பயன்படுத்தி, வேறு பெரும் (அல்லது சிறு) அலகுகளாக மாற்றிக் கொள்ளப் பட்டியல் 2.3 பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. அதிர்வு நேரம் = 0.0000472 வினாடிகள் எனில், அதனை 47.2×10^{-6} வினாடிகள் அல்லது 47.2 மைக்ரோ வினாடிகள் என உரைத்து 47..2 μs எனக் குறிப்பிடலாம்.

2. ஒரு கம்பியின் நீட்சி = 0.000755 மீட்டர் எனில், அதனை 0.755×10^{-3} மீட்டர் அல்லது 0.755 மில்லிமீட்டர் (0.755 mm) எனலாம்.

3. 0.006 மீட்டர் பக்கமுடைய சதுரத்தின் பரப்பு = 0.000036 சதுர மீட்டர்கள் (m^2) இதற்கு மாறாக 36 சதுர மில்லி மீட்டர்கள் (36 mm^2) என்னும் அலகு எளிதாய்ப் பயன் படுத்தப்படுகிறது.

4. 36 mm^2 பரப்பின்மீது 720 நியூட்டன் விசை செலுத்தப்படுவதாகக் கொள்வோம். அடிப்படை அலகுகளில்,

தகைவு = $\frac{720 \text{ நியூட்டன்}}{0.000036}$ சதுர மீட்டர்

= 20000000 நியூட்டன் / சதுர மீட்டர்.

அஃதாவது = 20×10^{6} (பாஸ்கல் (Pa))

= 20 MPa (மெகா பாஸ்கல்)

இவ்வாறே பல எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் காரணி அடைகள் எவ்வாறு எளிமையான எண்களால் அளவீடுகளை உரைக்கவும், கணக்கீடுகளைச் செய்யவும் உதவுகின்றன? என்பதைக் காணலாம். எந்தக் காரணி அடைகளைப் பயன்படுத்துதல் வசதியானது என்பதைப்பற்றிக் குறிப்பிடுமிடத்து, நாம் பயன்படுத்தும் காரணி அடைகள், தேவையான அளவுகளை 0.1க்குக் குறையாத அல்லது 1000ஐத் தாண்டாத எண்களால் உரைக்கும் தன்மையில் அமையுமாறு பயன்படுத்துகின்றனர். இனிவரும் பகுதிகளில் நாமும் அவற்றைப் பயன்படுத்துவோம். ஐயங்கள் தோன்றுங்கால் அவ்வப்போது பட்டியல்கள் 2.2, 2.3 ஆகியவற்றை நோக்குக.

பட்டியல் 2.1 சில முக்கியப் பொருள்களின் வலிமைப் பண்புகள்

பொருள்	மீள்மைக்கெழு E கிலோ நியூட்டன்/மி.மீ.^{2} (GPa)	பாய்சான் விகிதம் V	நெகிழ்ச்சி எல்லை σ_y நியூட்டன்/மி.மீ (MPa)	உச்ச வலிமை σ_u (MPa)	வெப்ப நீட்சிக் கெழு $\alpha \times 10^{6}$ m/m/^{0}C
வார்ப்பு இரும்பு	105	0.20	42	140	10.8
தேனிரும்பு	190	0.35	210	350	12.0
மென் உருக்கு	210	0.25	420	560	12.0
நிக்கல் உருக்கு	210	0.30	–	–	–
அலுமினியம்	70	0.25	140	210	24.0
அலுமினியம் (வார்ப்பு)	70	0.25	63	91	24.0
தாமிரம்	120	0.43	266	385	18.0
தாமிரம் (வார்ப்பு)	90	0.10	56	210	18.0
பித்தளை	98	0.40	175	420	19.0
வெண்கலம்	84	–	140	230	18.0

பட்டியல் 2.2 சில முக்கிய அளவுகளின் அலகுகள், குறியீடுகள், கணங்கள்
(Units. Symbols and Dimensions of some important Quantities)

அளவு (Quantity) (1)	குறியீடு (Symbol) (2)	அலகை (Dimension) (3)	அலகு (4)	குறியீடு (5)
நீளம் (Length)	L	L	மீட்டர்	m
நேரம் (Time)	T	T	வினாடி	s
விசை (Force)	P, F, R	F	நியூட்டன்	N
பொருண்மை (Mass)	M	$FL^{-1}T^{2}$	கிலோகிராம்	Kg
பரப்பளவு (Area)	A	L^{2}	சதுர மீட்டர்	m^{2}
கனஅளவு (Volume)	V	L^{3}	கனமீட்டர்	m^{3}
அடர்த்தி (Density)	ρ	FL^{-3}	கிலோகிராம்/கனமீட்டர்	Kg/m^{3}
அலகெடை (Unit Weight)	γ_w	FL^{-3}	நியூட்டன்/கன மீட்டர்	N/m^{3}
கதி (Velocity)		LT^{-1}	மீட்டர்/வினாடி	m/s
முடுக்கம் (Acceleration)	a	LT^{-2}	மீட்டர்/வினாடி/வினாடி அல்லது மீட்டர்/வினாடி	m/s^{2}
அழுத்தம் (Pressure) (Pressure)	p	FL^{-2}	பாஸ்கல் அல்லது (Pascal) நியூட்டன்/சமீ	Pa or N/m^{2}

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
குத்துத்தகைவு (Normal Stress)	σ	FL^{-2}	பாஸ்கல் அல்லது (Pascal) நியூட்டன்/ச.மீ.	Pa or N/m^2
நறுக்குத் தகைவு (Shear Stress)	T	FL^{-2}	பாஸ்கல் அல்லது	Pa or N/m^2
மீள்மைக் கெழு (Elastic Modulus)	E (G, K)	FL^{-2}	"	Pa or N/m^2
விகலம் (Strain)	ε	இல்லை	"	m/m அல்லது mm/mm
வளைதிருப்புமை (Bending Moment)	M	FL	நியூட்டன் மீட்டர்	N.m.
முறுக்குத்திருப்புமை (Torque)	T	"	"	"
அதிர்வெண் (Frequency)	f	T^{-1}	அலைவுகள் /வினாடி	Hz
வேலை (Work)	W	FL	ஜுல் (Joule)	J
ஆற்றல் (Energy)	U	FL	ஜுல் (Joule)	J
திறன் (Power)	P	FLT^{-1}	வாட் (Watt)	W
வெப்பநிலை (Temperature)	T		° செல்சியஸ் அல்லது கெல்வின் (Kelvin)	°C °K

பட்டியல் 2.3 பெருக்கற் காரணிகள்

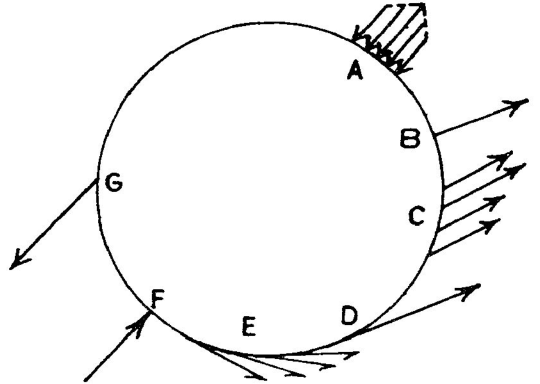
காரணி (Factor)		அடை (Prefix)	குறியீடு (Symbol)
10^{18}	எக்சா	(exa)	E
10^{15}	பெட்டா	(Peta)	τ
10^{12}	டெரா	(Tera)	T
10^{9}	ஜிகா	(Giga)	G
10^{6}	மெகா	(Mega)	M
10^{3}	கிலோ	(Kilo)	k
100	ஹெக்டா	(Hecta)	h
10	டெக்கா	(Deka)	da
.1	டெசி	(Deci)	d
.01	செண்டி	(Centi)	c
.001	மில்லி	(Milli)	m
10^{-6}	மைக்ரோ	(Micro)	μ
10^{-9}	நானோ	(Nano)	n
10^{-12}	பைக்கோ	(Pico)	P
10^{-15}	ஃ பெம்டோ	(Femto)	F
10^{-18}	ஆட்டோ	(auto)	a

3. அச்சு விசைகள்
(Axial Forces)

3.1 விசைகளின் வகைகள்

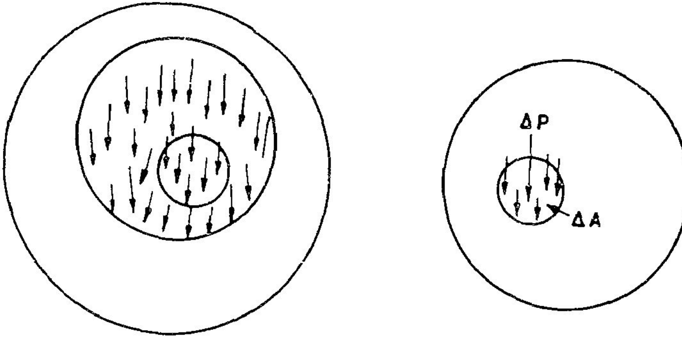
விசை என்றால் என்ன? விசையியலில் (Mechanics) நியூட்டனின் இயக்க விதிகளின் அடிப்படையில் தெளிவாக வரையறுக்கப்படுகிறது. இவ்வரையறுப்பில் விசை செலுத்தப்படும் பொருளைத் துகளாகவோ (Particle) தளரா திண்மமாகவோ (Rigid Solid) கருதுகிறோம். ஆனால், தளர் திண்மம் (Deformable Solid) ஒன்றன்மீது விசை செலுத்தப்படும்போது தோன்றும் உருமாற்றங்களை ஆய்தற்கு விசை செலுத்தப்படும் விதத்தையும் அறிதல் அவசியம். விசை செலுத்தப்படும் விதங்களில் சில படங்கள் 3.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

இப் படத்தில் திண்மத்தின் மேற்பரப்பின் மீது பல்வேறிடங்களில் வெவ்வேறு விதமாக விசைகள் செலுத்தப்படுதல் காட்டப்பட்டுள்ளது. B, D, F, G ஆகிய விசைகள் ஒரு புள்ளியின்மீது (அல்லது குறுகிய பரப்பின்மீது) செலுத்தப்படுகின்றன. இவற்றைக் குவிப்பு விசைகள் (Concentrated Forces) என அழைக்கின்றோம். விசைகள், A, C, E என்பன குறிப்பிட்டதொரு பரப்பின் மீது (Finite Area of Surface) செயல்படும் விசைகள். இவை பரவல் விசைகள் (Distributed Forces) என அழைக்கப்படுகின்றன. பரவல் விசைகளில் C, E இரண்டும் செலுத்தப்படும் பரப்பின் மீது சீராகப் பரவியுள்ளன. இவற்றைச் சீர்பரவல் விசைகள் (Uniformly distributed Forces) எனலாம். மாறாக, விசை A அது செலுத்தப்படும் பரப்பின் வெவ்வேறு பகுதிகளில் வெவ்வேறு அளவில் செலுத்தப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம்.



படம் 3.1

இவ்வாறு சீரற்ற வகையில் செலுத்தப்படும் விசைகளின் பரவல் தன்மையை வரையறுக்க, ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு அதனைச் சூழ்ந்துள்ள மிகச் சிறுபரப்பின் (Infinitesimally small area) மீது செலுத்தப்படும் மொத்த விசை (Δ P) யை அது செயல்படும் பரப்பால் (Δ A) வகுத்து, விசைச்செறிவினை (Intensity of force) $\frac{\Delta P}{\Delta A}$ என்னும் விகிதமாக வரையறுக்கலாம். விசைச்செறிவு கணக்கிடப்படும் தன்மையைப் படம் 3.2 காட்டுகிறது.



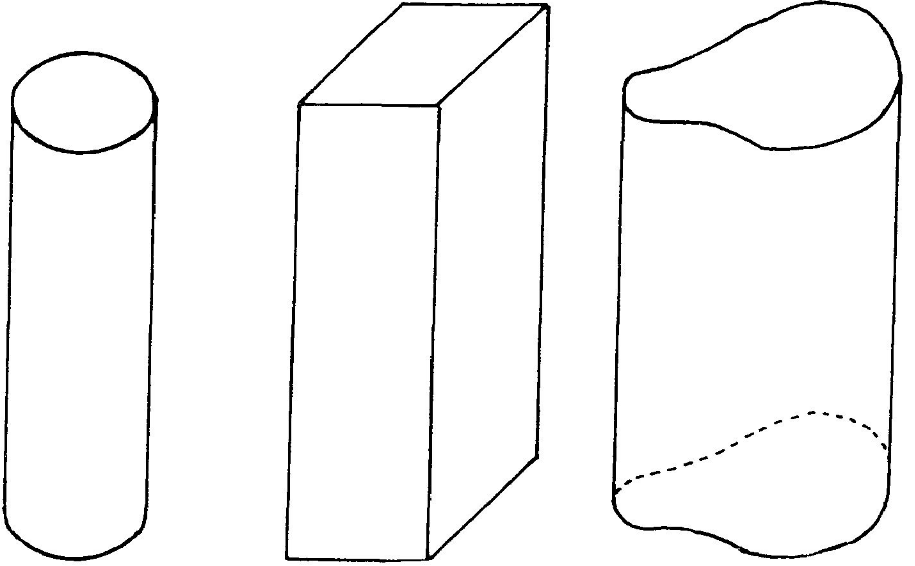
ΔP என்பது ΔA அளவு பரப்பின் மீது செயல்படும் விசைகளின் தொகுப்பு

படம் 3.2

படம் 3.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விசைகளை வேறு விதங்களிலும் வகுக்கலாம். விசைகள் A, B, F ஆகிய திண்மத்தின் பரப்பிற்குச் செங்குத்தான திசையில் செலுத்தப்படுகின்றன; இவற்றைக் குத்துவிசைகள் (Normal Forces) எனலாம். விசைகள் D, E இரண்டும் அவை செலுத்தப்படும் பரப்புகளின் தொடுகோட்டின் திசைகளில் செயல்படுவன; இவற்றைத் தொடுவிசைகள் (Tangential Forces) எனலாம். இவற்றின் செயல்பாடு திண்மத்தைச் செதுக்கும் தன்மையதாய் இருப்பதால் இவற்றை செதுக்கு அல்லது நறுக்குவிசைகள் (Shear Forces) என அழைக்கிறோம். விசைகள் C, G இரண்டும் குத்துதிசைக்கும், தொடுதிசைக்கும் இடைப்பட்டதொரு திசையில் செயல்படுவன; இவ்விசைகளைக் குத்துதிசை, தொடுதிசைகளில் செயல்படும் இரண்டு விசைகளின் கூட்டாகக் கருத முடியுமாதலால் இவற்றுக்குத் தனியான வகைப்பாடு (Classification) தேவையில்லை.

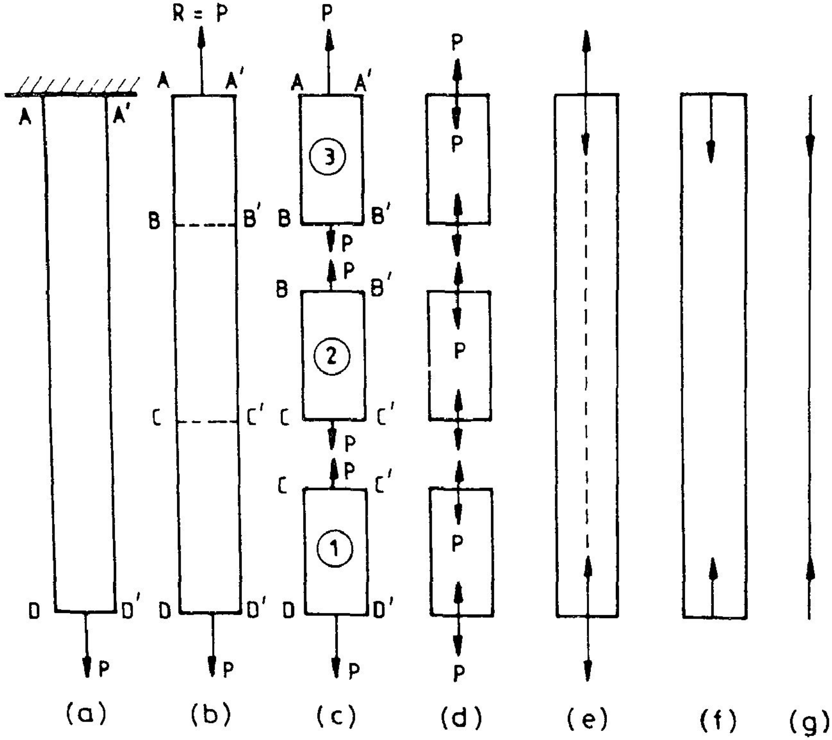
இனிக் குத்துவிசைகளில் இருவகைகளைக் காண்போம். விசைகள் A, F இரண்டும் திண்மத்தை அமுக்க முற்படுவன ; இவற்றை **அமுக்க விசைகள்** அல்லது **இறுக்க விசைகள்** (Compressive Forces) எனலாம். விசை B, திண்மத்தை இழுக்க முற்படுகிறது; இதனை இழுவிசை (Tensile Force/Tension) என அழைக்கின்றோம்.

படம் 3.1 இல் காட்டப் பட்டுள்ளவாறு வடிவ முள்ள திண்மத்தின்மீது செயல்படும் விசைகளின் விளைவுகளை ஆய்தல் எளிதன்று. அதனால், தொடக்கத்தில் சில எளிய வடிவங்களை ஆய்வதே பொருத்தமாகும். எளிய வடிவங்களில் சிக்கலில்லாத ஒன்று சீர்கம்பி (Prismatic bar); தனது நீளம் முழுவ திலும் சீரான குறுக்குப் பரப்பைக் கொண்டதொரு திண்மத்தையே **சீர்கம்பி** எனக் குறிப்பிடுகிறோம். படம் 3.3 இல் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காணலாம்.



படம் 3.3 சீர் கம்பிகள்

இத்தகு சீர்கம்பிகளின் மீது செலுத்தப்படும் விசைகளின் விளைவுகளை ஆயும்போது சில துணிபுகளை மேற்கொள்கிறோம். முதலாவதாக இக்கம்பிகள் குறுக்குப் பரப்பின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டை இவற்றின் **அச்சு (Axis)** எனக் கொள்கிறோம். இத்திசையில் செலுத் தப்படும் விசைகளை **அச்சு விசைகள் (Axial Forces)** எனலாம். அச்சுவிசைகள் அவை செலுத் தப்படும் பரப்பின் குறுக்குத் திசையிலேயே செயல்படுகின்றனவாதலால் இவை இழுவிசை யாகவோ, இறுக்க விசையாகவோ மட்டுமே இருக்க முடியும். இத்தகு விசைகளின் செயல் பாட்டுப் படங்கள் 3.4 இல் விளக்கமாய்க் காட்டப்பட்டுள்ளன.

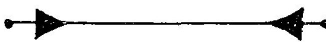


படம் 3.4 சீர்கம்பி மீதுள்ள குத்து விசைகள்

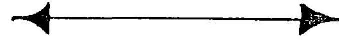
படம் 3.4 இல் காட்டப்பட்டுள்ள கம்பி A A′ என்ற முனையில் தாங்கப்படுகிறது; D D′ என்ற முனையில் அதன்மீது இழுவிசை P செலுத்தப்படுகிறது. கம்பி சமனிலையில் (Equilibrium) இருப்பதால் A A′ என்ற முனையில் P அளவுள்ள R என்னும் விசை எதிர்திசையில் செலுத்தப்பட வேண்டும். இதனைத் தாங்கி எதிர்வினை (Support Reaction) என அழைக்கின்றோம். தாங்கி வினையைக் கம்பியின் மறுமுனையில் செலுத்தப்படும் மற்றொரு புறவிசையாகக் குறிப்பிட்டுவிட்டுத் தாங்கியைப் படத்திற்காட்டாது விடலாம். படம் 3.4 இல் காட்டப்பட்டுள்ள P, R இரண்டும் கம்பியின் மீது செயல்படும் புறவிசைகள் ; இவ்விசைகள் கம்பியைச் சமனிலையில் இருத்துகின்றன. D D′ என்ற முனையில் செலுத்தப்படும் விசை A A′ என்ற முனையில் செலுத்தப்படுவதற்கு ஊடகமாகக் கம்பி பயன்படுகிறது. இவ்வூடகத்தை ஒரேயொரு திண்மமாகவே கருத வேண்டுவதில்லை. பல நூற்றுக்கணக்கான சிறுதிண்ம ஊடகங்களின் பிணைப்பாகவும் கருதலாம். விளக்கத்தின் எளிமைக்காக படம் 3.4 இல் கம்பி, மூன்று பகுதிகளாகப் பிரித்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஊடகம் 1 இன்மீது செலுத்தப்படும் விசை ஊடகம் 2 இன் வழியாய் ஊடகம் 3க்கும், ஊடகம் 3 இன் வழியாய் தாங்கிக்கும் செலுத்தப்படுகிறது. மற்றொரு வகையில் சொல்லப்புகின் ஊடகம் 1க்கு ஊடகம் 2

தாங்கியாகவும், ஊடகம் 2க்கு ஊடகம் 3 தாங்கியாகவும் செயல்படுகின்றன எனலாம். அதாவது ஊடகம் 1, C C′ என்னும் முனையில் தாங்கப்படுகிறது. இதனால், C C′ என்னும் பரப்பில் ஊடகம் 1, ஊடகம் 2 ஐக் கீழ்நோக்கி இழுக்க, ஊடகம் 2, ஊடகம் 1 ஐ மேல்நோக்கி இழுக்கிறது. சமனிலை விதிகளின்படி இவ் இருவிசைகளின் அளவும் P என்பது தெளிவு. கம்பியை எத்தனைச் சிறு பகுதிகளாகப் பிரித்தாலும் ஒவ்வொரு பகுதியின் இருமுனைகளிலும் செயல்படும் இழுவிசைகளின் அளவும் P ஆகத்தான் இருக்க வேண்டும் என்பதில் ஐயமில்லை.

இனி ஒரேயொரு சிறுபகுதியின் (எ.கா. பகுதி 2) சமனிலையை நோக்குவோம். இப்பகுதியின் B B′ என்ற தளத்தில் இழுவிசை (மேல் நோக்கி) P யும் C C′ என்ற தளத்தில் இழுவிசை (கீழ்நோக்கி) Pயும் புறவிசைகளாய்ச் செயல்படுகின்றன. இவ்வூடகத்தின் ஒவ்வொரு சிறுபகுதியும் சமனிலையில் இருத்தலும் அவசியம். C C′ என்னும் தளத்தின் இருபுறங்களிலும் சம அளவாக இழுவிசைகள் செலுத்தப்பட வேண்டும். அஃதாவது புறவிசைக்கு ஊடகத்தின் உள்ளிருந்து எதிர்வினை புறவிசையின் அளவிற்குச் சமமாகச் செலுத்தப்பட வேண்டும். இவ்வகவிசைகள் (Internal Forces) படம் 3.4-d இல் ஒவ்வொரு ஊடகத்திற்கும் தனித்தனியே காட்டப்பட்டுள்ளன. A A′, D D′ ஆகிய இருமுனைகளுக்கும் இடையே வேறு புறவிசைகள் ஏதும் செலுத்தப்படாதவரை இருமுனைகளிலும் உள்விசைகளைக் காட்டலே (படம் 3.4-e) போதுமானது. மேலும், உள்விசைகள் மட்டுமே காட்டப்பட்டாலும் (படம் 3.4-f) புறவிசைகளும் செயல்படுகின்றன என்பதும் அவசியமாதலின் ஓர் ஊடகத்தின் அச்சு விசைகளைச் சுட்ட உள்விசைகளைக் குறிப்பிடலே போதுமானதாகும். அடுத்து இவ் உள்விசைகளை ஊடகத்தின் அச்சில் மட்டுமே காட்டுதல் (படம் 3.4-g) மரபாய் இருந்து வருகிறது. இம்மரபின்படி அச்சுவிசைகளைப் படம் 3.5 காட்டுகிறது.



(a) இழுவிசை



(b) இறுக்கவிசை

படம் 3.5 அச்சு விசைகள்

மேலும் தொடக்க நிலை ஆய்வில் அச்சு விசைகள், செயல்படும் பரப்பின் மீது சமச்சீரான அளவில் செலுத்தப்படுகின்றன என்பதொரு துணிபினையும் மேற்கொள்கிறோம். அஃதாவது,

$$\text{அச்சுத் தகைவு (Axial Stress)} = \frac{\text{அச்சுவிசை}}{\text{குறுக்குப் பரப்பளவு}}$$

$$\sigma_a = P_a / A$$

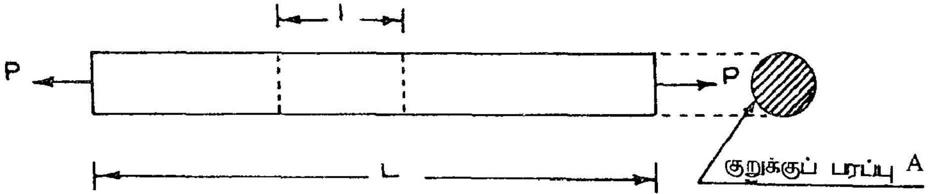
எனக் கணக்கிடுவோம். *

(இக் கருதுகோள் முற்றிலும் உண்மையன்று என்பதையும், அதன் விளைவுகளையும் பின்னர் விரிவாய்க் காண்போம்).

இவற்றுள் இழுவிசையை நேர்மறையாகவும் (Positive), இறுக்கவிசையை எதிர் மறையாகவும் (Negative) கொள்ளுதல் மரபு. அதனையொட்டி இழுதகைவு (Tensile stress) நேர்மறையாகவும், இறுக்கத் தகைவு (Compressive stress) எதிர்மறையாகவும் கொள்ளப்படுகின்றன.

3.2 அச்சு விகலங்களும், வடிவ மாற்றங்களும்

அச்சு விசைகளால் தோன்றும் வடிவ மாற்றங்கள் குறித்து இப்பிரிவில் ஆய்வோம். நீளம் L, குறுக்குப் பரப்பளவு A கொண்ட ஒரு கம்பியின் மீது அச்சுவிசை P செலுத்தப்படுவதாய்க் கொள்வோம்.



படம் 3.6.

இழுத்தகைவு ** $$\sigma_x = \frac{\text{இழுவிசை}}{\text{குறுக்குப் பரப்பு}} = P / A$$

நீட்சி விகலம் $$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{AE}$$

---

* இங்கு ஒருவேறுபாட்டைக் கருத்திற்கொள்ளல் அவசியம். ஒருபரப்பின் மீது செலுத்தப்படும் விசைச்செறிவு 'அழுத்தம் (Pressure)' அல்லது 'இழுப்பு (Traction)' என்றே வழங்கப்படுகிறது. தகைவு என்பது இவற்றுக்கு எதிர்வினையாய்ச் செயல்படும் உள்விசைகளின் செறிவாகும்.

** கணக்கீடுகளின் தேவைகளையொட்டி, அச்சுத் திசையை x என்னும் குறியீட்டால் வழங்க முற்படுகிறோம். சிலர் அச்சுத் திசையை Z திசை எனக் குறிப்பிடுதலும் உண்டு.

(ε_x என்பது ஓர் அலகு நீளமுள்ள கம்பிப் பகுதியின் நீட்சி என வரையறையிற் கண்டோம்).

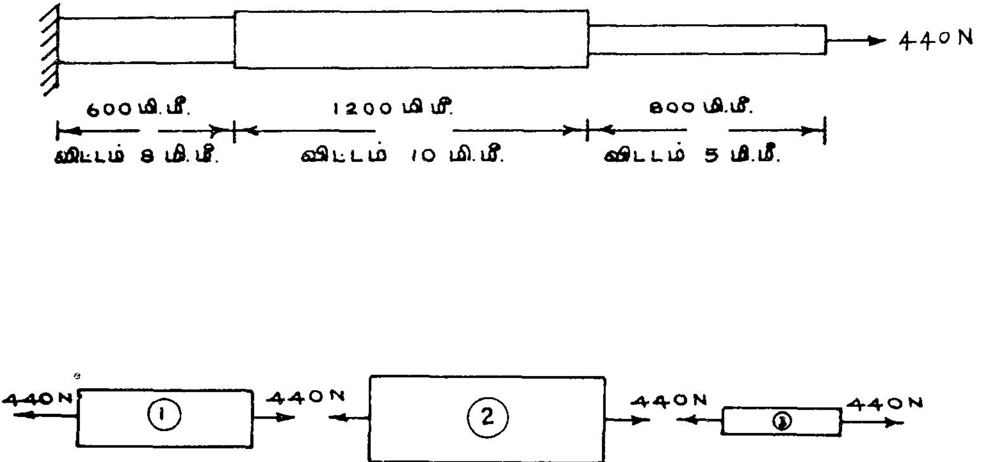
ஆகையால் கம்பியின் மொத்த நீட்சி, $\delta_x = L \cdot \varepsilon_x = \frac{P.L}{AE}$

சுருக்கமாக, $$\delta_x = \frac{P.L}{AE} \qquad 3.1$$

சமன்பாடு (3.1) பலவிதமான ஆய்வுகளில் பயன்படுகிறது. இச்சமன்பாட்டை இறுக்க விசைக்குப் பயன்படுத்தும்போது விசையின் அளவை – P எனக் குறிக்க δ_x எதிர்மறையாக வரும்; அப்போது கம்பியின் குறுக்கத்தைக் குறிப்பிடும். சமன்பாடு 3.1-இன் பயனை விளக்கும் எடுத்துக் காட்டுகள் சிலவற்றைக் காண்போம்.

எ.கா. 3. 1

படம் 3.7இல் காட்டப்பட்டுள்ள திண்மத்தின் நீள்மைக்குணகம் 120 GPa எனக் கொண்டு மொத்த நீட்சியைக் கணக்கிடுவோம்.



படம் 3.7

தீர்வு :

முதலில் கொடுக்கப்பட்ட திண்மத்தின் 3 எளிய பகுதிகளைப் பிரித்து, அவற்றின்மீது செயல்படும் விசைகளைக் குறிப்போம். (படம் 3.7.2). மொத்த நீட்சி δ எனவும், தனிப்பகுதிகளின் நீட்சிகள் δ_1 , δ_2 , δ_3 எனவும் கொண்டு சமன்பாடு 3.1 ஐப் பின்வருமாறு பயன்படுத்துவோம்.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

$$= \frac{P_1 L_1}{A_1 E_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3 E_3}$$

$$= \frac{440 \times 600}{\frac{\pi}{4} \times 8^2 \times 12 \times 10^3} + \frac{440 \times 1200}{\frac{\pi}{4} \times 10^2 \times 12 \times 10^3}$$

$$+ \frac{440 \times 800}{\frac{\pi}{4} \times 5^2 \times 12 \times 10^3}$$

$$= \frac{440}{\frac{\pi}{4} \times 12 \times 10^3} \left(\frac{600}{8^2} + \frac{1200}{10^2} + \frac{800}{5^2} \right)$$

$$= 24.92 \text{ mm}$$

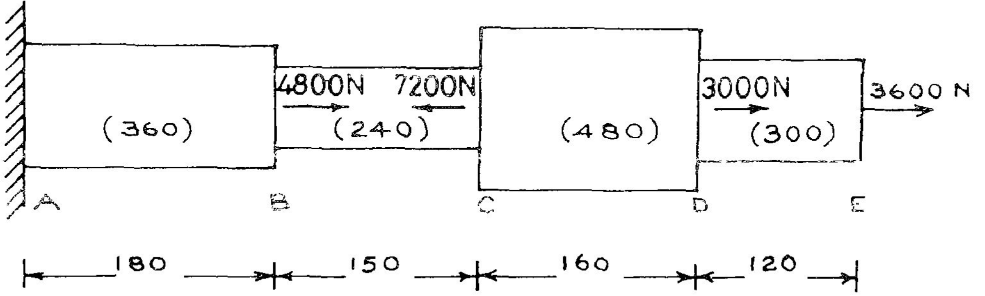
எ.கா. 3.2

படம் 3.8 இல் காட்டப்பட்டுள்ள திண்மத்தின் மொத்த நீட்சியைக் கணக்கிடுக ($E = 2 \times 10^5$ MPa).

தீர்வு :

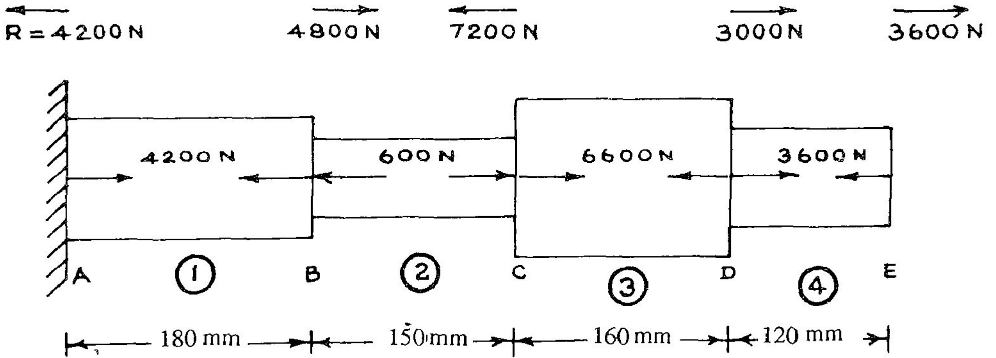
முதலாம் எடுத்துக்காட்டினைப் போலன்றி இதில் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் அகவிசைகளை நேரடியாய்ப் பெற முடியாது. சமனிலையைப் பயன்படுத்தியே இவை முதலில் கணக்கிடப்படும்; உரிய முறையைக் கீழேயுள்ள படத்திற் காணலாம்.

படத்தில் புறவிசைகள், செலுத்தப்படும் புள்ளிகளுக்கு (B, C, D, E) நேரே தனியே தரப்பட்டுள்ளன. A என்ற முனையில் தாங்கி எதிர்வினையைச் சமனிலை (Equilibrium) யைப் பயன்படுத்திக் காண முடியும்; அது A என்னும் முனையில் (4200 N) குறிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு முனையின் சமனிலையையும் கொண்டு அக விசைகளை எளிதிற் காணலாம். இங்கு நாம் ஏற்கனவே கற்ற இரண்டு முக்கிய அம்சங்களைப் பயன்படுத்த வேண்டும். அஃதாவது,



படம் 3.8

(நீளங்கள் மி.மீ.லும், குறுக்குப் பரப்புகள் சதுர மில்லி மீ.இலும் அடைப்புக் குறிக்குள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன).



படம் 3.9

1. ஒவ்வொரு முனையிலும் (அல்லது இணைப்பிலும்) அகவிசைகளின் மொத்தம் அங்குச் செலுத்தப்படும் புறவிசைக்கு அளவில் சமமாகவும் திசையில் எதிராகவும் இருக்க வேண்டும்.

2. இடையே புறவிசைகளுக்குட்படாத எந்தவொரு பகுதி (உறுப்பு)யின் இருமுனைகளிலும் அகவிசைகள் அளவில் சமமாகவும், திசையில் எதிராகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

இவற்றைப் பயன்படுத்தும் விதத்தைச் சற்று விளக்கமாகக் காண்போம். (X′ திசையினை இடமிருந்து வலமாக நேர்மறையாய்க் கொள்வோம்)

உறுப்பு 1 இல் இடப்புற முனை A யில் புறவிசை 4200 N, – x திசையில் செலுத்தப்படுகிறது. அதனால் அகவிசை + x திசையில் 4200 N; மறுமுனையில் (B) அகவிசை – x திசையில் 4200 N; படத்தில் உறுப்பின் உள்ளே இவை குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

அடுத்து, இணைப்பு B இன் சமனிலையைக் கருதுவோம். இங்குப் புறவிசை + x திசையில் 4800 N உறுப்பு 1 இல் அகவிசை – x திசையில் 4200 N; ஆகையால் உறுப்பு 2 இல் இம்முனையில் (B) அகவிசை – x திசையில் 600 N இருந்தால்தான் இணைப்பு B சமனிலையில் இருக்கும். இவ்வொரு ஒவ்வொரு இணைப்பாய் ஆய்ந்து, அனைத்து உறுப்புகளிலும் அகவிசைகளைக் கணக்கிட முடியும். இவையாவும் படம் 3.9 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. அகவிசைகளின் திசைகளைக் கொண்டு அவை இழுவிசைகளா இறுக்க விசைகளா என்பதையும் எளிதிற் காணலாம்.

இப்போது,

$$\delta = \frac{P_1 L_1}{A_1 E_1} + \; \ldots$$

$$= \frac{4200 \times 180}{360 \times 2 \times 10^5} + \frac{(-600) \times 150}{240 \times 2 \times 10^5}$$

$$+ \frac{6600 \times 160}{480 \times 2 \times 10^5} + \frac{3600 \times 120}{300 \times 2 \times 10^5}$$

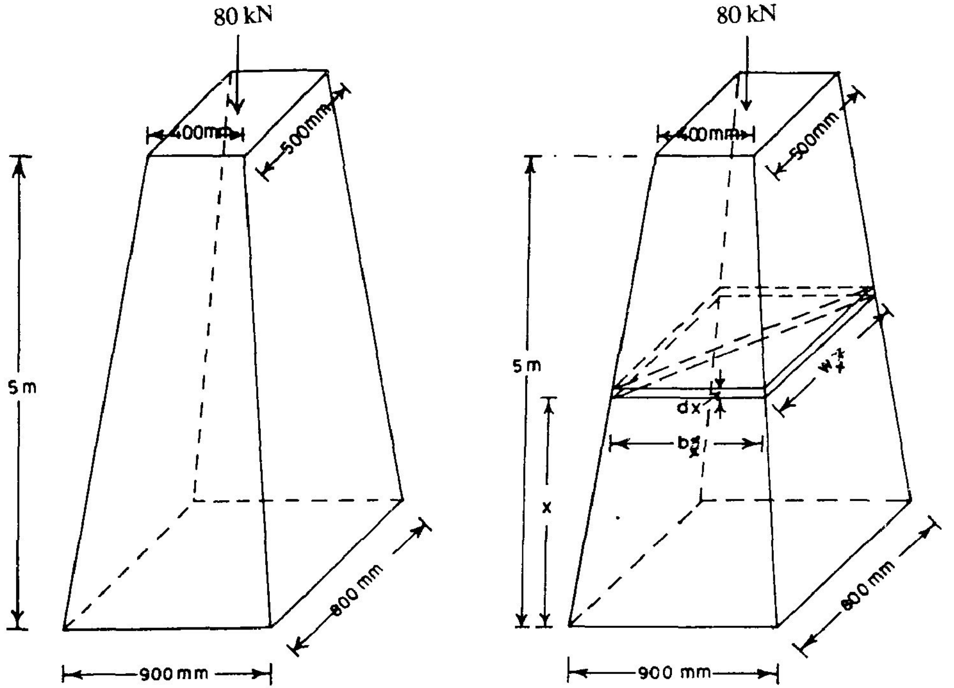
$$= 0.0268 \text{ mm.}$$

எ.கா. 3.3.

படம் 3.10 இல் காட்டப்பட்டுள்ள கற்காரைத் தூணில் மொத்தக் குறுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. கற்காரையின் நீள்மைக் குணகம் E = 10 GPa எனவும், தன்னெடை கன மீட்டருக்கு 24 கிலோ நியூட்டன் (24 kN/m^3) எனவும் கொள்க.

தீர்வு :

முந்தைய இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளையும் விட இது சற்றுக் கடினமானது. முதலாவதாய், அச்சுத் திசையில் குறுக்குப் பரப்பு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் மாறிக் கொண்டேயிருக்கிறது ; இரண்டாவதாய், ஒவ்வொரு குறுக்குப் பரப்பின் மீது செலுத்தப்படும்



படம் 3.10

விசையும் மாறிக்கொண்டே இருக்கிறது (அஃதாவது அப்பரப்பிற்கு மேலேயுள்ள தூண்பொருளின் எடை, உச்சியில் செலுத்தப்படும் புறவிசை இரண்டின் கூட்டலே). அதனால் இங்கு தீர்வு காணக் கலன கணிதத்தின் (Calculus) துணை தேவை.

பீடத்திலிருந்து x mm உயரத்தில் உள்ள ஒரு மெல்லிய, தடிப்பு dx கொண்ட, அடுக்கினை நோக்குவோம். dx என்பது மிகச் சிறு நீளமாதலால் இங்கு அடுக்கின் குறுக்குப் பரப்பு சீராய் இருப்பதாய்க் கருதலாம்.

அடுக்கின் குறுக்களவுகளை

$b_x \quad = \quad (900 - 0.1\,x)$

$w_x \quad = \quad (800 - 0.06\,x)$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

இவ் வடுக்கின் பரப்பளவு, A $= \quad b_x\, w_x = \quad (900 - 0.1\,x)\ (800 - .06\,x)$

இவ் வடுக்கின் கன அளவு, dV $= \quad (72 \times 10^4 - 134 \times 0.006\,x^2)\,dx$

இவ் அடுக்கிற்கு மேலேயுள்ள துண்டுப்பொருளின் கன அளவு

$$\int_x^{5000} dv = \int_x^{5000} (720000 - .134\, y + .006\, y^2)\, dy \ ^*$$

$$= \Big[(720000)\, y - .067\, y^2 + .002\, y^3 \Big]_x^{5000}$$

$$= (2175 \times 10^{9} - 72000x + 67\, x^2 - 0.002x^3)\ mm^3$$

இத் துண்டுப் பொருளின் எடை

$$W = \frac{(2.175 \times 10^9 - 72000x + 67x^2 - 0.002x^3)}{10^9} \times 24000\ N$$

அடுக்கின் மீது செயல்படும் மொத்த விசையை (இறுக்கம் ஆதலால் − ve)

$$-P = 80000 + W$$

$$-P = 132200 - (72000x - 67x^2 + 0.002x^3)\, 2.4 \times 10^{-5}$$

அடுக்கின் குறுக்கத்தை dδ எனக் கொண்டால், சமன்பாடு 3.1 இன்படி

$$-d\delta = \frac{-P\, x\, dx}{(72000 - 134x + 0.006x^2)\, E}$$

$$\text{மொத்தக் குறுக்கம் } \delta = \int_0^{5000} \frac{(132200 - 2.4 \times 10^{-5}(72000x - 67x^2 + 0.002x^3))\, dx}{10^5\,(720000 - 134x + 0.006x^2)}$$

(சமக்குறிக்கு வலப்புறமுள்ள தொகையத்தைக் (Integral) கணக்கிடுதல் வாசகரின் பயிற்சிக்கு விடப்படுகிறது.)

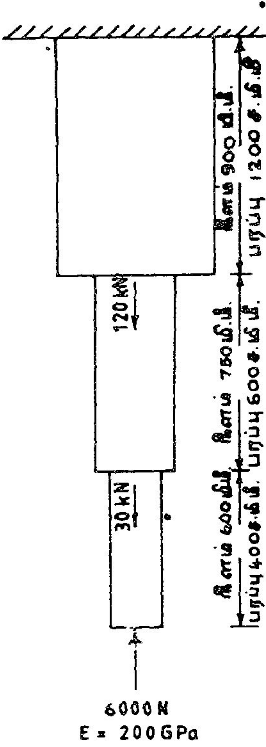
மொத்தக் குறுக்கம் = 1.0696 mm.

பயிற்சிகள் :

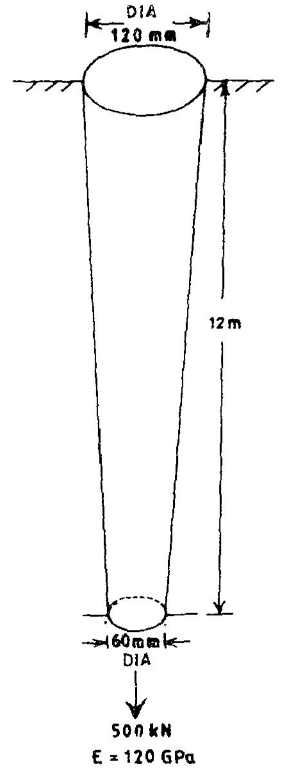
கீழே காணப்படும் படங்களில் சில திண்மங்களும் அவற்றின் மீது செயல்படும் விசைகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. திண்மங்களின் மொத்த நீட்சி(குறுக்கங்)களைக் கணக்கிடுக (குறிப்பாகக் கேட்கப்பட்டாலன்றித் தன்னெடையைப் புறக்கணிக்கலாம்).

---

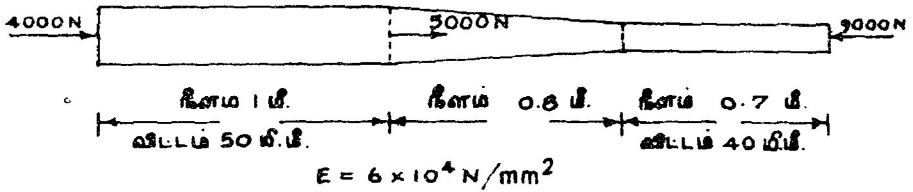
* இங்கு x க்குப் பதிலாய் y எனும் மாறி பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. குழப்பம் தவிர்ப்பதற்காக இவ்வாறு மாற்று மாறியைப் பயன்படுத்தல் நுண்கணிதத்தில் புழங்கி வருதல் நோக்கலாம். இவற்றுக்குத் தனிப்பொருள் இன்மையால் இவற்றைப் வெற்றுமாறிகள் (Dummy Variables) என்பர்.



படம் 3.11



படம் 3.12



படம் 3.13

3.3 படம் 3.13இல் தரப்பட்டுள்ள கம்பியின் தன்னெடை கன மீட்டருக்கு 600 கி.கி. எனக் கொண்டு, மொத்த நீட்சியைக் கணக்கிட்டு, முந்தைய விடையுடன் ஒப்பிடுக. (குறிப்பு : தன்னெடையால் மட்டும் தோன்றும் நீட்சியைத் தனியே கணக்கிட்டுக் கூட்டுதல் எளிதாயிருக்கும்).

3.4 படம் 3.13-இல் காட்டப்பட்டுள்ள திண்மத்தின் மொத்த நீட்சியைக் கணக்கிடுக.

3.3 நலிவுச்சார் அமைப்புகள் (Indeterminate Systems)

முந்தைய பகுதியில் அச்சுவிசைகளால் தோன்றும் நீட்சிகளைக் கணக்கிடும் எடுத்துக்காட்டுகள் சில கண்டோம். இவ் வெடுத்துகாட்டுகள் யாவற்றிலும் தீர்வின் முதல்படி பொருளின் பல்வேறு உறுப்புகளிலும் அகவிசைகளைக் கணக்கிடுதல் தான். இதற்கு நாம் சமனிலைக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்துகிறோம். அஃதாவது எந்த ஒரு திசையிலும் விசைகளின் கூட்டு (Resultant) சுழியாக (Zero) இருக்க வேண்டும். இவ் அத்தியாயத்தில் நாம் காணவிருக்கும் ஆய்வுகளில் ஒருதிசையில் செலுத்தப்படும் விசைகளை மட்டுமே ஆயவிருப்பதும், நமக்குக் கிடைக்கும் ஒரேஒரு சமனிலைச் சமன்பாடு (Equilibrium equation), x திசையில் விசைகளின் கூட்டு சுழிக்குச் சமம் என்பதே. அஃதாவது,

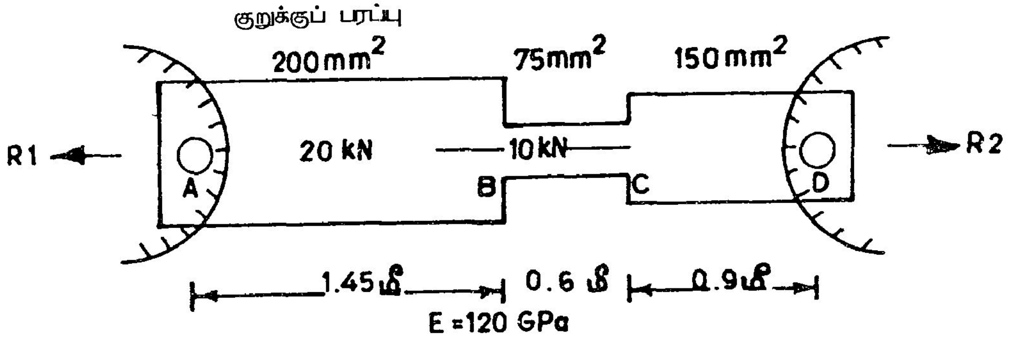
$$\Sigma F_x = 0 \qquad 3.2$$

நாம் தீர்வு காண விரும்பும் சிக்கலில், தெரியாத அளவு (Unknown Quantity) ஒன்றே ஒன்று மட்டும் இருப்பின், சமன்பாடு 3.2ஐப் பயன்படுத்தி அதனைக் கண்டுபிடித்துவிடலாம். முந்தைய பகுதியில் காணப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுகள் யாவற்றிலும் ஒருமுனையில் தாங்கி எதிர்வினை தவிர வேறெந்த அறியா விசைகளும் இல்லை. அதனால், தீர்வு எளிதில் கிட்டியது. இத்தகைய அமைப்புகளை நிலையியல்சார் (Statically Determinate) அமைப்புகள் என்கிறோம். அஃதாவது, அத்தகு அமைப்புகளில் தீர்வு நிலையியல் சமனிலைச் சமன்பாடுகளை மட்டுமே சார்ந்திருக்கும்.

இனி மற்றவகை அமைப்புகளை நோக்குவோம். நம்மால் உரைக்க முடியும் சமனிலைச் சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையைவிட அதிக எண்ணிக்கையில் தெரியாத விசைகள் இருப்பின், இத்தகைய அமைப்புகளில் சமனிலைச் சமன்பாடுகளை மட்டுமே கொண்டு தீர்வு காண முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, படம் 3.14 இல் உள்ள அமைப்பினை நோக்குவோம்.

இவ்வமைப்பில் இரண்டு தாங்கிகள் உள்ளன. இத் தாங்கிகளின் எதிர்வினைகள் இரண்டும் (R_1, R_2) தெரியாத விசைகளே. ஆனால், நிலையியல் தருவதோ ஒரேயொரு சமனிலைச் சமன்பாடே (3.2). அதனால் இவ்வமைப்பின் தீர்வினைக் காண, நிலையியல் மட்டும் போதாது என உணர்கிறோம். பின்பு தீர்வு காண மாற்றுவழி என்ன ?

இவ்வமைப்பின் நலிவுகள் (Deformations) பற்றி எண்ணுவோம். அமைப்பின் AB, BC, CD போன்ற தனித்தனி உறுப்புகளின் நீட்சிகள், குறுக்கங்கள் பற்றி நமக்குத் தெரியாது; எனினும், உறுதியாகத் தெரிவது A, D என்னும் முனைகளில் (உறுதியான தாங்கிகள் தடுப்பதால்) இடப்பெயர்ச்சி (Displacement) கிடையாது என்பதே. அதனால், தனித்தனி உறுப்புகளின்



படம் 3.14

குறுக்க, நீட்சிகளின் அளவுகள் எவ்வளவாக இருப்பினும் இவற்றில் கூட்டு 0 ஆக இருக்க வேண்டும். சமன்பாடாக உரைக்கின்,

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = 0$$

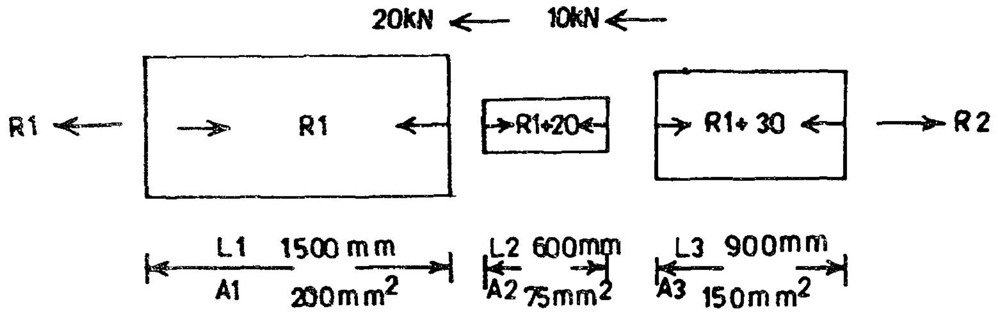
அல்;லது $\Sigma\delta_i = 0$ 3.3

இப்போது (3.3 உடன் சேர்ந்து) நமக்கு இரண்டு சமன்பாடுகள் கிடைத்து விட்டன. இனித் தீர்வு காண முடியும். இன்னும் பொதுவாகக் கூறப்புகின், சமனிலைச் சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையைவிடத் தெரியாத எண்ணிக்கைகள் எத்தனை கூடுதலாக இருக்கின்றனவோ, அத்தனை எண்ணிக்கையில் கூடுதலான சமன்பாடுகளை உருவாக்க முடிந்தால் தீர்வுகளைக் காண முடியும் எனலாம். இக் கூடுதலான சமன்பாடுகள் யாவும் (3.3 ஐப் போன்று) அமைப்பின் நலிவுகளைச் சார்ந்தே அமைவன. ஆதலால், இவ் அமைப்புகளை நலிவு சார் அமைப்புகள் (Indeterminate Systems) என்கிறோம்*. இத்தகு அமைப்புகளில் படம் 3.14 இல் காணப்படுவது மிக எளியதொரு வகையே (பெருமளவில் சிக்கலான நலிவு சார் அமைப்புகள் பலவற்றைக் கட்டுமான ஆய்வுமுறைகள் (Structural Analysis) என்னும் துறையிற் காணலாம்).

எடுத்துக்காட்டு 3.4

படம் 3.14 இல் காணும் அமைப்பின் தீர்வு முறையினை நோக்குவோம். இதன் பொருட்டு இவ்வமைப்பின் தனி உறுப்புநிலைப் படம் (Free Body Diagram) படம் 3.15 இல் தரப்பட்டுள்ளது.

* தாங்கிகளின் எண்ணிக்கை தேவைக்குமேல் மிகையாக இருப்பதால் இவற்றை மிகைதாங்கி அமைப்புகள் (Redundant Systems) அல்லது மிகைத் தடை அமைப்புகள் எனவும் அழைக்கிறோம்.



படம் 3.15

சமன்பாடு 3.2 இன் படி,

$$-R_1 - 20\text{ kN} - 10\text{ kN} + R_2 = 0$$

அஃதாவது

$$R_2 - R_1 = 30\text{ kN}$$

அல்லது $$R_2 = R_1 + 30\text{ kN}. \qquad 3.4$$

அடுத்து சமன்பாடு 3.3 இன் படி,

$$\delta_x = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$$

அல்லது $$\frac{P_1L_1}{A_1E_1} + \frac{P_2L_2}{A_2E_2} + \frac{P_3E_3}{A_3E_3} = 0 \qquad 3.5$$

சமன்பாடு (3.5) ஐப் பயன்படுத்துமுன் சமன்பாடு (3.4)ஐப் பயன்படுத்தி உறுப்புகளின் அகவிசைகளை (P_1, P_2 முதலியன) எழுதுவோம். இவை படம் 3.15 இலேயே குறிக்கப் பட்டுள்ளன. அதனால், சமன்பாடு 3.5 ஐ

$$\frac{1}{E} \times \left[\frac{R_1 \times 1450}{200} + \frac{(R_1 + 20) \times 600}{75} + \frac{(R_1 + 30) \times 900}{150} \right] = 0$$

என எழுதலாம். அஃதாவது

$$\frac{1}{120}\left[7.25\ R_1 + 8\ (R_1 + 20) + 6\ (R_1 + 30)\right]^* \quad = \quad 0$$

இச்சமன்பாட்டினைத் தீர்க்க,

$$R_1 \quad = \quad -16\ \text{kN}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

இதனைக் கொண்டு,

$$P_1 \quad = \quad -16\ \text{kN}$$

$$P_2 \quad = \quad -16 + 20 = 4\ \text{kN}$$

$$P_3 \quad = \quad -16 + 30 = 14\ \text{kN}$$

என்றும் பெறலாம்.

இவற்றிலிருந்து,

$$\delta_1 \quad = \quad \frac{-16 \times 1450}{120 \times 200} \quad = \quad -\ 0.96667\ \text{mm} \qquad \text{(குறுக்கம்)}$$

$$\delta_2 \quad = \quad \frac{4 \times 600}{120 \times 75} \quad = \quad +\ 0.26\ \text{mm} \qquad \text{(நீட்சி)}$$

$$\delta_3 \quad = \quad \frac{14 \times 900}{120 \times 150} \quad = \quad 0.7\ \text{mm} \qquad \text{(நீட்சி)}$$

என நலிவுகளையும் கணக்கிடலாம். மேலும்,

தகைவுகள் முறையே,

$$\sigma_1 \quad = \quad \frac{-16 \times 1000}{200} \quad = \quad -\ 80\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 \quad = \quad \frac{4 \times 1000}{75} \quad = \quad +\ 53.3\ \text{MPa}$$

$$\sigma_3 \quad = \quad \frac{14 \times 1000}{150} \quad = \quad +\ 93.3\ \text{MPa}$$

---

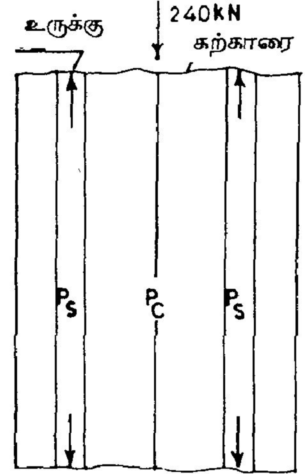
* E-இன் மதிப்பு 120 GPa எனத் தரப்பட்டுள்ளது அஃதாவது 120 kN/mm^2. அதனால் விசைகள் kN அலகுகளாலும் நீளங்கள் mm அலகாலும் உரைக்கப்படும்போது இவ் அலகினை நேரடியாகவே பயன்படுத்தலாம்.

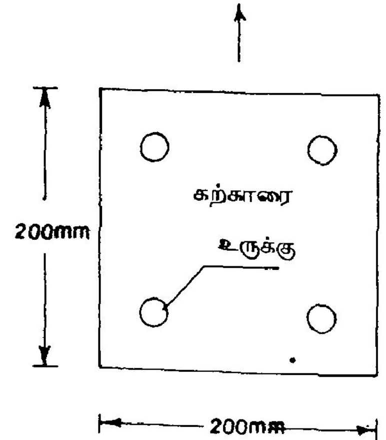
3.4 நலிவு சார் அமைப்புகளின் பல்வேறு வகைகள்

நலிவுசார் அமைப்பு என்றால் என்ன? இத்தகு அமைப்புகளின் தீர்வு முறை யாது ? என்பனவற்றை ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கினோம். இனி, நலிவுசார் அமைப் புகளின் பல்வேறு வகைகளைக் காணச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் தரப்படுகின்றன.

எ.கா. 3.5

200 mm பக்கமுள்ள சதுர வடிவான ஒருகுறுகிய கற்காரைத் தூண் தன்மீது அச்சு விசையாக 240 kN பளுவைத் தாங்க வேண்டும். கற்காரையின் வலிமை 3 MPa அதன் மீள்மைக் கெழு 10 GPa எனில், மீள்மைக்கெழு 200 GPa வும் வலிமை 100 GPa வும் கொண்ட உருக்குக் கம்பிகள் எவ்வளவு பொருத்தப்பட வேண்டும் ?





படம் 3.16

தீர்வு :

இஃது அன்றாடம் கட்டடத் துறையில் நாம் காணக்கூடிய ஓர் எடுத்துக்காட்டு. இதனை விளக்கப் படம் 3.16ஐ நோக்குக. (இங்கு தூணின் உயரம் முக்கியமன்று).

இங்கு தூண்மீது செலுத்தப்படும் மொத்த பளு (240 kN) முழுவதையும் கற்காரையே தாங்க முடியாது என்ற நிலையில் உருக்குக் கொண்டு கற்காரைக்கு வலுவூட்டுகிறோம். இவ்வலுக் கம்பிகள் (Reinforcement) தாங்கும் பளு வினை மொத்தமாக P_S (P_{Steel}) என்றும், கற்காரை தாங்கும் பளுவினை P_C என்றும் கொள்ளின், இவை இரண்டும் தெரியா விசைகள். நிலையியல் தரும் ஒரே சமன்பாடு,

$$P_S + P_C + 240 = 0$$

மட்டுமே. அதனால் நலிவுசார் முறையிலேயே இதற்குத் தீர்வு காண முடியும். கற்காரை, உருக்கு இரண்டும் உறுதியாகப் பிணைந்திருக்குமாதலால், இரண்டிலும் விகலங்கள் ஒரே அளவினவாய் இருக்க வேண்டும்.

அஃதாவது $\varepsilon_s = \varepsilon_c$ (3.5)

" $\frac{\sigma_s}{E_c} = \frac{\sigma_c}{E_c}$

" $\sigma_s = \sigma_c \cdot \frac{E_s}{E_c}$

எனவே $\sigma_s = \frac{200}{10} \times \sigma_c = 20 \sigma_c$

அஃதாவது உருக்கின் வலிமை 100 MPa ஆக இருந்தாலும் உருக்கில் நாம் செலுத்தக்கூடிய தகைவு $\sigma_{smax} = 20 \times \sigma_{cmax} = 20 \times 3 = 60$ MPa மட்டுமே. இப்போது தேவைப்படும் உருக்குக் கம்பிகளின் மொத்தக் குறுக்குப் பரப்பளவு A_s எனக் கொள்ளின்,

கற்காரையின் குறுக்குப் பரப்பு	=	$A_c = (200 \times 200 - A_s)$	=	$(40000 - A_s)mm^2$
தூணில் மொத்த அகவிசை	=	$A_s \sigma_s + A_c \sigma_c$	=	240000 N
அஃதாவது		$A_s 60 + (400 - A_s) 3$	=	240,000 N
"		$57 A_s + 120000$	=	240,000
இதிலிருந்து A_s	=	$\frac{240000 - 120000}{57}$	=	$2153 \ mm^2$

எ.கா. **3.6**

0.4 m × 0.5 m குறுக்களவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வக வடிவக் கற்காரைத் தூண், 5000 mm^2 குறுக்குப் பரப்புக்கொண்ட உருக்குக் கம்பிகளால் வலுவூட்டப்பட்டுள்ளது. கற்காரை, உருக்கு இவற்றின் இறுக்க வலிமைகள் முறையே 4 MPa, 120 MPa என்றும் மீள்மைக் கெழு விகிதம் $m(E_s / E_c)$, 18 என்றும் கொண்டு தூண் தாங்கக் கூடிய பளுவின் அளவினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

மொத்தக் குறுக்குப் பரப்பு		=	$400 \times 500 = 2 \times 10^5 \ mm^2$
உருக்கின் குறுக்குப் பரப்பு	A_s	=	$5000 \ mm^2$
∴ கற்காரையின் குறுக்குப் பரப்பு	A_c	=	$200000 - 5000 = 195000 \ mm^2$
கற்காரையின் வலிமை	σ_{cmax}	=	$4 \ N/mm^2$

உருக்கின் வலிமை σ_{smax} = 120 N/mm^2

உருக்கின் முழு வலிமையையும் பயன்படுத்த முற்படுவோமெனில்,

கற்காரையில் உச்சத் தகைவு $\dfrac{E_c}{E_s} \times \sigma_{smax}$

$$= \frac{1}{18} \times 120 = 6.6 \text{ GPa}$$

ஆனால், இத்தகைவு கற்காரையின் வலிமையைவிட அதிகமாக இருப்பதால் இதனை அனுமதிக்க முடியாது. அதனால்,

உருக்கின் உச்சத் தகைவு

$$\sigma_{smax} = \frac{E_s}{E_c} \times \sigma_{cmax} = 18 \times 4 = 72 \text{ MPa}$$

அதனால் தூண் தாங்கு உச்ச பளு $P_{max} = \sigma_{cmax} \times A_c + \sigma_{smax} \times A_s$

$$= 4 \times 195000 + 72 \times 5000$$

$$= 114000 \text{ N} = 114 \text{ kN.}$$

எ.கா. 3.7

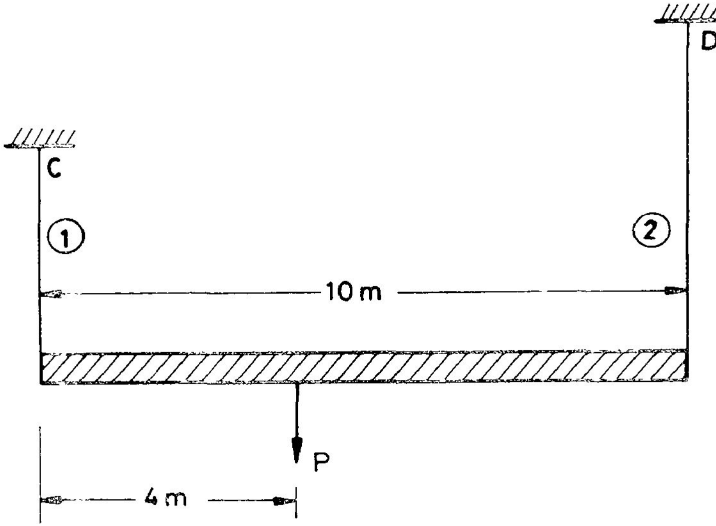
படம் 3.17 இல் காட்டப்பட்டுள்ள AB என்னும் உறுதிக் கம்பியொன்று * (Rigid Bar) அதன் A என்னும் முனையில் 3m நீளமும் 1000 mm^2 குறுக்குப் பரப்பும் மீள்மைக் குணகம் 108 GPa வும் கொண்ட பித்தளைக் கம்பி CA வினாலும், மறுமுனையில் நீளம் 5.4 m, மீள்மைக்கெழு 200 GPa கொண்ட DB என்னும் உருக்குக் கம்பியாலும் தாங்கப்படுகிறது. உறுதிக் கம்பி (AB) யின் கிடைமை (Horizontality) மாறாதிருக்க வேண்டுமெனில் உருக்குக் கம்பியின் குறுக்குப் பரப்பளவு எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும்?

தீர்வு :

AB யின் கிடைமை மாறாதிருக்க வேண்டுமெனில் கம்பிகள் இரண்டும் ஒரேயளவான நீட்சியை அடைந்தால்தான் முடியும்.

$$\therefore \quad \delta_{CA} = \delta_{DB}$$

* உறுதிக் கம்பிகள் எவ்வித நலிவும் அடைவதில்லை என்பது அடிப்படைத் துணிபு.



படம் 3.17

$$\therefore \quad \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} \qquad 3.7$$

AB யின்மீது செயற்படும் விசைகளைப் படம் 3.18 இல் நோக்குக.

இங்கு இரண்டு சமனிலைச் சமன்பாடுகளை எழுத முடியும்.

$$P_1 + P_2 = P$$ (விசைச் சமனிலை) 3.8

A என்ற புள்ளியின் திருப்புமைச் சமனிலைச் (Moment Equilibrium) சமன்பாடு :

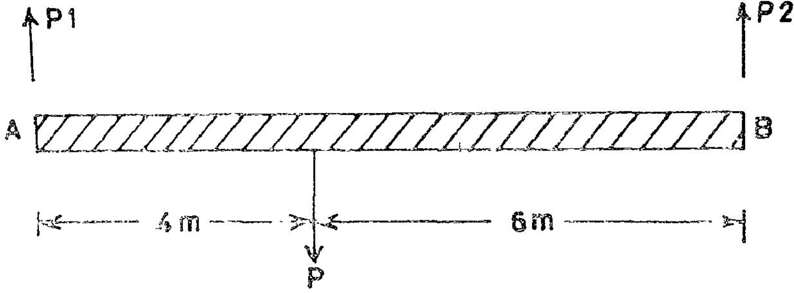
$$P_2 \times 10 - P \times 4 = 0$$

$$\therefore \quad P_2 = 0.4\,P$$

(3.8) ஐப் பயன்படுத்த, $P_1 = 0.6\,P$

சமன்பாடு 3.7 இன்படி

$$\frac{0.6\,P \times 3000}{108 \times 1000} = \frac{0.4\,P \times 5400}{200 \times A_2}$$



படம் 3.18

இதிலிருந்து உருக்குக் கம்பியின் குறுக்குப் பரப்பளவு

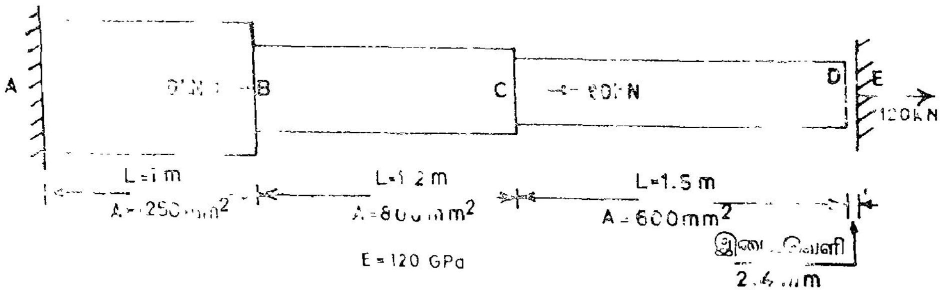
$$A_2 = \frac{0.4P \times 5400 \times 108\ 1000}{200 \times 0.6P \times 3000}$$

$$= 600\ mm^2$$

எ.கா. 3.3.

படம் 3.19 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றிலும் தகைவினைக் காண்க.

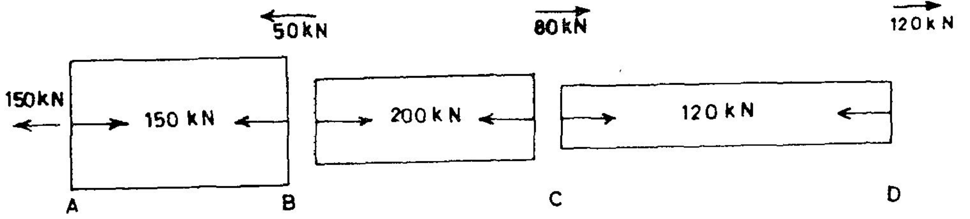
படம் 3.19 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பு நிலையியல் சார் அமைப்பா ? நலிவு சார் அமைப்பா ? என்பது முதல் வினா.



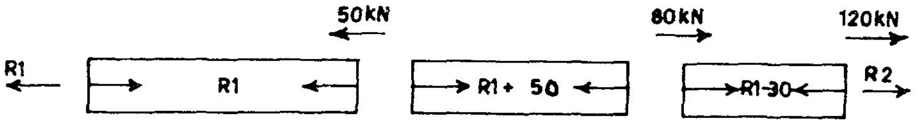
படம் 3.19

தொடக்கத்தில் A என்ற முனையில் ஒருதாங்கி மட்டுமே உள்ளது. ஆனால், விசைகளின் விளைவாகத் தோற்றுவிக்கப்படும் மொத்த நீட்சி மறுமுனையிலுள்ள இடைவெளியை (DE = 2.4 mm) விட மிகுதியாயிருக்குமெனில், இது நலிவுசார் அமைப்பாய் மாறிவிடும்.

அதனால், முதலில் நிலையியல் சார் அமைப்பாகக் கருதி, மொத்த நீட்சியைக் கணக்கிடுவோம். விசைப்படம் 3.20 காண்க.



படம் 3.20



படம் 3.21

$$\text{மொத்த நீட்சி } \delta = \frac{1}{120}\left[\frac{150 \times 1000}{1250} + \frac{200 \times 1200}{800} + \frac{120 \times 1500}{600}\right]$$

$$= 6 \text{ mm}$$

மொத்த நீட்சி, இடைவெளியைவிட அதிகமாக இருப்பதால் இதனை மீண்டும் நலிவுசார் அமைப்பாகவே ஆராய வேண்டும். விசைப்படம் 3.21 ஐ நோக்குக.

மொத்த நீட்சி = இடைவெளி = 2.4 mm

அதாவது

$$\frac{1}{120}\left[\frac{R \times 1000}{1250} \quad \frac{(R+50) \times 1200}{800} \quad \frac{(R-30) \times 1500}{600}\right]$$

$$= 2.4$$

$$\therefore \quad 0.8R + 1.5\,R + 75 + 2.5\,R - 75 = 2.4 \times 120$$

$$4.8R = 288 \text{ kN}$$

$$R = 60 \text{ kN}$$

அதனால் $P_1 = R = 60 \text{ kN}; \quad \sigma_1 = \frac{60{,}000}{1250} = 48 \text{ MPa}$

$$P_2 = R + 50 = 110 \text{ kN}; \quad \sigma_2 = \frac{110000}{800} = 137.5 \text{ MPa}$$

$$P_3 = R - 30 = 30 \text{ kN}; \quad \sigma_3 = \frac{30000}{600} = 50 \text{ MPa}$$

தாங்கி E இன் எதிர்வினை = − 90 kN

பயிற்சிகள் :

3.5 படம் 3.19 இல் இடைவெளி 3.75 mm எனக்கொண்டு உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றிலும் தகைவினைக் கணக்கிடுக.

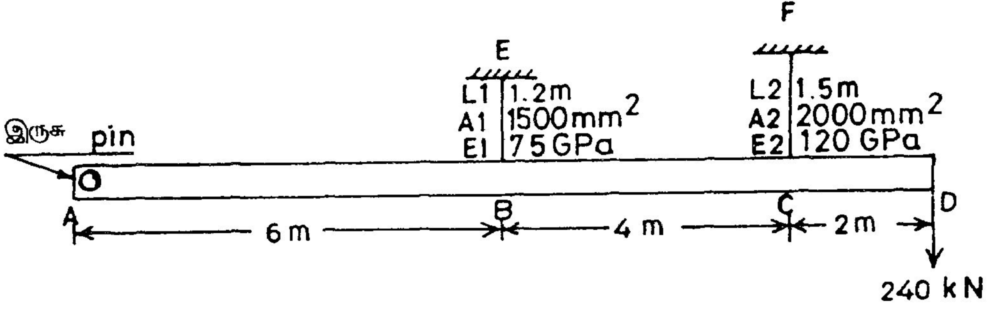
3.6 படம் 3.17 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அமைப்பில் பித்தளைக் கம்பி, உருக்குக் கம்பி இரண்டும் ஒரே நீளமும், குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பும் கொண்டன என்றால்,

i. புறவிசை P ஐ உறுதிக் கம்பி AB யின் மையத்தில் தொங்க விட்டால், AB யின் சாய்வுக் கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

ii. புறவிசை P ஐ எங்குத் தொங்க விட்டால் AB யின் கிடைமை (Horizbntality) மாறாதிருக்கும்?

3.7 படம் 3.22 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பில் தாங்கிக் கம்பிகள் EB, FC ஆகியவற்றில் தகைவுகளைக் கணக்கிடுக.

3.8 படம் 3.22 இல் காட்டப்பட்டுள்ள உறுதிக் கம்பி ABCD யின் எடை 60 kN எனக் கொண்டு கம்பிகள் EB, FC ஆகியவற்றில் தகைவுகளைக் கணக்கிடுக.



படம் 3.22

குறிப்புகள் : பயிற்சிகள் 3.7, 3.8 ஆகியவற்றில் உறுதிக்கம்பி A வை மையமாய்க் கொண்டு சுழலும். அதனால்,

i. $M_A = 0$

ii. B, C ஆகிய புள்ளிகளின் இடப்பெயர்ச்சிகள், AB, AC ஆகிய தூரங்களுக்கு நேர்விகிதப் பொருத்தத்திலிருக்கும்.

3.9 250 mm வெளிவிட்டமும், 240 mm உள்விட்டமும் கொண்ட ஓர் உருக்குக் குழாயில் உள்ளீடு முற்றும் கற்காரையால் நிரப்பப்பட்டு அது குறுகிய தூணாகப் பயன்படுத்தப் படுகிறது. கற்காரையின் இறுக்க வலிமை, மீள்மைக்கெழு முறையே 5 MPa, 16 GPa ஆகவும், உருக்கின் இறுக்க வலிமை, மீள்மைக்கெழு முறையே 80 MPa, 200 GPa ஆகவுமிருப்பின், தூண் 600 kN பளுவைத் தாங்கும் போது கற்காரையில் தகைவினைக் கணக்கிடுக; மேலும் தூண் தாங்கக் கூடிய உச்ச பளுவின் அளவையும் மதிப்பிடுக.

3.10 படம் 3.21 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பில், கம்பி EBயினை நீக்கிவிட்டால் F என்ற தாங்கியின் எதிர்வினை, தாங்கு கம்பியின் அளவீடுகளைச் சார்ந்திராது என்று நிறுவுக.

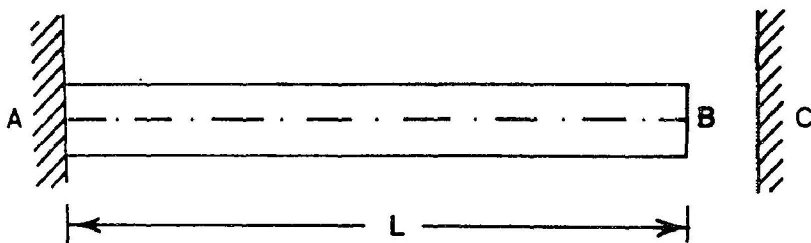
3.11 படம் 3.22 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பில் $r_a = A_1 / A_2$ என்னும் பரப்பு விகிதங்கள் 0.1, 0.2, 0.33, 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 5.0, 10.0 எனக் கொண்டு ஒவ்வொரு விகிதத்திற்கும் தாங்கி வினைகளைக் கணக்கிட்டு, $R_A - r_a$, $R_E - r_a$, $R_F - r_a$ ஆகிய மூன்று உறவுகளையும் ஒரே வரைபடத்தாளில் வரைக. இவ்வாய்விலிருந்து (நலிவு சார் அமைப்புகள் குறித்து) நீவிர் கற்கும் முக்கிய உண்மை யாது ? (அவ்வாறே $r_l = L_1 / L_2$ என்னும் நீள விகிதங்களையும் இவ்வாறே மாறச் செய்து $R_A - r_l$, $R_E - r_l$, $R_F - r_l$ ஆகிய வரைபடங் களையும் வரைந்து ஆயலாம்.)

3.12 இதுவரை நீவிர் கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் (பயிற்சிகள் உட்பட) யாவற்றிலும், தகைவுகளோ, விசைகளோ, பாய்சான் விகிதத்தினைச் சார்ந்திருக்கவில்லை என்பதைக்

கண்டிருப்பீர். அஃது ஏன் என்பது பற்றிச் சிந்தித்து நீவீர் பெறும் விளக்கத்தினை எழுதுக. எவ்விதச் சூழ்நிலைகளில் விசைகள், தகைவுகள் இவற்றின்மீது பாய்சான் விளைவு பாதிப்பு ஏற்படுத்தக் கூடும்?

3.5 வெப்பத் தகைவுகள்

' வெப்பத்தினால் பொருள்கள் உருமாற்றம் (நீட்சி) அடைகின்றன ' என்பது நாம் கற்ற உண்மை. இந் நீட்சிக்கு எவ்விதத்திலும் தடை இல்லை என்றால், வெப்பத்தின் விளைவாகப் பொருள்களில் தகைவுகள் ஏதும் தோன்றா. ஆனால், இந் நீட்சி தடுக்கப்பட்டால் அதன் விளைவாகத் தகைவுகள் தோன்றுகின்றன. அவற்றை வெப்பத் தகைவுகள் (Thermal Stresses) என அழைக்கின்றோம். வெப்பத் தகைவுகள் தோன்றும் தன்மையை ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டின் மூலம் காண்போம். படம் 3.23 - ஐ நோக்குக.



படம் 3.23

இங்கு AB என்னும் ஓர் உறுப்பு A என்ற முனையில் தாங்கப்பட்டுள்ளது. இதன் மீது புற விசைகள் ஏதும் செலுத்தப்படவில்லை. இவ்வுறுப்பின் வெப்ப நிலை அதிகரிப்பதாகக் கொள்வோம். பொருளின் வெப்ப நீட்சிக் கெழு (Coefficient of Linear Thermal Expansion) α mm/mm/ °C எனக் கொள்வோம். வெப்பநிலை உயர்ச்சி T எனக் கொண்டால் AB யின் மொத்த நீட்சி,

$$\delta_{AB} = L \alpha T \qquad 3.9$$

இந் நீட்சியை அனுமதிக்க இடைவெளியிருப்பின் தகைவு ஏதும் தோற்றுவிக்கப்படாது. ஆனால், போதிய இடைவெளி இல்லையெனில் அஃதாவது நீட்சி முழுமையாகவோ, பகுதியாகவோ தடுக்கப்படும் போது நிகழ்வதை ஆய்வோம். முதலாவதாய், இவ்வாறு தடுக்கப்படுதல் விசையின் உதவியின்றி முடியாது. தாங்கி செலுத்தும் விசை, தடுக்கப்படும் நீட்சியளவிற்குக் குறுக்கத்தைத் தோற்றுவிக்கப் போதுமானதாய் இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, தொடக்க இடைவெளி e எனில்

தடுக்கப்படும் நீட்சி $= \delta_{AB} - e$

$= L\, \alpha\, T - e$

செலுத்தப்படும் விசை P எனில்

அது தோற்றுவிக்கும் நீட்சி $= \dfrac{PL}{AE}$

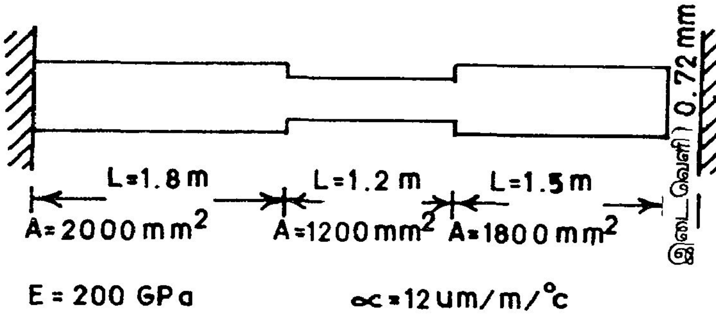
எனவே அது அளவில் ($L\, \alpha\, T - e$) க்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும்.

அதாவது ,
$$(L\, \alpha\, T - e) + \left(-\frac{PL}{AE}\right) = 0 \qquad 3.10$$

அமைப்புகள் பல்வேறு விதமாய் உருக்கொண்டிருக்க வாய்ப்பு உண்டெனினும் அவற்றிலெல்லாம் வெப்பத் தகைவுகளைக் கணக்கிடுவதில், சமன்பாடு 3.10 அல்லது அதன் வேறுவித வெளிப்பாடுகளே பயன்படுத்தப்படுகின்றன. சில எடுத்துக்காட்டுகளின் துணையோடு விளக்கம் பெறுவோம்.

எ.கா. **3.9**

படம் 3.24 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பின் வெப்பநிலை 30°C உயர்த்தப்படுகிறது என்றால், பல்வேறு பகுதிகளிலும் வெப்பத் தகைவுகளைக் கணக்கிடுக. ($\alpha = 12 \times 10^{-6}$ m/m/°c)



படம் 3.24

தடை இல்லாத போது மொத்த நீட்சி $= L\, \alpha\, T$

$= (1.8+1.2+1.5) \times 12 \times 10^{-6} \times 30$ m.

$$= \quad 0.00162 \text{ m}$$

$$= \quad 1.62 \text{ mm}$$

இந்நீட்சி இடைவெளி (0.072 mm)யை விட அதிகமாயிருப்பதால் அனுமதிக்கப்படாது. அதனால், அமைப்பின்மீது மொத்தத்தில், (1.62 – 0.72), அஃதாவது 0.9 mm குறுக்கம் தோற்றுவிக்கப்பட வேண்டும். தாங்கிகளின் எதிர்வினை R எனக் கொள்வோம். (வேறு புறவிசைகள் இன்மையால் இரு தாங்கிகளின் எதிர் வினைகளும் சமனிலையில் இருக்க வேண்டும்). இதனால், அமைப்பில் தோன்றும் இறுக்கவிசை (Compression) சீராகத்தான் இருக்கும்.

அஃதாவது $\quad P_1 = P_2 = P_3 = -R$

எனவே மொத்த நீட்சி $\quad \delta = \dfrac{R}{E}\left\{\dfrac{L_1}{A_1} + \dfrac{L_2}{A_2} + \dfrac{L_3}{A_3}\right\}$

R ஐ kN அலகுகளில் கொள்ளின்

$$0.9 = \frac{R}{200}\left\{\frac{1800}{2000} + \frac{1200}{1200} + \frac{1500}{1800}\right\}$$

$$0.9 \times 200 = R \times 2.73$$

$$\therefore \quad R = \frac{0.9 \times 200}{2.73} = 65.854 \text{ kN}$$

இதிலிருந்து தகைவுகள்,

$$\sigma_1 = \frac{-65.854 \times 1000}{2000} = -32.927 \text{ MPa}$$

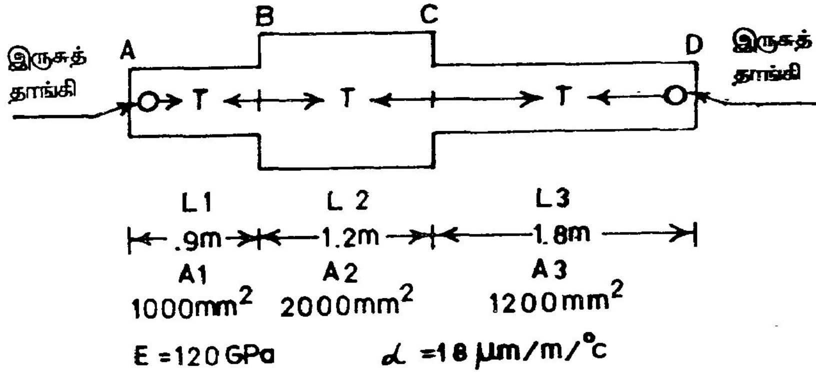
$$\sigma_2 = \frac{-65.854 \times 1000}{1200} = -54.878 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{-65.854 \times 1000}{18000} = -43.903 \text{ MPa}$$

எ.கா. 3.10.

படம் 3.25 இல் காணப்படும் அமைப்பின் வெப்ப நிலை 18°C குறைக்கப்படும்போது தோன்றும் வெப்பத் தகைவுகளைக் காண்க.

இங்கு அமைப்புக் (குளிர்விக்கப்படுவதால்) குறுக முற்படுகிறது. ஆனால், A, D எனும் இருமுனைகளிலும் உள்ள இருசுகள், இக் குறுக்கத்தைத் தடுக்கின்றன. அஃதாவது அமைப்பு



படம் 3.25

இருசுகளை நோக்கி இழுக்கப்படுகிறது ; அதனால் அமைப்பினுள் சீரான அகவிசை T நீள் விசையாயிருக்கும். (இதனை நியூட்டனில் உரைப்போம்)

குளிர்விப்பினால் தோன்றும் குறுக்கம் = அகவிசை T தோற்றுவிக்கும் நீட்சி

அஃதாவது $\alpha\, T\,(L_1 + L_2 + L_3) = \dfrac{T}{E}\left[\dfrac{L_1}{A_1} + \dfrac{L_2}{A_2} + \dfrac{L_3}{A_3}\right]$

$$\therefore\ 18 \times 10^{-6} \times 18\ (900 + 1200 + 1800) = \frac{T}{120 \times 10^3}\left[\frac{900}{1000} + \frac{1200}{2000} + \frac{1800}{1200}\right]$$

$$\therefore\quad 18 \times 18 \times 120 \times 10^{-3} \times 3900 = T\,(0.9 + 0.6 + 1.5)$$

எனவே $T = \dfrac{18 \times 18 \times 12 \times 39}{3}\ \text{N} = 50544\ \text{N}$

தகைவுகள்

$$\sigma_1 = \frac{50544}{1000} = 50.544\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{50544}{2000} = 25.272\ \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{50544}{1200} = 42.12\ \text{MPa}$$

எ.கா. 3.11

இனி, மிகப் பயன்படத்தக்க மற்றோர் எடுத்துக்காட்டினைக் காண்போம். படம் 3.26 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு 300 mm நீளமும் 400 mm^2 குறுக்குப் பரப்பும் கொண்ட செப்புக் குழாய் ஒன்று, 300 mm^2 குறுக்குப் பரப்புக் கொண்டதொரு மரையாணி (bolt) செருகப்பட்டு, மரைவில்லைக்கும் (NUT) மரையாணித் தலைக்குமிடையே இடைவெளியோ, நெருக்கமோ ஏதுமின்றி பொருத்தப்படுகிறது. மரையாணிப் பொருளின் பண்புகள் : E_s = 200 GPa α_s = 12 μm/m/°C. செப்புக் குழாயின் பண்புகள் : E_c = 120 GPa; α_c = 18 μm/m/°C

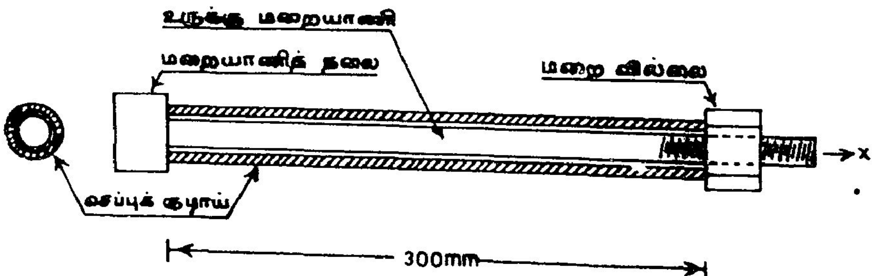
i. இவ் அமைப்பின் வெப்பநிலை 50°C உயர்த்தப்பட்டால், மரையாணி, செப்புக்குழாய் இவற்றில் தகைவுகளைக் கணக்கிடுக.

ii. மரைவில்லையை x திசையில் 0.03 mm நகர்த்தினால், (இறுக்கம் தளர்த்தப்படுவதால்), தகைவுகள் எவ்வளவு குறைகின்றன எனக் காண்க.

iii. மரையாணியின் வலிமை 145 MPa, செப்புக் குழாயின் வலிமை 36 MPa எனில் அமைப்பின் வெப்பநிலையை அதிகபட்சம் எந்த அளவிற்கு உயர்த்த முடியும் ?

தீர்வு :

ஒரு சிக்கலை எளிதில் தீர்ப்பதற்குரிய சுருக்குவழி அச்சிக்கலைச் சரியாகப் புரிந்து கொள்வதேயாகும். அதற்கு முயல்வோம். சிக்கலின் முக்கிய அம்சங்கள் சிலவற்றைக் காண்போம்.



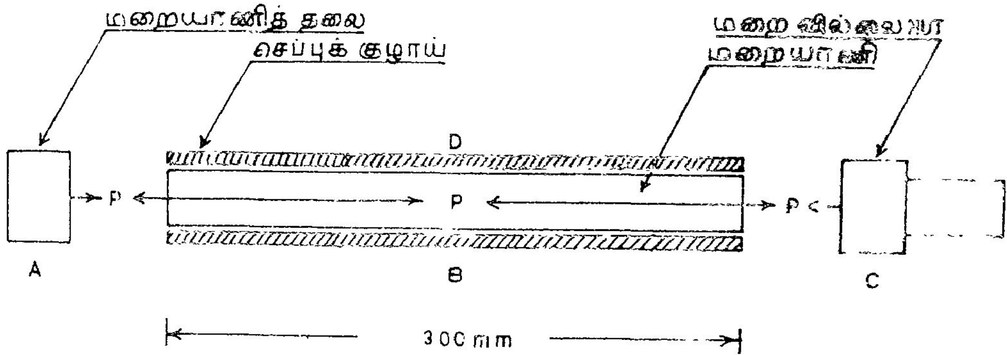
படம் 3.26 (a)

i. மரைத் தலைக்கும் மரைவில்லைக்கும் இடையேயுள்ள மரையாணிப் பகுதி, வெப்பத்தால் அடையும் நீட்சியைவிடச் செப்புக் குழாய் அதிக நீட்சியை அடையும்; ஆனால், இந்நீட்சியை மரைவில்லையும், மரையாணித் தலையும் தடுக்க முற்படுவதால், வெப்பத் தகைவுகள் தோன்றுகின்றன.

ii. மரையாணி செப்புக் குழாயைக் குறுக்க முனைகிறது ; அதே சமயம் செப்புக் குழாய் (மரைவில்லையையும், மரையாணித் தலையையும் தள்ள முற்படுவதன் மூலம்) மரையாணியை நீட்ட முனைகிறது. அதனால், செப்புக் குழாய் மீது இறுக்க விசை (Compression)யும், மரையாணி மீது இழுவிசை (Tension)யும் செலுத்தப்படுகின்றன. (வேறு புறவிசைகள் இன்மையால்) இவையிரண்டும் அளவில் சமமாயிருக்க வேண்டும்.

iii. மரையாணியின் மொத்த நீட்சி, வெப்பத்தால் தோன்றும் நீட்சி, இழுவிசையால் தோன்றும் நீட்சி இரண்டன் கூட்டாகும். அவ்வாறே செப்புக் குழாயின் மொத்த நீட்சி, வெப்பத்தால் தோன்றும் நீட்சி, இறுக்க விசையால் தோன்றும் குறுக்கம் $(-\delta)$ இரண்டன் கூட்டாகும். இவ்விரு உறுப்புக்களின் மொத்த நீட்சிகள் சமமாயிருக்க வேண்டும்.

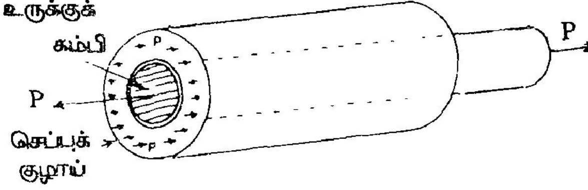
மேற்கண்ட கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி வெப்பத் தகைவுகளைக் காணுமுன், முதலில் விசைப்படம் ஒன்று வரைந்து கொள்வோம். படம் 3.26b காண்க.



படம் 3.26 (b)

மரையாணி (B) மீது மரையாணித் தலை A மரைவில்லை C இரண்டும் செலுத்தும் இழுவிசை T எனக் கொள்வோம். மரையாணியின் மீது செயற்படும் விசைகளை மட்டும் தனியே படம் 3.27 இல் நோக்குவோம்.

இது மரையாணியால் P அளவு விசையுடன் இழுக்கப்படுவதையும், இது சமநிலையில் இருக்க வேண்டுமானால் இதன் மீது அதே அளவில், ஆனால், எதிரான திசையில் (–P) செப்புக்



படம் 3.27

குழாய் விசையைச் செலுத்த வேண்டுமென்பது தெளிவு. சுருங்கக்கூறின் மரையாணி மீது இழுவிசை = P

செப்புக் குழாயின் மீது இறுக்கவிசை = − P

இப்பொழுது நீட்சிகளை நோக்குவோம்.

மரையாணியில் நீட்சிகள் :

வெப்பத்தால் நீட்சி $= L\,\alpha\,T$

$= 300 \times 12 \times 10^{-6} \times 50$

$= 0.18$ mm.

விசையால் நீட்சி $= \dfrac{PL}{AE} = \dfrac{P \times 300}{300 \times 200} = 0.005\,P$

செப்புக்குழாயில் நீட்சிகள் :

வெப்பத்தால் நீட்சி $= 300 \times 18 \times 10^{-6} \times 50 = 0.27$ mm.

விசையால் நீட்சி $= \dfrac{-P \times 300}{400 \times 120} = -0.00625\,P$

எனவே

$$0.18 + 0.005P = 0.27 - 0.00525\,P$$

$$\therefore \quad 0.01125\,P = 0.09$$

$$\therefore \quad P = \frac{0.09}{0.01125}\ \text{kN} = 8\ \text{kN} = 8000\ \text{N}$$

மரையாணியில் தகைவு $= \dfrac{P}{A_s} = \dfrac{8000}{300} = 26.677$ MPa

செப்புக்குழாயில் தகைவு $= \dfrac{-P}{A_c} = \dfrac{-8000}{400} = -20$ MPa

மரைவில்லை தளர்த்தப்படுவதன் விளைவு

மரையாணியின் நீளம் $= 300.03 + 0.18 + 0.005\,P$

செப்புக்குழாயின் நீளம் $= 300 + 0.27 - 0.00625\ P$

இவையிரண்டனையும் சமன்படுத்த.

$$300.03 + 0.18 + 0.005\ P = 300 + 0.27 - 0.00625\ P$$

$$\therefore \quad 0.01125\ P = 0.06$$

எனவே

$$P = \frac{0.06}{0.01125}\ kN = 5333.33\ N$$

மரையாணியில் தகைவு $= \dfrac{5333.33}{300} = 17.778\ MPa$

செப்புக்குழாயில் தகைவு $= \dfrac{-5333.33}{400} = 13.333\ MPa$

(இவற்றில் தகைவுகளில் மூன்றிலொரு பங்கு குறைந்திருப்பதை நோக்குக).

மரையாணி, குழாய் இரண்டுமே ஒரே அளவு விசைக்குட்படுத்தப்படுவதால், இரண்டில் எது குறைவான வலிமையுடையதோ அதற்கு மேல் விசை இருக்க முடியாது.

உருக்கின் வலிமை $= 145\ MPa$

எனவே மரையாணியின் மொத்த வலிமை (உருக்கின் வலிமை × மரையாணியின் குறுக்குப் பரப்பு) $= 145 \times 300\ N$

$= 43500\ N$

செப்பின் வலிமை $= 36\ MPa$

செப்புக்குழாயின் மொத்த வலிமை (செப்பின் வலிமை × செப்புக்குழாயின் குறுக்குப் பரப்பு) $= 36 \times 400\ N$

$= 14400\ N$

எனவே அமைப்பின்மீது செலுத்தப்படக்கூடிய உச்ச விசை, இவ்விரண்டில் குறைவான தேயாகும் (14400 N). ஏனெனில், 14400 N-க்கு மேற்பட்ட விசையைச் செப்புக் குழாயின் மீது செலுத்த முடியாது. அதனால், மரையாணி மிகுந்த வலிமையுடையதென்றாலும், அவ்வலிமையைப் பயன்படுத்திக் கொள்ள முடியாது.

எனவே $P = 14400\ N = 14.4\ kN$

இப்போது நீட்சிகளைக் கணக்கிட, வெப்ப உயர்ச்சியை T எனக் கொள்வோம்.

$$\text{மரையாணியின் நீட்சி} = L_s \alpha_s T + \frac{P L_s}{A_x E_s}$$

$$\delta_s = 300 \times 12 \times 10^{-6} T + \frac{14.4 \times 300}{300 \times 200}$$

$$\text{செப்புக் குழாயின் நீட்சி} \quad \delta_c = L_c \alpha_c T - \frac{P L_c}{A_c E_c}$$

$$= 300 \times 18 \; 10^{-6} T - \frac{14.4 \times 300}{400 \times 120}$$

$$\delta_s = \delta_c$$

$$300 \times 12 \times 10^{-6} T + \frac{14.4}{200} = 300 \times 18 \times 10^{-6} T - \frac{14.4}{160}$$

$$T \times 300 \times 6 \times 10^{-6} = \frac{14.4}{200} + \frac{14.4}{160}$$

இதிலிருந்து T ஐக் கணக்கிட,

$$T = \left[\frac{14.4}{200} + \frac{14.4}{160}\right] \times \frac{10^6}{300 \times 6}$$

$$T = 90\,^\circ C$$

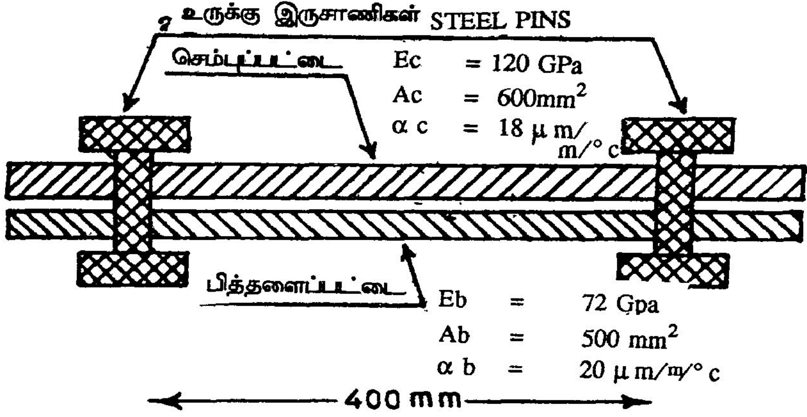
ஆகவே அமைப்பின் வெப்பநிலையை அதிகபட்சம் 90°C வரைதான் உயர்த்த முடியும்.

குறிப்பு :

இவ் எடுத்துக்காட்டில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அமைப்பில் வெப்பம் மிகுந்தால் தான் வெப்பத் தகைவுகள் தோன்றும். செப்புக் குழாயின் மீது இறுக்கவிசை தான் செலுத்தப்பட முடியும். அமைப்பு குளிர்விக்கப்படும்பொழுது மரையாணி குறுகுவதைவிடச் செப்புக் குழாய் மிகுதியாய்ச் சுருங்கி விடும். இச் சுருக்கங்களுக்குத் தடையேதும் இல்லையால் இவை வெப்பத் தகைவுகளை விளைவிக்க மாட்டா.

பயிற்சிகள் :

3.13 படம் 3.25 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பில் மரை வில்லை – x திசையில் 0.15 mm நகர்த்தப்பட்டால் தோன்றும் தகைவுகளைக் கணக்கிடுக.



படம் 3.28

3.14 படம் 3.25 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பின் தொடக்க (தகைவுகள் இல்லா நிலையில்) வெப்பநிலை 25°C என்றால், செப்புக்குழாய் 90°C வரையிலும், மரையாணி 80°C வரை யிலும் சூடேற்றப்படும்போது தோன்றும் வெப்பத் தகைவு களைக் கணக்கிடுக.

3.15 படம் 3.25 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பில் மரையாணி 85°C வரை சூடேற் றப்படும்போது செப்புக்குழாயில் தகைவு 12 MPaவைத் தாண்டக் கூடாதெனில், செப் புக்குழாயை அதிகபட்சம் எவ்வளவு வெப்பநிலைக்குச் சூடேற்றலாம் ?

3.16 படம் 3.28 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பின் வெப்பநிலை உயர்த்தப்பட்டால் தோன்றும் வெப்பத் தகைவுகளைக் கணக்கிடுக.

குறிப்பு : இருசாணிகளின் வளைவுகள் போன்ற உருக்குலைவுகளைப் புறக்கணித்து, இரு சாணிகளுக்கிடையே உள்ள பகுதியில் இருபட்டைகளின் நீளங்களும் (எப்போதும்) சம மாகவே இருக்க வேண்டும்.

3.17 படம் 3.28 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பில் செம்புப் பட்டையின் வெப்பநிலையை 30°C வரை உயர்த்தி, பித்தளைப் பட்டையை 12°C வரை குளிர்விக்கும்போது தோன்றும் தகைவுகளைக் கணக்கிடுக.

5

4. நறுக்கு விசைகள்
(Shear Forces)

4.1 முன்னுரை

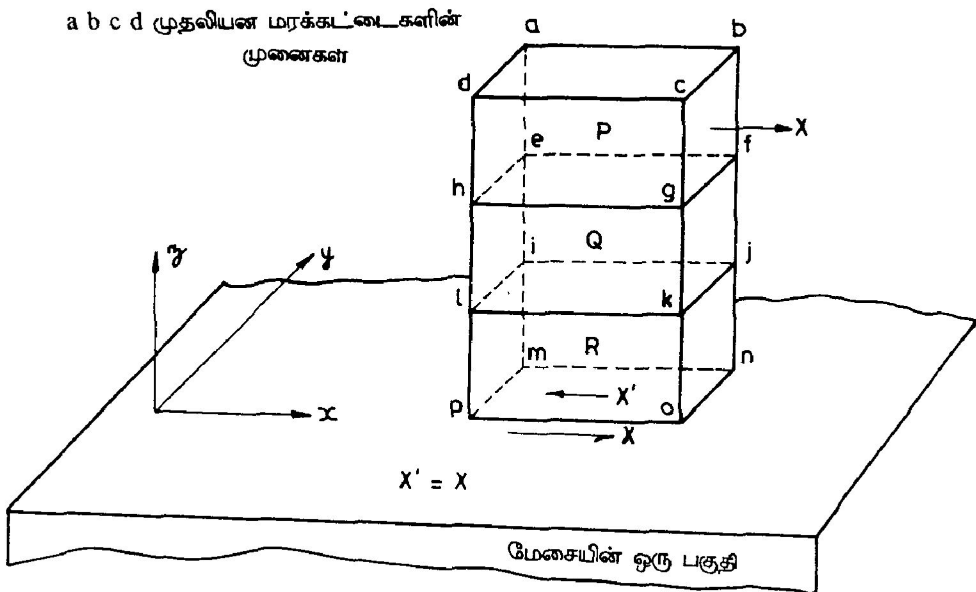
கடந்த அத்தியாயத்தில் அச்சுவிசைகளைப்பற்றியும் அவை விளைவிக்கும் விகலங்கள் பற்றியும் விரிவாகக் கண்டோம். மற்றும் தொடக்கத்தில் எவ்வெவ்விதமான விசைகள் செலுத்தப்படலாம் என்பதையும் (படம் 3.1) விரிவாக நோக்கினோம். அச்சுவிசைகள் என்பன, அவை எப் பரப்பின் மீதுசெலுத்தப்படுகின்றனவோ அப் பரப்பிற்குச் செங்குத்தான திசையில் செலுத்தப்படுவன எனக் கண்டோம். எனவே இவற்றை இயல் விசைகள் (Normal Forces) என்றும், இவை விளைவிக்கும் தகைவுகளை இயல் தகைவுகள் என்றும் அழைக்கிறோம். இனி பரப்புகளுக்கு இணையான திசையிலேயே செலுத்தப்படும் விசைகள் பற்றி விரிவாய்க் காண்போம்.

முதற்கண், செலுத்தப்படும் பரப்புகளுக்கு இணையான திசையில் விசைகள் செயல்படும் சூழ்நிலைகளுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் காண்போம்.

படம் 4.1 இல் P, Q, R என்னும் மூன்று மரக்கட்டைகள் ஒரு மேசையில் மேற்பரப்பின் மீது ஒட்டுப் பசை கொண்டு ஒட்ட வைக்கப்பட்டுள்ள அமைப்புக் காட்டப்பட்டுள்ளது. கட்டை R மேசையின் மீதும், அதன் மீது கட்டை Q யும், கட்டை Q இன் மீது P யும் ஆக ஒன்றன் மேல் ஒன்றாக ஒட்ட வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ் வமைப்பில் X என்னும் விசை செலுத்தப் படுதாய்க் கொள்வோம். அமைப்பு சமனிலையில் இருக்க வேண்டுமானால், X– க்குத் தாங்கி யிலிருந்து (இங்கு மேசை) எதிர்வினை (– X க்குச் சமமாக) செலுத்தப்பட வேண்டும். அமைப் பில் சமனிலையைத் தோற்றுவிக்கும் புறவிசை X உம் படம் 4.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இனி இவ்விசைகள் செலுத்தப்படும் தன்மையைக் காண்போம்.

X என்னும் விசை, கட்டை P யின் மீது cbfg என்ற (செவ்வகப்) பரப்பில் குத்து விசையாகச் (Normal Force) செலுத்தப்படுகிறது. ஆனால் இதுவே தாங்கப்படும் பரப்பின் (mnop) மீது பரப்பிற்கு இணையான திசையில் செலுத்தப்படுகிறது. மற்றும் cbfg என்ற பரப்பின் மீது செலுத்தப்படும் விசை mnop என்னும் பரப்பின் மீது செலுத்தப்படுதற்கு இடையே உள்ள P, Q, R என்னும் மரக்கட்டைகள் ஊடகமாய்ப் பயன்படுகின்றன. இவ் விசைச் செலுத்தங்களை (Force Transfers) உறுப்பு விசைப்படம் (4.2) இல் விளங்கக் காண்க.

இப் படத்தின் cbfg என்னும் பரப்பின் மீது செலுத்தப்படும் X என்னும் விசை அதே அளவில் அதே திசையில் மேசை மீது செலுத்தப்படுகிறது. அதாவது மேசையின் மேற்பரப்பில்



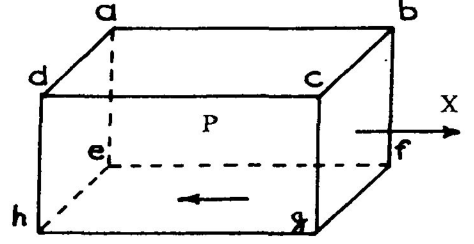
மேசையின் ஒரு பகுதி
படம் 4.1

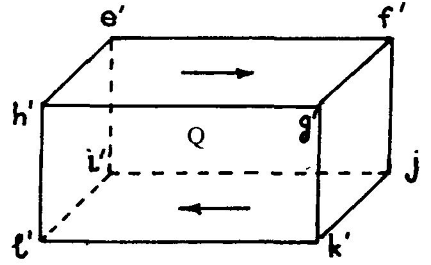
உள்ள mnop என்ற பரப்பின்மீது இத்தளத்தில் சமனிலை நிலைவ, R என்னும் மரக்கட்டையின் மீது மேசை செலுத்தும் எதிர்வினை X′ என்பது – X க்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். இதனைத் தாங்கி எதிர்வினை (Support Reaction) என அழைக்கிறோம். இது கட்டையின் mnop என்ற பரப்பின்மீது – x திசையில் செலுத்தப்படுகிறது. இனி மரக்கட்டை R ஐச் சமனிலையில் இருத்தும் விசை எது எனக் காண்போம். இவ் விசை அக் கட்டையின் i j k *l* என்னும் பரப்பின் மீது கட்டை Q செலுத்தும் விசையே. இதன் அளவும் +X தான். இவ்வாறே efgh, e′ f′ g′ h′, i′ j′ k′ *l*′ ஆகிய பரப்புகளின் மீது செயல்படும் விசைகளையும் அவை செயல்படும்

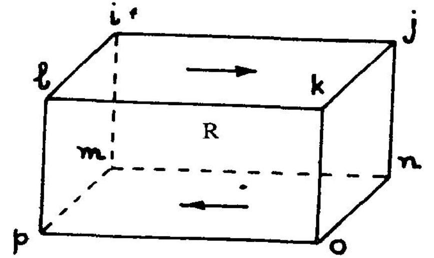
திசைகளையும் படம் 4.2 இல் நோக்குக. இவை யனைத்திலும் விசைகள் அவை செலுத்தப்படும் பரப்புகளுக்கு இணையாய திசையிலேயே செயல் படுகின்றன என்பதைக் காணலாம்.

இனி மற்றோரு எடுத்துக் காட்டினையும் நோக்குவோம். படம் 4.3 ஐ நோக்குக. இதில் A,B என்னும் இரண்டு இரும்புப் பட்டைகள் ஒரு தறையாணி (Rivet) கொண்டு இணைக்கப் பட்டுள்ளன. B யின் வலப்பக்க முனை தாங்கியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. A-யின் இடப்பக்க முனையில் விசை P செலுத்தப்படுகிறது. இவ்விசை எவ்வாறு தறையாணி மூலம் B யின் மீதும், தொடர்ந்து தாங்கியின்மீதும் செலுத்தப்படுகின் றன என்பதைப்படம் (4.3 d) விளக்குகிறது.

தறையாணியை C,D என இருபகுதிகளாகப் பிரித்துத் தனித்தனி அமைப்புகளாய் நோக்கினால், பட்டைகள் தறையாணிமீது எதிரெதிர் திசையில் இறுக்க விசைகளைச் செலுத்துவதையும், தறை யாணியின் மேற்பகுதி C அதன் கீழ்ப்பகுதி D யின் மீது ஆணியின் குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பிற்கு இணையான திசையில் விசை P யைச் செலுத்து வதையும், அவ்வாறே C இன் மீது D செலுத்து வதையும், எதிர்வினை (Reaction) யும் ஆணியின் C எனும் பாகத்தின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பிறகு இணையாய திசையில் இருப்பதையும் காண் கிறோம்.





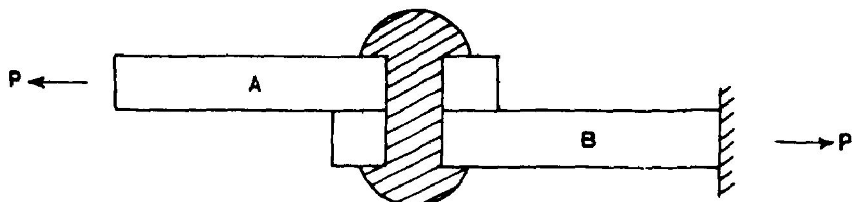


படம் 4.2

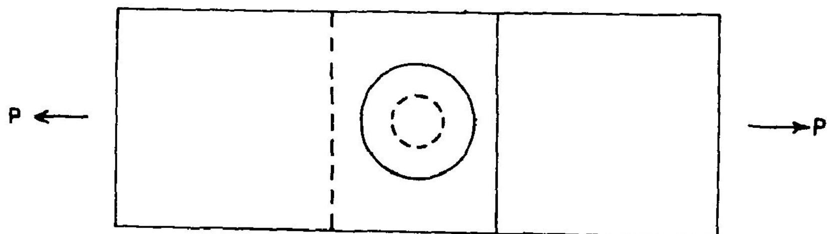
இவ்வாறே நம் அன்றாட வாழ்வில் விசைகள், பரப்புகளுக்கு இணையாய்ச் செலுத்தப்படும் நிலைக்குப் பல எடுத்துக்காட்டுகளை எண்ணிப் பார்க்க முடியும். நிலத்தைச் செதுக்கும் போதும். காய்கறி, பழங்கள் முதலியவற்றை நறுக்கும் போதும் நாம் செலுத்தும் விசை, செலுத்தப்படும் பரப்புகளுக்கு இணையான திசையிலேயே செலுத்தப்படுகின்றது என்பதையும் உணரலாம்.

இவ்வாறு செலுத்தப்படும் பரப்பிற்கு இணையான திசையில் செயல்படும் விசைகளை **நறுக்குவிசைகள்** (Shear Forces) என அழைக்கிறோம்.

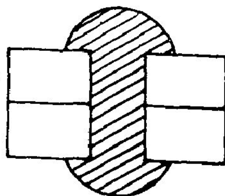
தரையாணி



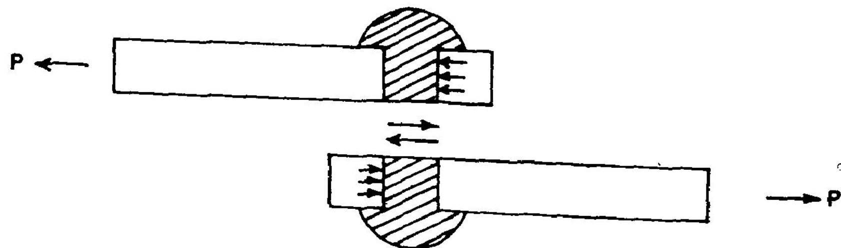
(a) நீள வெட்டுப் படம்



(b) தரைப்படம்



(c) குறுக்கு வெட்டுப்படம்



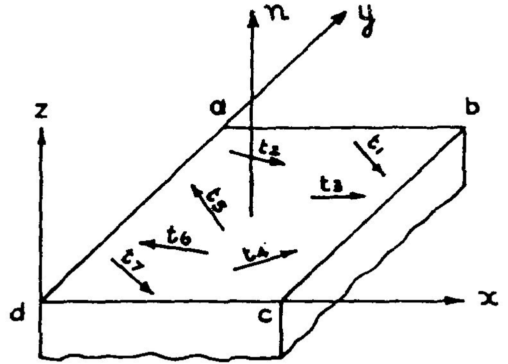
(d) விசைப்படம்

படம் 4.3

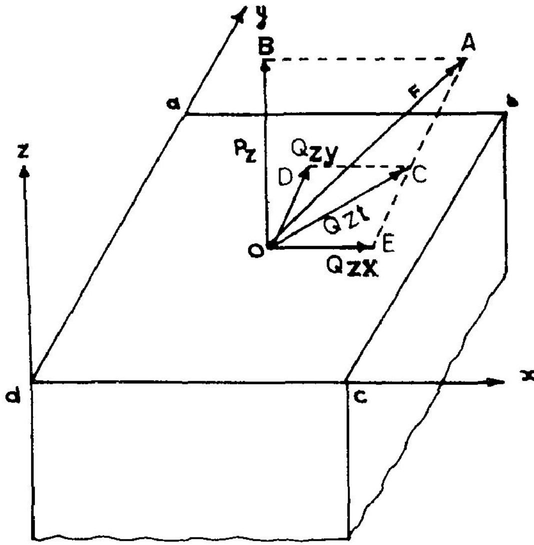
4.2 நறுக்கு விசை, நறுக்குத் தகைவு

நறுக்கு விசைகள் செயல்படும் தன்மைக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கண்டோம். இனி நறுக்கு விசையை வரையறுக்கும் முறையை நோக்குவோம். முதற்படியாக அச்சுவிசைகளை எவ்வாறு வரையறை செய்தோம் என்பதனை மீண்டும் நோக்குவோம். அச்சுவிசைகளின் வரையரை எளிது; முதலாவதாய், அவை செயல்படும் பரப்பு எது என்பதைக் குறிப்பிட வேண்டும். பரப்புகளை வரையறுக்க மிக எளிதாய்ப் பயன்படுத்தப்படும் மரபு, அப்பரப்புகளின் வெளிநோக்கிய குத்துக்கோடுகளின் (Outward Normals) திசையைச் சுட்டுதல் ஆகும். எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு தளத்தின் குத்துக்கோடு x எனும் திசையில் இருப்பின், அத் தளத்தினை x தளம் என வரையறை செய்கின்றோம். செலுத்தப்படும் விசை குத்துக் கோட்டின் திசையில் இருப்பின் அதனை இழுவிசை என்றும், குத்துக் கோட்டுக்கு நேர் திசையில் இருப்பின் அதனை இறுக்க விசை என்றும் வரையறுத்தோம். இதனால் , அச்சுவிசை (அல்லது இயல்விசை) +P எனில் அது குத்துக் கோட்டுக்கு இணையான திசையில் வெளிநோக்கியவிசை என்றும், – P எனில் குத்துக் கோட்டுக்கு இணையான திசையில் உள்நோக்கிய விசை என்றும் புரிந்து கொள்ளலாம்.

இதே முறையில் நறுக்கு விசைகளை வரையறுப்பதில் ஒரு சிக்கல் உண்டு அஃதாவது. எந்த ஒரு சமதளப் பரப்பிறகும் (Plane surface) குத்துக் கோட்டின் திசை ஒன்று தான் இருக்க முடியும். ஆனால், பரப்பிற்கு இணையான திசைகள் எண்ணிலடங்கா (படம் 4.4 ஐ நோக்குக). குத்துக்கோடு (on) z திசைக்கு இணையாக இருப்பதைக் காண் கிறோம். இதனால் நேர்விசை $+P_z$ எனில் abcd எனும் பரப்பின் மீது on திசையில் செயல் படும் விசை என்றும் புரிந்து கொள்ளலாம். ஆனால், இப் பரப்பிற்கு இணையாய் எண்ணிலடங்காத திசைகள் (t_1, t_2 . . . முதலியன) இருப்பதால், abcd என்ற பரப்பின் மீது செயல்படும் நறுக்குவிசை என்று கூறும்போது அதன் திசை வரையறுக் கப்படுவதில்லை. ஆனால் விசை செயல்படும் திசையையும் தனியாய்ச் சுட்டுதல் அவசியம். (P என்னும் குறியீட்டை நேர்விசைகளைக் குறிப்பிட வைத்துக் கொண்டு நறுக்குவிசைகளை Q எனக் குறிப்பிடுதல் மரபு அதனால் நறுக்குவிசை செயல்படும் தளத்தின் திசையையும், (அஃதாவது தளத்தின் குத்துக் கோட்டின் திசை) விசையின் திசையையும் சுட்ட நாம் இரண்டு கீழடைகளைப் (Subscripts) பயன்படுத்தவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாய் Q_{zt} என்றால் (z திசைக்குச் செங்குத்தாயுள்ள



படம் 4.4



படம் 4.5

தொரு பரப்பின் மீது t என்னும் திசையில் செலுத்தப்படும் (நறுக்கு) விசை என்பதைக் குறிப்பிடும். எப்போதும், முதல் கீழடை தளத்தின் திசையையும் இரண்டாம் கீழடை விசையின் திசையையும் குறிப்பிடப் பயன்படுத்தப்படல் வேண்டும். ஆனால், இணைத் திசைகள் எண்ணிலடங்காதன எனக் கண்டோம். ஆகவே ஒவ்வொரு திசைக்கும் ஒரு பெயரிட்டு அதனைக் கீழடையாகப் பயன்படுத்துதல் என்பது இயலாது. ஆனால், விசையின் திசை எவ்வாறிருப்பினும் அவ்விசையை இரு செங்குத்துத் திசைகளில் கூறுபடுத்தி (Resolve), இருதிசைக் கூறுகளின் அளவீட்டினையும் குறிப்பிடுவதன் மூலம் விசையைத் தெளிவாக வரையறுக்கலாம். படம் 4.5 இல் abcd என்ற தமளத்தின் மீது (இத்தளம் z திசையில் குத்துக்கோடு கொண்டிருப்பதால் z தளம் (z plane) என அழைக்கலாம்) F என்னும் விசை (OA) செலுத்தப்படுகிறது. இதன் குத்துக்கூறு OB (Normal component), P_z எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. தொடுகூறு (OC) Q_{zt} எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இதனை x,y திசைகளுக்கு இணையாய்க் கூறுபடுத்த Q_{zx}, Q_{zy} என்னும் விசைகள் கிடைக்கப் பெறுகிறோம். இப்போது F என்னும் விசை P_z (அல்லது P_{zz}) Q_{zx}, Q_{zy} என்னும் கூறுகளால் திட்டவட்டமாய் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.*

அடுத்துப் படங்களில் விசைகளைக் குறிப்பிடும் முறைபற்றியும் நோக்குவோம். சாதாரணமாக விசை இயலில் (Merchanics) விசைகளின் அளவும் திசையும் மட்டுமே தெரிந்தால் போதும். அதனால் அங்கு விசைகளை ஓர் அம்புக் குறியால் காட்டுதல் (→) போதும். ஆனால், திண்மவிசையியலில் விசையின் செயல்பாட்டுத் தன்மையும் முக்கியமே. அதனால் இனி வரும் பகுதிகளிலெல்லாம் குத்துவிசைகளைக் குறிக்கச் சாதாரண அம்புக் குறி (⟶)களும் நறுக்கு விசைகளைக் குறிக்கக் குறையம்புக் குறிகளும் (⇀ அல்லது ↽) பயன்படுத்தப்படும்.

இனித் தகைவுகளைக் குறிப்பிடும் முறைகளையும் நோக்குவோம். குத்து விசைகளை அவை செயல்படும் பரப்பால் வகுக்கக் குத்துத் தகைவு கிடைக்கும்.

* குறிப்பாய் வரையறுக்கப்படாதபோது குத்துக் கோடுகளின் திசை வெளி நோக்கிய வண்ணமே குறிப்பிடப்பட வேண்டுமாதலால் இனிக் 'குத்துக்கோடு (Normal) என்ற சொல்லை வெளிநோக்கிய குத்துக்கோடு என்ற பொருளில் மட்டுமே பயன்படுத்துவோம்.

எ.கா.

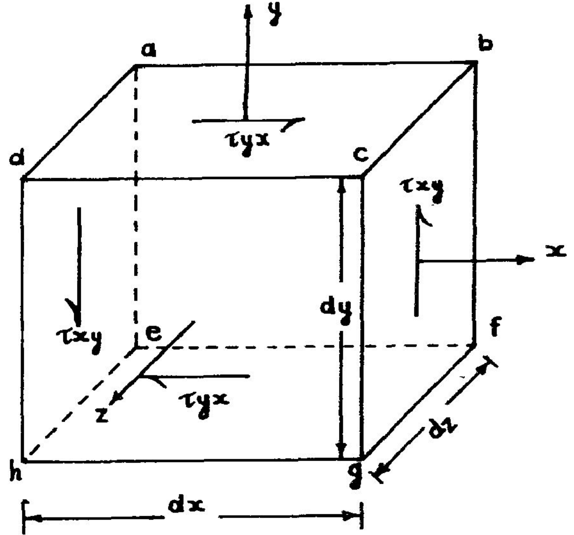
$$\text{குத்துத் தகைவு} \quad \sigma_z = \frac{P_z}{A_z}$$

$$\text{நறுக்குத் தகைவு} \quad \tau_{zx} = \frac{Q_{zx}}{A_z} \qquad (4.1)$$

$$\text{நறுக்குத் தகைவு} \quad \tau_{zy} = \frac{Q_{zy}}{A_z}$$

(z என்ற திசையில் குத்துக் கோடு கொண்ட தளத்தின் பரப்பினை A_z என்கிறோம். இவ்வாறே பிற பரப்புகளையும் வரையறை செய்க.)

இனி நறுக்குத் தகைவுகளின் மற்றொரு முக்கிய தன்மைபற்றியும் நாம் கருத வேண்டும். நறுக்குத் தகைவுகளுக்குட்பட்ட ஒரு சிறிய துணுக்குகள் (Element) சமனிலையை விளக்கப் படம் 4.6 ஐப் பயன்படுத்துவோம். (குத்துத் தகைவுகளையும், நறுக்குத் தகைவுகளையும் குறிப்பிட முறையே σ, τ என்னும் கிரேக்க எழுத்துகள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன.)



இணை நறுக்கு விசைகள்

படம் 4.6

abcdefgh என்ற முனைகளையும் dx, dy, dz ஆகிய நீள உயர, அகலங்களையும் கொண்ட இத் துணுக்கின்மீது τ_{xy} என்னும் நறுக்குத் தகைவு (அதாவது x தளத்தின் மீது y திசையில் செயல்படும் தகைவு) செயல்படுதாய்க் கருதுவோம். x தளத்துக்கு நேர் எதிரில் உள்ள x′ தளத்தின் மீதும் (அதாவது –x திசையில் குத்துக் கோடு கொண்ட தளம்) செயல்படும் நறுக்குத் தகைவின் அளவும் τ_{xy} ஆக இருந்தால் தான் y திசையில் விசைச் சமனிலை (Force equilibrium) சாத்தியமாகும். x தளத்தின் மீது மொத்த நறுக்கு விசை Qxy, (τ_{xy} dy dz), x′ தளத்தின் மீது மொத்த நறுக்கு விசை Q′xy (τ_{xy} . dy . dz) ஆக இருக்கும். இவ்விரண்டு விசைகளும் அளவில் சமமாகவும் திசையில் எதிராகவும் இருத்தல், விசைச் சமனிலையை உறுதி செய்யும். அதே

சமயத்தில் இவை ஒரே நேர்க்கோட்டின் மீது செயல்படாமையின், இவ்விரு விசைகளும் சேர்ந்து ஒரு சுழல்திருப்புமையை (Couple) உருவாக்குகின்றன. இச் சுழல் திருப்புமையின் அளவு $dM = Q_{xy}.dx = \tau_{xy}\, dy\, dz\, dx$. அதனால், திருப்புமைச்சமநிலையும் (Moment Equilibrium) இருக்கவேண்டுமெனில் இதற்கு எதிரான சுழல்திருப்புமை ஒன்றும் செயல்பட வேண்டும். இச் சுழல் திருப்புமை விளைவிக்கும் விசைகளும் சமநிலையில் இருத்தல் அவசியம்.

τ_{xy} . dx dy dz என்னும் சுழல்திருப்புமை, துகளினை அதன் அச்சினை இருசாகக் கொண்டு கடிகை எதிர் திசையில் (Anticlockwise direction) சுழற்ற முற்படுகிறது. அதனால், இதன் சமனிலை நிறுத்தி(Equilibrant) யாவது துகளை அதன் அச்சினை இருசாகக் கொண்டு கடிகைத் திசையில் (Clockwise direction) சுழற்ற முற்பட வேண்டும். இத்தகைய சுழல் திருப்புமையும் தந்து தாமும் சமனிலையில் (பிற விசைகளின் தேவையின்றி) இருக்கக் கூடியவை y தளத்தில் மீது x திசையில் செலுத்தப்படும் நறுக்குத் தகைவுகளே (படம் 4.6ஐ நோக்குக): இத் தகைவுகள் τ_{yx} எனக் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

$$\tau_{yx} \text{ விளைக்கும் சுழல் திருப்புமை} = Q_{yx}.dy = \tau_{yx} . dx\, dz\, dy$$

∴ சுழல் திருப்புமை சமனிலைச் சமன்பாட்டினை,

$$\tau_{xy} . dx\, dy\, dz + \tau_{yx}\, dx\, dy\, dz = 0$$

என எழுதலாம். இங்கு dxdydz என்பன துணுக்கின் கன அளவு, dV; இது சிறிதாயினும் சுழியன்று. அதனால் சமன்பாடு 4.2 ஐ dV ஆல் வகுக்க

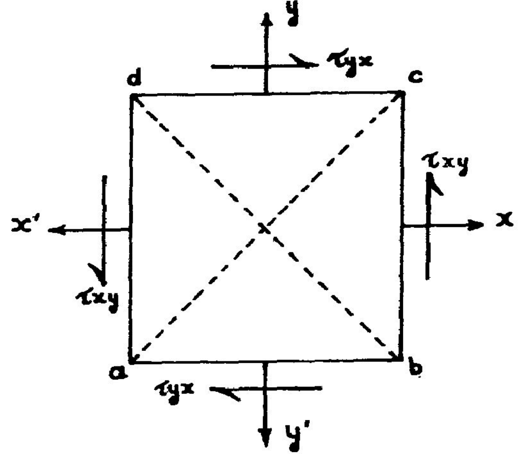
$$\tau_{xy} + \tau_{yx} = 0$$

அஃதாவது ,

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} \qquad 4.2$$

என்ற உறவினைப் பெறுகிறோம். அஃதாவது ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தான தளங்கள் இரண்டனுள் ஒன்றன்மீது மற்றத் தளத்தின் குத்துத் திசையில் செலுத்தப்படும் நறுக்குத் தகைவும், முதல் தளத்தின் குத்துத் திசையில் இரண்டாம் தளத்தின் மீது செலுத்தப்படும் நறுக்குத் தகைவும் அளவில் சமமாயும், குறியில் எதிராயும் இருக்கும் என்பதைக் காண்கிறோம். (இவ்வாறே $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$; $\tau_{yz} = -\tau_{zy}$ என்ற உறவுகளையும் நிறுவலாம். மேலும் சொல்லப் போனால் τ_{yx} செலுத்தாமல் தனியே τ_{xy} மட்டும் செலுத்தல் இயலாது. இவ்விரு தகைவுகளும் பிணைந்தே இருத்தலின், இவற்றைப் பிணை நறுக்குத் தகைவுகள் (Complementay shear stresses) என அழைக்கின்றோம்.

அடுத்து , நறுக்குத் தகைவுகளின் குறியையும் வரையறுப்போம். சமன்பாடு 4.3 .இல் τ_{xy} நேர்மறையாய் (+ve) இருப்பின் τ_{yx} எதிர்மறையாய் (–ve) இருக்க வேண்டும் என்பது சமனிலை விதி. இவற்றுள் எது நேர்மறை என்பது வரையறுக்கப்பட வேண்டும். இங்கு (அச் சுத் தகைவுகளைப் போலன்றிச்) சீரான மரபு ஏதும் பின்பற்றப்படவில்லை. படம் 4.7 இல் தளத்தின்மீது துணுக்கின் வீழல் (Projection) காட்டப்பட்டுள்ளது. இதில் τ_{xy} என்னும் தகைவுகள் (x, x′ - ஆகிய தளங்களின் மீது செயல்படும் இரண்டு தகைவுகள்) துணுக்கினைக் கடிகை எதிர் திசையில் (Anticlockwise direction) சுழற்ற முற்படுகின்றன. (சாதாரணமாய்க் கோணங் களை அளக்கும்போது இத் திசையையே நேர்மறையாகக் கொள்கிறோம்). ஆகை யால் இந் நறுக்குத் தகைவினை நேர் மறையாய் வரையறுக்கிறோம். நறுக்குத் தகைவுகள் τ_{yx} (y, y′ ஆகிய தளங்களின் மீது செயல்படுவன) துணுக்கினைக் கடிகைத் திசையில் (Clockwise direction) சுழற்ற முற்படுவதால் இவற்றை எதிர்மறையாய் வரையறுக்கின்றோம். (மாறாகக் கடிகைத் திசையில் சுழற்ற முற்படும் நறுக்குத் தகைவுகளை நேர்மறையாகக் கொள்வோரும் பலர் இருத்தலின், நாம் பின்பற்றும் மரபு எது என்பதைத் தேவைப்படும் போது தெளிவாக உரைத்தல் அவசியம்)*



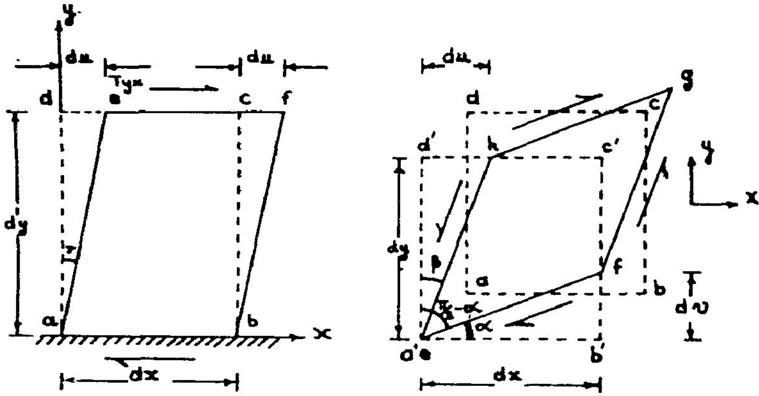
படம் 4.7

4.3 நறுக்கு விகலங்கள்

இனி, நறுக்கு விகலங்கள் (Shear Strains) பற்றிக் கற்க முனைவோம். படம் 4.8 இல் நறுக்கு விசைகள் விளைக்கும் நலிவுகள் காட்டப்பட்டுள்ளன.

முதலில் விகலத்தின் தன்மைபற்றிய விளக்கத்திற்குப் படம் 4.8 (i) ஐ நோக்குவோம். இதில் அடிப்பரப்பு உறுதியாய்ப் பற்றப்பட்டுள்ள (Rigidly fixed) துணுக்கொன்று காட்டப்பட்டுள் ளது. தகைவு செலுத்தப்படுமுன் துணுக்கின் வடிவம், abcd என்னும் செவ்வகத்தால் காட்டப் பட்டுள்ளது. தகைவு செலுத்தும்போதும் ab என்ற அடிப்பரப்பு உறுதியாகப் பற்றப்பட்டி ருப்பதால் நகராது. ஆனால், அது தவிர மற்றப் பகுதிகள் யாவும் இடப்பெயர்ச்சி (Displacement) அடைகின்றன. cd என்னும் பரப்பின் (இங்கு அஃது ஒரு கோடாகக் காட்டப்பட்டிருப்பினும்

* அச்சு விசைகளில் இழுவிசையை நேர்மறையாகவும், இறுக்க விசையை எதிர் மறையாகவும் கொள்ளல் மரபு.



படம் 4.8 நறுக்குத் தகைவுகள் விளைக்கும் நலிவுகள்

அஃது ஒரு பரப்பின் வீழலே (Projection) என்பது கவனத்தில் இருக்க வேண்டும்) இடப்பெயர்ச்சி du எனில் அதன் பிந்தியநிலை ef என்ற கோட்டினால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

விகலத்தை எவ்வாறு வரையறுத்தோம் என்பதை மீண்டும் நினைவு கூர்வோம். ஓர் உறுப்பு அடையும் மொத்த இடப்பெயர்ச்சியை (நீட்சியோ குறுக்கமோ) உறுப்பின் மொத்த நீளத்தால் வகுத்து இவ் விகிதத்தையே விகலம் என அழைத்தோம். அவ்வரையறையை இங்கு மேலும் செழுமைப் படுத்துவோம். விகலத்தின் அளவு தகைவை ஒட்டி இடத்திற்கிடம் மாறக்கூடும். அதனால் மொத்த இடப்பெயர்ச்சிக்கும் மொத்த நீளத்திற்கும் இடையான விகிதம் சராசரி விகலமே யன்றி உறுப்பின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் விகலத்தின் அளவை இது தாராது. அதனால் தகைவுகள் மாறாதிருக்கும் பகுதிகளில் விகலங்களையும், நீட்சிகளையும் தனித்தனியே கணக்கிட்டறிதலை மூன்றாம் அத்தியாயத்தில் கண்டோம். தகைவு தொடர்ந்து (Continuously) மாறிக்கொண்டேயிருக்கும் சூழ்நிலையை இம் மாற்றம் மிகச் சிறிதாய் (புறக் கணிக்கத் தக்க அளவில்) இருக்கக் கூடிய ஒரு சிறு நீளத்தை (Δl என்போம்) எடுத்துக்கொண்டு அந் நீளத்தில் மொத்த இடப் பெயர்ச்சி $\Delta \delta$ எனில்

$$\text{விகலம்,} \quad \varepsilon = \frac{\Delta \delta}{\Delta l}$$

இடப் பெயர்ச்சிகள் எத்திசையில் இருப்பினும் அவற்றை x, y, z என்ற (ஒன்றனுக் கொன்று செங்குத்தான) மூன்று ஆயத்திசைகளில் கூறுபடுத்திக் கூறுகளை முறையே u, v, w என அழைக்கிறோம். இவற்றின் அளவுகள் (துணுக்கில்) மிகச் சிறியனவாகவே இருக்குமாதலின் இங்கு அவை du, dv, dw போன்ற குறியீடுகளால் உரைக்கப்படுகின்றன. அல்லது $\varepsilon = \dfrac{d\delta}{dl}$ என உரைத்தலே மிகச் சரியான வரையறையாகும். x, y, z திசைகளில் இவ்விகலத்தின் கூறுகளை ε_x, ε_y, ε_z எனக் குறிப்பிடின்,

$$\varepsilon_x = \frac{d\,\delta_x}{d\,l_x} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{d\,u}{d\,x} \quad \text{எனலாம்.}$$

அதனால் அச்சு விகலங்கள்,

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{dv}{dy} \qquad (4.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}$$

இதே கண்ணோட்டத்தில் நறுக்கு விகலங்களைப் பற்றி எண்ணிப்பார்போம். படம் 4.8 (1) இல் நாம் காணும் இடப்பெயர்ச்சி du. இடப்பெயர்ச்சி அடைகின்ற தளங்கள் ad,bc (ae,bf என்னும் நிலையை அடைகின்றன). இத் தளங்களின் நீளம் dy; எனவே

$$\text{விகலம்} = \frac{\text{இடப்பெயர்ச்சி } du}{\text{தளத்தின்நீளம் } dy}$$

நேர்விகலங்களைப் போலவே, நறுக்கு விகலமும் இடப்பெயர்ச்சி ÷ தளத்தின் நீளம் என்றதொரு விகிதமாகவே இருப்பினும், இவ்விகிதம் ஆரகம் (Radian) என்ற அளவில் தரப்படுகிறது.

அஃதாவது . நறுக்கு விகலம் $\gamma = \dfrac{du}{dy}$

என வரையறுக்கப்பட்டு கோணப்பெயர்ச்சியாக (Angular Displacement) அறியப்படுகிறது. படம் 4.8 (1) காட்டப்பட்டுள்ள இடப்பெயர்ச்சிகள் தாங்கியை ஒட்டியுள்ள துணுக்குகளுக்கு மட்டுமே பொருந்துவன. திண்மத்தின் உட்பகுதியுள்ளதொரு துணுக்கின் இடப்பெயர்ச்சிகள், படம் 4.8 (ii)இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. நறுக்கு விசைகளின் செயல்பாட்டுத் தன்மையைப் புரிந்து கொள்ளப்படம் 4.7 ஐ நோக்குக. இதில் நறுக்குத் தகைவுகள் τ_{xy}, τ_{yx} இரண்டின் திசைகளை நோக்கும்போது, முனைகள் a, c இரண்டும் வெளிநோக்கி இழுக்கப்படுவதையும் b, d என்னும் முனைகள் உள்நோக்கிக் கவரப்படுவதையும் காணமுடியும். அஃதாவது மூலை விட்டம் ac நீட்சியடையும்; மூலைவிட்டம் bd குறுகும். இந் நலிவுகள் படம் 4.8 (ii) இல் காட்டப் பட்டுள்ளன. மூலைவிட்டம் ac நீட்டப்பட்டு eg என்ற நிலையையும், மூலைவிட்டம் bd குறுக் கப்பட்டு fh என்ற நிலையையும் அடைகின்றன. அளவீடுகளின் வசதியை முன்னிட்டு abcd என்ற செவ்வகத்தின் a என்ற முனையை (செவ்வகத்திற்குச் சுழற்சியேதும் விளைக்காமல் e என்ற முனையுடன் பொருந்தச் செய்து, abcd யின் புதிய நிலையை a'b'c'd' எனும் செவ்வகத்தால் குறிப்

பிடுவோம். இப்போது ab என்ற தளம் அடைந்த சுழற்சியை $+\alpha$ எனவும், bd என்ற தளம் அடைந்த சுழற்சியை $-\beta$ எனவும் கொண்டால்,

$$\alpha = \frac{dv}{dx}, \qquad -\beta = \frac{du}{dy}$$

எனப் பெறலாம். அதனால் நறுக்கு விகலம் என்பதன் வரையறையை இங்கு உரைக்க முடியும்.

நறுக்கு விகலம் (γ) என்பது ஒரு செங்கோணம் அடையும் கோணக்குறுக்கமே (reduction in corner angle of a right angled corner) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அஃதாவது, நறுக்கு விகலம்,

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta$$

$$= \alpha - \beta = \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dy}$$

இடப்பெயர்ச்சிகள் u, v, w என்பன x, y, z என்ற மூன்று மாறிகளையும் சார்ந்து இருக்கும் பட்சத்தில் நாம்,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4.5)$$

என பகுதி வகைக்கெழுக்களால் (Partial derivatives) உரைப்பது பொருத்தமாகும். அவ்வாறே அச்சு விகலங்களையும் $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$* போன்ற குறைவகைக் கெழுக்களால் குறிப்பிடலே சாலும்.

நறுக்குத் தகைவுக்கும், நறுக்கு விகலத்திற்கும் இடையேயும் (மீட்சி எல்லைக்குள் பொருள் இருக்கும் வரை) நேர்விகிதப் பொருத்தம் இருக்கவேண்டும்.

அஃதாவது, $\tau \propto \gamma$

அல்லது $\tau = G\gamma$

G என்னும் விகிதம், நறுக்கக் குணகம் (Rigidity Modulus) என அழைக்கப்படுகிறது. (அச்சுத் தகைவு விகல விகிதமும் கூட (யங் என்ற அறிஞரின் பெயரால்) யங்கின் குணகம் (Young's Modulus) என ஆங்கிலத்தில் பெயரிடப்பட்டு, E எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதனை நாமும் E என்ற குறியீட்டால் வழங்கி நீள்மைக் குணகம் என அழைப்போம்).

* வலிமையியலின் தொடக்கக் கட்டத்தில் தகைவு ஆய்தலே முதன்மை பெறுகிறது. விகல ஆய்வுகள் நூலின் இறுதிப் பகுதியில் எடுத்துக் கொள்ளப் படும்போது, சமன்பாடு 4.5 ,இன் கருத்து ஆழமாய் விளக்கப்படும்.

மீள்மைக் குணகங்கள் E, G இரண்டும் ஒன்றோடொன்று தொடர்புள்ளவை; இடையிலான தொடர்பினைப் பின்னர்க் காண்போம். இப்போதைக்கு நறுக்குத் தகைவுகளின் ஆய்வுபற்றி மேலும் சில கருத்துகளைக் காண்போம்.

4.4. நறுக்கு வலிமை (Shear Strength)

நறுக்கு விசை அல்லது நறுக்குத் தகைவு செலுத்தப்படும் பொருள்கள் அவ்விசைகளைத் தாங்கித் தாம் சிதைவுறாமல் செயல்பட வேண்டுமெனில், நாம் செலுத்தும் நறுக்குத் தகைவு பொருளின் நறுக்கு வலிமையை விஞ்சாதிருக்க வேண்டும். அச்சு விசைகளில் எவ்வாறு ஆய்ந்தோமோ அதே வகையில் இங்கும் ஆய்ந்து பல்வேறுவித வலிமைகளை வரையறுக்கலாம்.

உச்ச நறுக்கு வலிமை (Ultimate shear strength) : எந்த அளவு நறுக்குத் தகைவு செலுத்தப்படும்போது, பொருள் சிதைபாடு (Failure) அடைகிறதோ அவ்வளவையே உச்ச நறுக்கு வலிமை என்கிறோம்.

காப்பு நறுக்கு வலிமை (Safe Shear strength) : பொருளின் உச்ச வலிமையில் ஒரு பகுதியையே நாம் பொருளின் மீது அனுமதிப்போம் என்பதை முன்னரே கண்டோம். இவ்வாறு அனுமதிக்கப்படும் நறுக்குத் தகைவின் அளவு காப்பு நறுக்கு வலிமை எனப்படும். இஃது, அனுமதிக்கப்பட்ட நறுக்குத் தகைவு (permissible shear stress) அல்லது நடைமுறை நறுக்குத் தகைவு (working stress in shear) என்றும் அழைப்படுகிறது.

ஓர் உறுப்பின் வடிவமைப்பில் (Design) அப் பொருளின் நீள் வலிமை இறுக்க வலிமை, நறுக்கு வலிமை என மூவித வலிமைகளுமே கருத்தில் கொள்ளப்பட வேண்டும். இக்கருத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம். (எடுத்துக்காட்டுகளில் வலிமை எனும் சொல் அடைமொழியேதுமின்றிப் பயன்படுத்தப்பட்டால், அஃது அனுமதிக்கப்பட்ட தகைவையே (Permissible Stress) குறிப்பதாய்ப் பொருள் கொள்ளவேண்டும்)

எ.கா. 4.1:

படம் 4.1 இல் பொடுக்கப்பட்டுள்ள அமைப்பில் கட்டைகள் மூன்றும் ஒரே அளவின என்றும் ab = 80 mm, bc = 40mm, ae = 25 mm என்றும் கொள்வோம். பொருளின் இழுவலிமை, 12 MPa, நறுக்கு வலிமை 3 Mpa, எனில், விசை X அதிகபட்சம் எவ்வளவு இருக்க முடியும்?

தீர்வு:

அமைப்பில் cbfg என்னும் பரப்பின் மீது இழுவிசை செலுத்தப்படுகிறது. இது தாங்கக் கூடிய அதிக பட்ச இழுவிசை = இழுவலிமை × குறுக்குப் பரப்பு

$$= 12 \times 40 \times 25 \text{ N}$$

$$= 12000 \text{ N} = 12 \text{ kN}$$

இவ் இழுவிசையை அனுமதிக்க முடியுமா என்பதைக் காண இதனால் வேறு பரப்புகளில் தோற்றுவிக்கப்படும் நறுக்குவிசை பொருளின் நறுக்கு வலிமையை விஞ்சாமல் உள்ளதா என்பதை அறிய வேண்டும்.

நறுக்கு விசை செலுத்தப்படும் பரப்பு (efgh) = $80 \times 40 = 3200\ mm^2$

பொருளின் நறுக்கு வலிமை = 3 MPa

ஆகவே (efgh) மீது செலுத்தப்படக் கூடிய

உச்ச நறுக்கு விசை = $\frac{3200 \times 3}{1000} = 9.6$ kN.

அஃதாவது கட்டையின் இழுவலிமை 12 kN. ஆக இருப்பினும் நறுக்கு வலிமை 9.6 kN ஆக இருப்பதால் நாம் செலுத்தக்கூடிய விசை X யின் அளவு 9.6 kN க்கு மேல் இருக்க முடியாது.

∴ X இன் உச்ச அளவு $X_{max} = 9.6$ kN.

எ.கா. 4.2

படம் 4.3 இல் காட்டப்பட்டுள்ள இணைப்பில் இரும்புத்தகடுகளில் தடிப்பு 12mm, அகலம் 80 mm, தறையாணியின் விட்டம் 20 mm எனில் தகடுகளின் இழுவலிமை 150 MPa தறையாணியின் நறுக்கு வலிமை 94.5 MPa எனக் கொண்டு இணைப்பின் மீது செலுத்தக்கூடிய விசையின் உச்ச அளவினைக் கணக்கிடுக. தறையாணியின் நசுக்கு வலிமை (bearing strength) போதிய அளவிற்கு இருப்பதாகக் கருதலாம். இணைப்பின் தரைப்படம் மீண்டும் கொடுக்கப்படுகிறது.

தகட்டின் எல்லாக் குறுக்குப் பரப்புகளிலும் செயல்படும் விசையின் அளவு ஒன்றே; அஃதாவது P. ஆனால் தகட்டின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு, தறையாணித் துளை இல்லாத இடங்களில் $80 \times 12\ mm^2$ ஆகவும், தறையாணித் துளை (Rivet hole) உள்ள பகுதியில் $60 \times 12\ mm^2$ ஆகவும் இருக்கும் . அதனால் $60 \times 12 mm^2$ பரப்புத் தாங்கல் கூடிய இழுவிசையையே தகட்டின் இழுவலிமையாய்க் கொள்ள வேண்டும்.

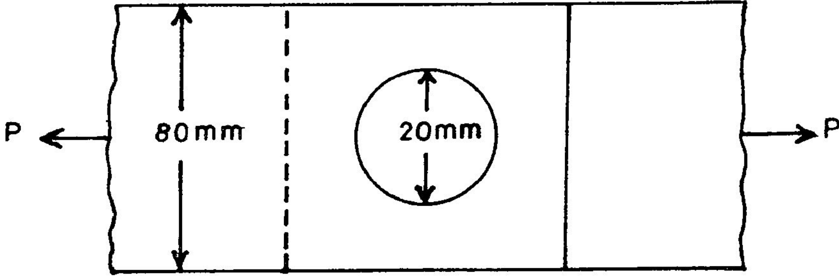
∴ தகட்டின் இழுவலிமை* $= 60 \times 12 \times 150 = 108000$ N = 108 kN

தறையாணியின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பில் நறுக்கு விசையாக, P செலுத்தப்படுமாதலின், தறையாணியின் நறுக்கு வலிமையும் காணப்பட வேண்டும்.

தறையாணியின் நறுக்கு வலிமை * = பொருளின் நறுக்கு வலிமை × குறுக்குப் பரப்பு

$= 94.5 \times \frac{\pi}{4}(20^2) = 29688$ N = 29.688 kN

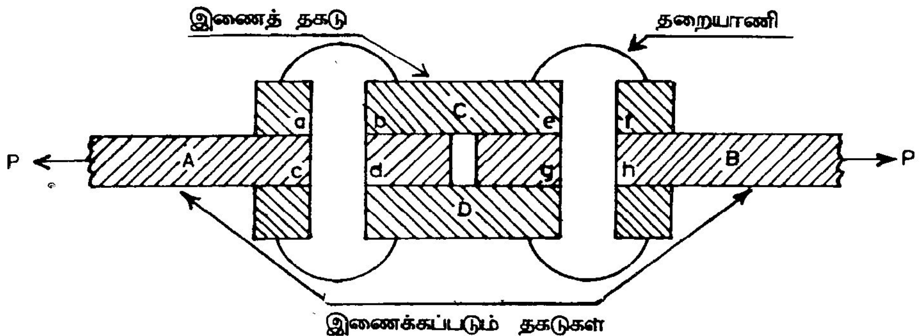
* ஒரு பொருளின் வலிமை என்பது தகைவின் அளவாகவும், ஓர் உறுப்பின் வலிமை என்பது விசையின் அளவாகவும் இருத்தலைப் பகுத்தறிக. (ஆங்கிலத்திலும் இரண்டு அளவுகளும் "strength" என்னும் ஒரே சொல்லால்தான் குறிப்பிடப்படுகின்றன)



படம் 4.9

எனவே, P யின் உச்சஅளவு = 29.688 kN.

இவ் இணைப்பில் தகடுகளின் வலிமையில் ஒரு சிறுபகுதியையே நாம் விசையாகச் செலுத்த முடிகிறது என்பதைக் காண்கிறோம். அதனால், இணைப்பு இல்லாமல் முழுத்தகடாக இருப்பின், நாம் பயன்பெறக்கூடிய வலிமையில் $\left(\dfrac{80 \times 12 \times 150}{1000} = 144 \text{ kN}\right)$ ஒரு பகுதியையே இரு தகடுகளை இணைப்பதனால் பெறுகிறோம். ஆனால், பல சூழ்நிலைகளில் இணைப்பு தவிர்க்கப்பட முடியாது. அதனால், இணைப்பினை எவ்வளவுக் கெவ்வளவு வலிவுடையதாக ஆக்குகிறோமோ அவ்வளவுக்குப் பொருளில் சிக்கனம் செய்ய முடியும். படம் 4.9 இல் காட்டப்பட்டுள்ளதை விட வலிமையானதொரு இணைப்பு முறையை படம் 4.10 இல் காண்க.

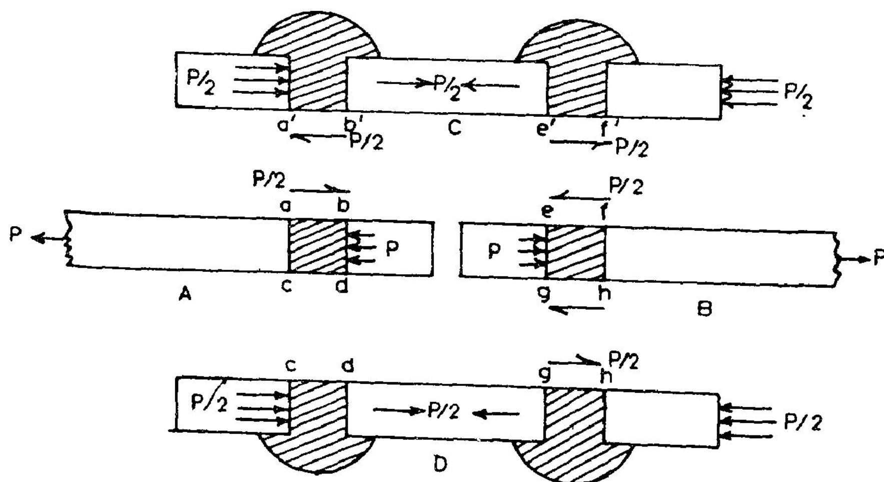


படம் 4.10

படம் 4.10 இல் உள்ளவாறு இழுக்கப்படும் தகடுகள் இரண்டையும் மேலும் கீழுமாக இரண்டு இணைத்தகடுகளோடு சேர்த்து இரண்டு தறையாணிகளைக் கொண்டு இணைக்கலாம். இங்கு விசைகள் செலுத்தப்படும் தன்மையை நோக்குவோம். (படம்4.11) இணைக்கப்படும் தகடுகளுள் ஒன்றான A யின் மீது செலுத்தப்படும் இழுவிசை P, B என்னும் தகட்டின் மீது எவ்வாறு செலுத்தப்படுகிறது என்பதைப் படம் 4.11 விளக்குகிறது. அஃதாவது (தறையாணி மூலம்) C,D என்னும் இரண்டு பிணைத் தகடுகள் (Cover plates) ஊடாகவே விசை (சமமாக, P/2 என்னும் அளவில்) செலுத்தப்படுகிறது. இச் செலுத்தம் தறையாணியின் ab, cd என்னும் இரண்டு பரப்புகளின் வழியாக நிகழ்கிறது. ஒவ்வொரு பரப்பின் மீதும் நறுக்கு விசை P/2 தான் செலுத்தப்படும். ஆனால், இவ்விசை அஃதாவது P/2 யின் அளவு தறையாணியின் நறுக்கு வலிமையின்அளவிற்கு இருக்கலாம்.

$$\therefore \quad \frac{P}{2} = 29.688 \text{ kN}$$

அல்லது $$P = 59.376 \text{ kN}$$

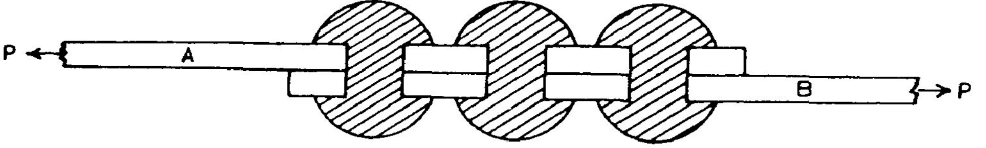


படம் 4.11

அடுத்துப் பிறிதொருவகை இணைப்பினால் எவ்வாறு இணைப்பின் வலிமை அதிகரிக்கப்படலாம் என்பதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டினைக் காண்போம்.

எ.கா. 4.4

படம் 4.12 இல் காட்டப்பட்டுள்ள இணைப்பில் அதிகபட்சம் எவ்வளவு இழுவிசை (அல்லது இறுக்கு விசை) செலுத்த முடியும்? என்பதைக் கணக்கிடுக. (தகடுகள், தறையாணி களின் வலிமையை முந்தைய எடுத்துக்காட்டுகள் போன்றே கொள்வோம்).



தகடுகள் A B இவற்றின் தடிப்பு 10 mm அகலம் 80 mm
தறையாணியின் விட்டம் 20 mm

படம் 4.12

தீர்வு:

தகடுகள் செலுத்தும் விசை ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றனுக்கு மூன்று தறையாணிகள் மூலம் தான் செலுத்தப்படுகிறது. அதனால் ஒவ்வொரு தறையாணி வழியாகவும் செலுத்தப் படும் (சராசரி) விசை $P/3$ எனக் கொள்கிறோம்.

20 mm விட்டமுள்ள தறையாணியின் நறுக்கு வலிமை (ஏற்கனவே கண்டவாறு)		=	29.688 kN
அஃதாவது	P/3	=	29.688 kN
எனவே, இணைப்பின் வலிமை	P	=	89.064 kN

இனி படம் 4.12 இல் காட்டப்பட்டுள்ள இணைப்பில் நான்கு தறையாணிகள் இருப்பின், இணைப்பின் வலிமை என்ன ? என்பதனைக் காண்போம்.

ஒவ்வொரு தறையாணி மீதும் செலுத்தப் படும்
நறுக்கு விசை = P/4

P/4 = 29.688 (அதிகபட்சமாக)

∴ P = 118.752 kN

ஆனால், தகட்டின் இழுவலிமை 96 kN மட்டுமே. அதனால், நாம் செலுத்தக்கூடிய உச்ச விசை, P_{max} = 96 kN

இவ்விசை காரணமாகப் தறையாணிகளில் தோற்றுவிக்கபடும் நறுக்குத் தகைவினைக் கணக்கிட முற்படுவோம்.

ஒவ்வொரு தறையாணிமீதும் செலுத்தப்படும்

நறுக்கு விசை. $= \frac{P}{4} = \frac{96}{4} = 24 \text{ kN}$

$= 24{,}000 \text{ N}$

தறையாணியின் குறுக்குப் பரப்பு $= \frac{\pi}{4} \times 200^2 = 324.16 \text{ mm}^2$

எனவே தறையாணியில் நறுக்குத் தகைவு $= \frac{24000}{314.16} \text{ N/mm}^2 = 76.394 \text{ N/mm}^2$

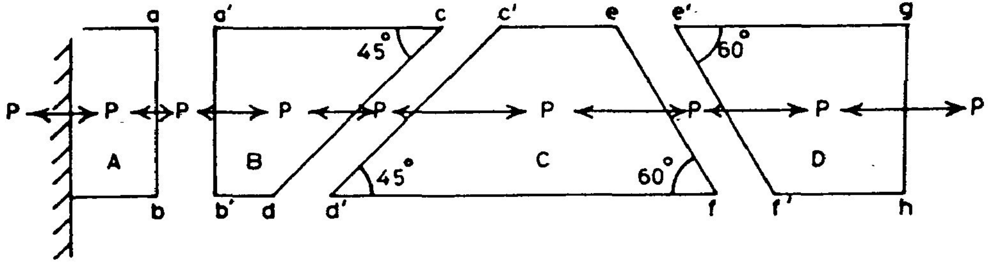
அல்லது 76.394 MPa

குறிப்பு : தறையாணி இணைப்பு ஒர் எடுத்துக்காட்டாகவே இங்குத் தரப்பட்டுள்ளது. இது பற்றி விளக்கமாய் உருக்குக் கட்டுமானங்கள் (Steel Structures) என்னும் துறையிற் கற்கலாம்.

4.5 அச்சு விசைகள் விளைக்கும் நறுக்கு விசைகள், நறுக்குத் தகைவுகள் (Shear Forces and shear Stresses caused by Axial Forces)

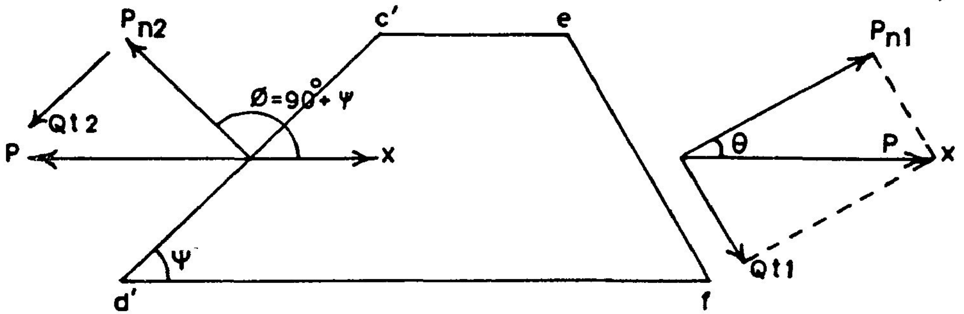
கடந்த பகுதியில் (4.4) எவ்வாறு சில பரப்புகளின் மீது நறுக்கு விசை செலுத்தப்படுகிறது என்பதற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள் கண்டோம். நறுக்குத் தகைவுகள் தோற்றுவிக்கப்படும் மற்றொரு வகைச் சூழ்நிலையை இங்குக் காண்போம். படங்கள் 3.4 ஐ மீண்டும் நோக்குக. அச்சு விசை (P) செலுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சீர்க் கம்பியைப் பல்வேறு வகைகளில் சிறு துண்டுகளாகப் பிரித்தாலும், ஒவ்வொரு துண்டும் எவ்வாறு சமனிலையில் இருக்கிறது. என்பதனை இப்படங்கள் விளக்குகின்றன. இப்படங்களில் தனித்தனித் துண்டுகள் யாவும் விசையின் திசைக்குச் செங்குத்தான தளங்களாலேயே துண்டுகளாகப் பகுக்கப்பட்டிருக்கின்றன என்பதைக் காண்கிறோம். சமனிலை விதிகள் நாம் எவ்வாறு தனித் துண்டுகளாகப் பிரிக்கிறோம் என்பதைப் பொறுத்தன அல்ல. எம் மாதிரியாகத் துண்டுபடுத்தினாலும் மொத்தக் கம்பியும் தனித் தனி பகுதிகளும் சமனிலையில் இருந்து தான் ஆகவேண்டும். இக் கருத்தின் அடிப்படையில் படம் 4.13 இல் காட்டப்பட்டுள்ள பகுப்பின் சமனிலையை ஆராய்வோம்.

அச்சு விசை P செலுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சீர்க்கம்பியை A,B,C,D, ஆகிய நான்கு துண்டுகளாகப் (கருத்தளவில்) பகுத்து ஒவ்வொரு துண்டின் சமனிலையையும் ஆராய்வோம். முனை gh தவிர வேறெங்கும் புறவிசைகள் செலுத்தப்படாமையின் மேலுமுள்ள ஒரேயொரு புற விசை, தாங்கியின் எதிர் வினை P யே ஆகும். அதனால், படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு ஒவ்வொரு துண்டிலும் அகவிசையின் அளவும், ஒவ்வொரு துண்டும் அடுத்துள்ள துண்டுகளின் மீது செலுத்தும் இழுவிசையின் அளவுகளும் கூட P தான் என்பதையும் படத்தில் தெளிவாகக்



படம் 4.13

காண்கிறோம். அதனால், ஏதாவது ஒரு துண்டின் சமனிலையை ஆராய்வோம். இதன் பொருட்டு துண்டு C யின் புறவிசைப் படம் 4.14 ஐ நோக்குக. (சீர்க்கம்பியின் தடிப்பு, படத்துக்குச் செங்குத்தான திசையில் ஓர் அலகு எனக் கொள்க).



படம் 4.14

புறவிசை P இன் திசையை x எனக் கொள்வோம். C என்னும் துண்டின் இரு முனைகளிலும் x இன் திசையில் செயல்படும் புறவிசைகள். P, –P எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன. (D என்னும் துண்டின் வல முனையில் P குத்துவிசையாகவே செயல்படுகிறது. இங்கு விசை செலுத்தப்படும் பரப்பு = gh × 1 அல்லது gh இதனை l அலகுப்பரப்பு எனக் கொள்வோம். ஆகவே பரப்பு = l. இத்தளத்தின் மீது குத்துத் தகைவு, σ_x எனில் $P = \sigma_x . l$ அளவுள்ள விசை செயல்படுகிறது.) இத்தளத்தைப் பொருத்தமட்டில் இவ் விசை குத்து விசையுமன்று, நறுக்கு விசையுமன்று. அதனால், இவ் விசையைத் தளத்தின் குத்துத்திசை (Normal) யிலும், இணைத்

திசையிலும் கூறுபடுத்துவோம். ef என்ற தளத்தின் குத்துக் கோட்டுக்கும் x திசைக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் θ எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இக்கோணம் θ, தளஞ்சுட்டுகோணம் (Aspect Angle) என அழைக்கப்படுகிறது.

ef என்ற தளத்தின் மீது

P இன் குத்துத் திசைக்கூறு $= P\cos\theta = \sigma_x . l . \cos\theta$

P இன் இணைத் திசைக்கூறு $= -P\sin\theta = -\sigma_x . l . \sin\theta$

எனப் பெறலாம். (P cosθ) குத்துத் திசையில் வெளி நோக்கியதாகலின் நேர்மறை (+ve) ஆகவும் P Sinθ இணைத் திசையில் செயல்பட்டு C ஐ கடிகைத் திசையில் சுழற்ற முற்படுவதால் எதிர் மறை (−ve) ஆகவும் கொள்கிறோம்.

இங்கு நாம் முக்கியமாகக் கவனிக்க வேண்டிய கருத்து யாதெனில், நாம் செலுத்தும் புறவிசைகள் ஏதும் நறுக்கு விசைகளாக இல்லாத போதிலும், உறுப்பின் உட்புறத்தில் பல்வேறு தளங்களின் மீது அவ்வத் தளங்களின் சாய்கோணத்திற்கேற்ப நறுக்கு விசைகள் செயல்படும் என்பதே. இனித் தகைவுகளைக் கணக்கிட முனைவோம்.

ef என்ற தளத்தின் சாய்நீளம் $= \dfrac{l}{\cos\theta}$

∴ ef என்ற தளத்தின் பரப்பளவு $= \dfrac{l}{\cos\theta} \times 1 = \dfrac{l}{\cos\theta}$

எனவே ef என்ற தளத்தின் மீது

குத்துத் தகைவு σ_n $= \dfrac{P\cos\theta}{\dfrac{l}{\cos\theta}}$

$$= \frac{\sigma_x . l\cos\theta}{\dfrac{l}{\cos\theta}} = \sigma_x \cos^2\theta$$

மேலும் ef என்ற தளத்தின் மீது

நறுக்குத் தகைவு τ_n $= \dfrac{-P\sin\theta}{\dfrac{l}{\cos\theta}}$

$$= \frac{-\sigma_x . l\sin\theta}{\dfrac{l}{\cos\theta}} = -\sigma_x\cos\theta\sin\theta = -\frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta$$ எனப் பெறலாம்.

சுருக்கமாக ,

$$(\sigma_n)_1 = \sigma_x \cos^2\theta$$

$$(\tau_{nt})_1 = \frac{-\sigma_x \sin 2\theta}{2} \qquad (4.7)$$

(இவ்வாறே c'd' என்ற தளத்தின் மீது செயல்படும் விசையையும் கூறுபடுத்தி ஆய்ந்து

$$(\sigma_n)_2 = \sigma_x \cos^2\varphi$$

$$(\tau_{nt})_2 = -\frac{\sigma_x \sin 2\varphi}{2}$$

என்பதைப் பயிற்சியாகக் கொண்டு காண்க)

குறிப்பு : θ என்ற கோணத்தை $(90+\varphi)$ எனக் கொண்டு தொடங்கலாம்) கோணங்களின் அளவுகள், திசைகள் சரியாகக் கொள்ளப்படாவிடில் பிழைகள் தோன்றலாம்; கவனம் தேவை.

i. இனிச் சமன்பாடு 4.7 தரும் சில முடிவுகளைக் காண்போம். தளஞ்சுட்டுகோணம் θ, 0 அல்லது 180° எனில் குத்துத் தகைவு $\sigma_n = \sigma_x$ எனவும் மற்றத் தளங்களில் இது σ_x ஐ விடக் குறைவாகவும் இருப்பதைக் காணலாம். ($\sigma_n \leq \sigma_x$)

ii. தளஞ்சுட்டுகோணம் θ = 0, 90, 180, 270 எனில் நறுக்குத் தகைவு $\tau_{nt} = 0$ ஆகவும் மற்றெல்லாத் தளங்களிலும் $\tau_{nt} \neq 0$ எனவும் காண்கிறோம்.

Sin2θ இன் மதிப்பு எத் தளத்தில் உச்ச மதிப்புப் பெறுகிறதோ, அத் தளத்தில் தான் τ_{nt} உச்சமாக இருக்க வேண்டும் என்பதையும் உணரலாம்.

Sin2 θ வின் உச்ச மதிப்பு = + 1, (அஃதாவது θ = 45° எனில்)

Sin 2 θ வின் தாழ் மதிப்பு = – 1, (அஃதாவது θ = 135° எனில்)

எனவே θ = 45° கொண்ட தளத்தின் மீது $\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x}{2}$

θ = 135° கொண்ட தளத்தின் மீது $\tau_{nt} = +\frac{\sigma_x}{2}$

என்பதைக் காண்கிறோம்.

நாம் செலுத்துவது அச்சுத் தகைவாயிருப்பினும், திண்மத்தில் பல தளங்களில் நறுக்குத் தகைவுகள் தோற்றுவிக்கப்படுவதைக் கண்டோம். அடுத்து செலுத்தும் விசை நறுக்கு விசையாக இருப்பின் என்ற வினாவை எழுப்பி, விளைவினை ஆய்வோம்.

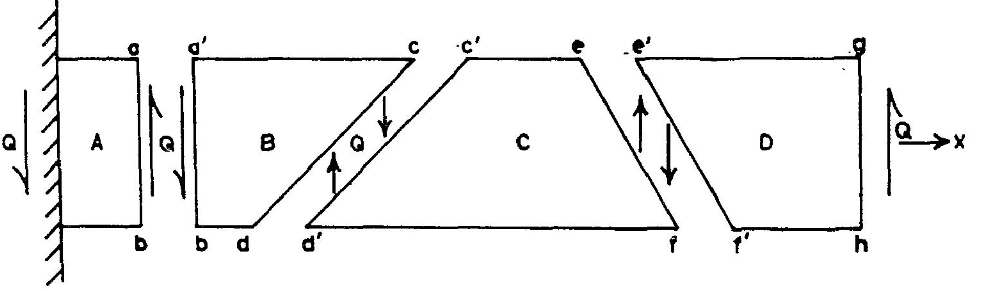
4.6 நறுக்கு விசைகள் விளைவிக்கும் குத்துத் தகைவுகள் (Normal Stressses caused by shear forces)

படம் 4.13 ஐ மீண்டும் நோக்குக. gh என்ற தளத்தின் மீது நறுக்குத் தகைவு τ_{xy} செலுத்தப்படுகிறது எனக் கொள்வோம்.

$$\text{நறுக்கு விசை} \qquad Q_{xy} = \tau_{xy}.l$$

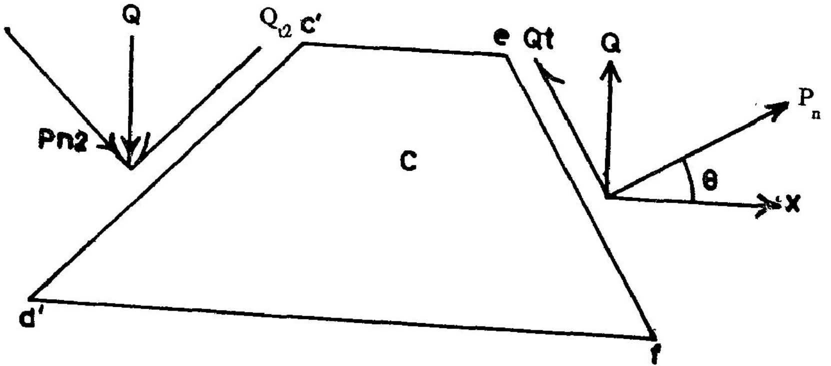
இதன் அளவை Q என வைப்போம்.

இப்போது சம்பியை முன்போன்றே உறுப்புகளாப் பிரித்து வரையப்பட்ட விசைப்படத்தினைப் படம் 4.15 காட்டுகிறது.



படம் 4.15

இதில் மீண்டும் C என்ற உறுப்பின் சமநிலையை ஆராய்வோம். இதன் விசைப் படம் 4.16ஐ நோக்குக.



படம் 4.16

EF என்ற தளத்தின் மீது செயல்படும் விசை Q வைத் தளத்தின் குத்துத் திசையிலும் இணைத் திசையிலும் கூறுபடுத்த, குத்துக்கூறு

$$P_n = Q \sin\theta = l\,\tau_{xy} \sin\theta$$

இணைக்கூறு $Q_t = Q\cos\theta$

$$= l\,\tau_{xy}\cos\theta$$

ef என்ற தளத்தின் பரப்பு = $\frac{l}{\cos\theta}$ என முன்னரே கண்டோம்.

∴ குத்துத் தகைவு $\sigma_n = \frac{P_n}{\frac{l}{\cos\theta}} = \frac{\tau_{xy} . l \sin\theta}{\frac{l}{\cos\theta}} = \tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{\tau_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

நறுக்குத் தகைவு $\tau_{nt} = \frac{Q_t}{\frac{l}{\cos\theta}} = \frac{\tau_{xy} . l\cos\theta}{\frac{l}{\cos\theta}} = \tau_{xy}\cos^2\theta$

சுருக்கமாக,

$$\sigma_n = \frac{\tau_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\tau_{nt} = \tau_{xy}\cos^2\theta \qquad 4.8$$

சமன்பாடுகள் 4.8 இன் உட்பொருளை நோக்குவோம். நறுக்கு விசை செலுத்தப்படும் போது தோற்றுவிக்கப்படும் குத்துத் தகைவு σ_n இன் அளவு முதல் சமன்பாட்டில் தரப் பட்டுள்ளது. (இது τ_{yx} இன் காரணமான விளைவு மட்டுமே. ஆனால் τ_{xy} செலுத்தப்பட்டின் τ_{yx} (பிணை நறுக்குத் தகைவு) தோன்றல் தவிர்க்க முடியாததெனக் கண்டோம்).அதனால் இவற்றுடன் τ_{yx} செலுத்தப்படுவதால். தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுக் கூறுகளையும் சேர்த்தே கருதவேண்டும்.

பயிற்சிகள்.

4.1 குத்துத் தகைவு σ_y செலுத்தப்படும் திண்மம் ஒன்றின் உட்புறங்களில் x அச்சிலிருந்து சாய்கோணம் θ கொண்டதொருதளத்தின் மீது தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுக் கூறுகள்

$$\sigma_n = \sigma_y \sin^2\theta \qquad 4.9$$

$$\tau_{nt} = \sigma_y \frac{\sin 2\theta}{2}$$

என நிறுவுக.

4.2 நறுக்குத் தகைவு $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$ செலுத்தப்படுவதன் விளைவாக சுட்டுக்கோணம் θ கொண்ட தளம் ஒன்றன் மீது தோற்றுவிக்கப் படும் தகைவுக் கூறுகள்.

$$\sigma_n = \frac{\tau_{xy}}{2} \sin 2\theta \qquad 4.10$$

$$\tau_{nt} = -\tau_{xy} \sin^2\theta$$

என நிறுவுக.

மேற்கண்ட ஆய்வுகளிலிருந்து நறுக்குத் தகைவுகள் செலுத்தப்படும்போது, சுட்டுக் கோணங்கள் 90°, 180°, 270°, 360° கொண்ட தளங்களைத் தவிர மற்றெல்லாத் தளங்களின் மீதும் குத்துத் தகைவுகள் தோற்றுவிக்கப்படுகின்றன எனும் உண்மை புலப்படுகிறது. சுருங்கக் கூறின்,தகைவுக் கூறுகளுக்கிடையே நிலவும் உறவுகளைப் பற்றித் தெளிவாக அறிய வேண்டிய தேவையை உணர்கிறோம். இவ்வுறவுகளின் விரிவான ஆய்வினை அத்தியாயம் ஒன்பதில் காணலாம். இங்குச் சில நடைமுறைப் பயன்களை மட்டும் நோக்குவோம்.

4.7 இறுக்க சோதனையால் நறுக்கு வலிமை கண்டறிதல் (Determination of Shear strength Using Compressive Tests)

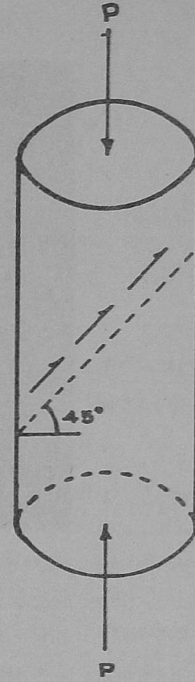
ஒரு பொருளின் நறுக்க வலிமையை நேரடியாகக் கண்டறிதல் அவ்வளவு எளிதன்று. ஆனால், சில பொருள்களுக்கு, குறிப்பாய் மிகக் குறைவான நறுக்குவலிமை கொண்ட பொருள்களுக்கு மறை முகமாய் எளிதில் நறுக்குவலிமை கண்டறியலாம். எடுத்துக்காட்டாய், மண் போன்ற பொருள்களுக்கு இறுக்க வலிமையில் ஒரு சிறு பகுதியளவே நறுக்கு வலிமை இருக்கும். படம் 4.17 இல் காட்டியுள்ளவாறு உருளை வடிவத்தில் அமைக்கப்பட்ட மண் கட்டியின் மீது இறுக்க விசை P செலுத்தப்படுகிறது. குறுக்குப் பரப்பு A எனில், குத்துத் தகைவு $\sigma_y = -P/A$

P இன் திசை தவிர மற்றத் திசைகளில் நறுக்குத் தகைவுகள் இருக்குமென்பதையும் நறுக்குத் தகைவின் உச்ச அளவு P யின் திசைக்கு 45 சாய்ந்துள்ள தளத்தின் மீதே இருக்கும் என்பதையும் அறிவோம்.

அதிகபட்ச நறுக்குத் தகைவு

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_y}{2} = \frac{P}{2A} \quad (4.11)$$

எனவே சமன்பாடு 4.11 ஐப் பயன்படுத்திப் பொருள் சிதைவு அடையும் தருணத்தில் கிடைக்கும் P அளவினால் பொருளின் நறுக்குவலிமையை எளிதில் அறியலாம். இச்சோதனையில் நாம் நறுக்குவலிமை யைத்தான் சரியாகக் கண்டுபிடித்திருக்கிறோமோ என்பதை எவ்வாறு அறிவது? பொருளின் இறுக்க வலிமையில் பாதிக்கும் குறைவான அளவே நறுக்கு வலிமை இருந்தால் தான் பொருள் நறுக்கச் சிதைவு (Shear Failure) அடையும். இத்தகைய சிதைவு நிகழும் போது சிதைவுபடுகின்ற தளம் குறுக்கு வெட்டு தளத் திற்கு 45° கோணத்தில் சாய்ந்திருப்பதைக் காணலாம்.



படம் 4.17

(புகைப்படம் 4.19 ஐ நோக்குக) பொருளின் இறுக்க வலிமையில் பாதிக்கும் அதிகமாக நறுக்கு வலிமை இருக்கும்போது இறுக்கச் சிதைவு (Compressive failure) அல்லது நொறுக்கம் (Crushing) மட்டுமே நிகழும். இத்தகைய சிதைவு ஒன்றனை புகைப்படம் 4.18 காட்டுகிறது. அதனால். நாம் கண்டுபிடிப்பது இறுக்க வலிமையா , நறுக்கு வலிமையா என்பதைப் பொருள் எவ்வாறு சிதைவடைகிறது என்பதை நோக்குவதனால் எளிதில் கண்டறியலாம்.



படம் 4.18 நொறுக்கச் சிதைவு



4.19. நறுக்கச் சிதைவு

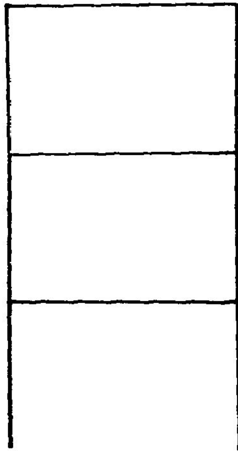
5. விட்டங்களில் நறுக்கு விசைகளும் வளை திருப்புமைகளும்
(Shear Forces and Bending Moments in Beams)

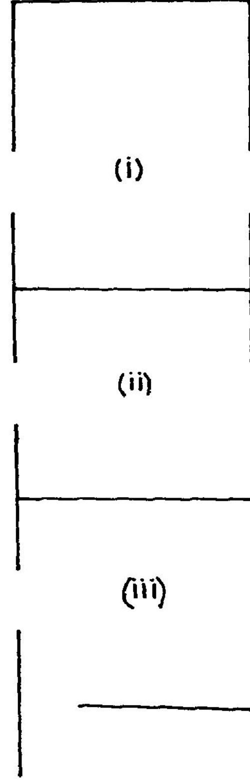
5.1 தனி உறுப்புகளும், கட்டமைப்புகளும்

விட்டம் (Beam) என்பது ஒருவகைக் கட்டுமான உறுப்பு விட்டத்தைப்பற்றிக் கற்பதற்கு முன்பு கட்டமைப்புகளுக்கும் (Structures) தனி உறுப்புகளுக்குமுள்ள வேறுபாடுகளைத் தெளிவாகக் கற்க வேண்டும்.

படம் 5.1 (a) இல் நாம் காண்பது ஒருவகைச் சட்டகம் (Frame). இவ்வகைச் சட்டகங்களைப் பன்மாடிக் கட்டடங்களின் பகுதிகளாகக் காணலாம். இச் சட்டகங்களைத் தனித்தனி உறுப்புகளாகப் பிரிப்பது எவ்வாறு? படம் 5.1 (b), பிரிக்கும் முறைகள் சிலவற்றைக் காட்டுகிறது. இப் படங்களில் (i) இல் காணப்படுதல் போன்ற மூன்று உறுப்புகளாகப் பகுத்தல் ஒருவகை. மேலும் படம் (ii), (iii), (iv), (v) களில் காணப்படுதலைப் போன்ற பல்வேறுவிதமான உறுப்புகளின் விதவிதமான கூட்டுகளாகவும் பிரிக்கலாம். இவ் விதமான உறுப்புகளில் மிக எளியன (iv), (v) ஆகிய படங்களில் காணப்படுவனவே. உறுப்புகள் எளிமையாக இருத்தல் ஒருவகை வசதியே (convenience) தவிர, உறுப்புகள் எளிமையாகத்தான் இருக்க வேண்டும் என்பது கட்டாயமன்று. (i), (ii), (iii) ஆகிய படங்களில் காணப்படுவனவும் தனி உறுப்புகளாகக் கருதத்தக்கனவே. மேலும் படம் 5.1 (a) காட்டும் முழுச்சட்டகத்தையேகூட ஒருதனி உறுப்பாகக் கருதலாம். அவ்வாறாயின் தனி உறுப்புகளுக்கும் கட்டமைப்புகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடுதான் யாது?

படம் 5.1-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது போன்ற எந்த ஓர் அமைப்பின் மீதும் விசைகள் செலுத்தப்படின், அது செலுத்தப்படும் விசையின் திசையில் நகரத் தொடங்கும். (இவ்வியக்கத்தின் முடுக்கத்தை ($a = F/m$) என்ற நியூட்டனின் இரண்டாம் இயக்க விதியின்படி கணக்கிடலாம்). அதனால் இவ்வமைப்புகள் விசைகளை ஏற்று சமனிலையில் இருந்தாலன்றி இவற்றை நம் தேவைக்களுக்குப் பயன்படுத்திக்கொள்ள இயலாது. அதனால், விசைகள், தனிஉறுப்புகளின்மீது தோற்றுவிக்கக்கூடிய இயக்கங்களைக் கட்டுப்படுத்தும் (முடிந்தால் தடுக்கும்) வகையில் தாங்கிகளோடு (Supports) இணைக்கப்படும்போதுதான் இவற்றை உறுதிச் சமனிலையில் இருத்த முடியும். அவ்வாறாயின் முதலில் தனிஉறுப்புகளின்மீது விசைகள் தோற்றுவிக்கக்கூடிய இயக்கங்களைப்பற்றி நோக்குவோம். எளிமை கருதி ஒரே ஒரு தளத்தில் (Plane) மட்டுமே இயக்கங்களை ஆராய்வோம். விசைகள் செலுத்தப்படுமுன் ஓர் எளிய தனி





(iv) (v)

(a) முழுச்சட்டகம்

(b) சட்டகத்தைப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் முறைகள்

படம் 5.1

உறுப்பின் நிலையையும், விசைகளால் அஃது அடையும் இடப்பெயர்ச்சி (Displacements) களையும் படம் 5.2 காட்டுகிறது.

படத்தில் ab என்பது, தனி உறுப்பின் தொடக்க நிலையைக் காட்டுகிறது. மேலும் தளத்தின் ஆயத்திசைகள் (Co-ordinate Directions) படத்தில் x, y, z எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன. (தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசை z திசை எனக் காட்டப்பட்டுள்ளது). x, y திசைகளில் இடப்

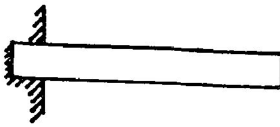
படம் 5.2 தனிஉறுப்பின் இடப்பெயர்ச்சிகள்

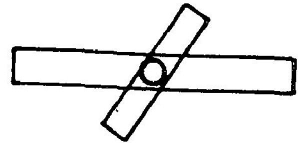
பெயர்ச்சிகளை முறையே u, v என அழைப்போம். உறுப்பு சுழல்வதாயின், z திசைக்கு இணையானதொரு கோட்டினை அச்சாகக் கொண்டுதான் சுழலவேண்டும். அதனால், உறுப்பின் சுழற்சியை, θ_z எனக் குறிப்போம். இத்தளம் z திசைக்குச் செங்குத்தாயுள்ளது. வலக்கைப் பெருவிரல் முறை (Right Hand Thumb Rule) மரபின்படி இத்தளம் z தளம் என வரையறுக்கப்படுகிறது . இதனையொட்டி இத் தளத்தில் சுழற்சிகள் θ_z என வரையறுக்கப் படுகின்றன. அதனால் θ எனக் கீழடையின்றிக் குறிப்பிடுமிடங்களில் நாம் θ_z என்னும் பொருளிலேயே குறிப்பிடுவோம்.

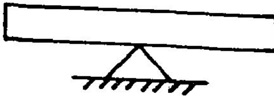
உறுப்பின் பல்வேறு நிலைகள் 11′, 22′, 33′, முதலான குறிபீடுகளால் காட்டப்பட்டுள்ளன. 11′, x திசையில்மட்டும் இடப்பெயர்ச்சி அடைந்த நிலையைக்

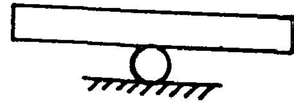
காட்டுகிறது. அஃதாவது $u_1 \neq 0$; $v_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ அவ்வாறே. 22′ என்ற நிலையில் $u_2 = 0$; $v_2 \neq 0$ $\theta_2 = 0$ மேலும் 33′ என்ற நிலையில் $u_3 = 0$; $v_3 = 0$, $\theta_3 \neq 0$ (இவ்வாறே பல்வேறு நிலைகளில் இடப்பெயர்ச்சிகளையும் காண்க). அஃதாவது உறுப்பு அடையும் எல்லாவிதமான பெயர்ச்சிகள் அனைத்தையும் u, v, θ (அஃதாவது xதிசையில் இடப்பெயர்ச்சி, y திசையில் இடப்பெயர்ச்சி, z திசையை மையமாகக்கொண்ட சுழற்சி) என மூன்று கூறு (component) களின் கூட்டாக உரைக்கலாம். உறுப்பு உறுதிச் சமனிலையில் இருக்க வேண்டுமெனில் இம் மூவித இடப்பெயர்ச்சிகளையும் தடைசெய்ய வேண்டும். (எவ்வித இடப்பெயர்ச்சியையும் முழுமையாகத் தடைசெய்தல் மிகக் கடினம். பெரும்பாலும் இவற்றைக் கட்டுப்படுத்தத்தான் முடியும். கணக்கீட்டு எளிமைக்காக மட்டுமே இவற்றைத் தாங்கிகள் தடைசெய்கின்றன என்று கொண்டு ஆய்வுகளைத் தொடர்வோம். முழுமையாய்த் தடைசெய்ய இயலாத தாங்கிகளைப் பற்றிப் பின்னர்த் தெளிவாகக் காண்போம்). இனி, இடப்பெயர்ச்சிகளை எல்லாவிதத்திலும் தடை செய்தற்கு எத்தகைய வகையில் தாங்கிகளை அமைக்க வேண்டும் என நோக்குவோம்.

படம் 5.3 இல் நான்கு விதமான தாங்கிகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் உறுதித் தாங்கி (fixed support), (a), உறுப்பின் (தாங்கப்படும்) முனையில் u, v, θ எனும் மூன்று பெயர்ச்சிகளையும் தடை செய்கிறது. அதனால் உறுப்பு உறுதிச் சமனிலையில் இருத்தப்படுகிறது. இங்கு ஒரு முக்கியக் கருத்தைக் கவனத்திற் கொள்ள வேண்டும். அஃதாவது


(a) உறுதித் தாங்கி


(b) இருசு தாங்கி

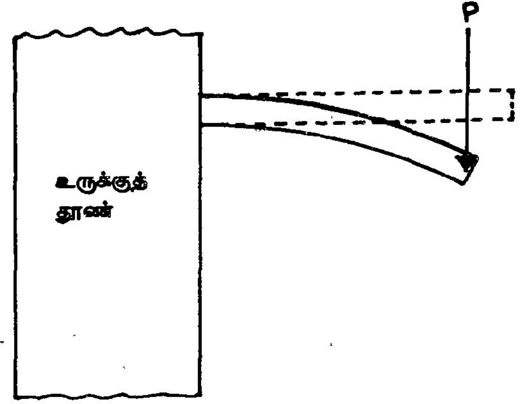

(c) கூர்முனைத் தாங்கி


(d) உருளைத் தாங்கி

படம் 5.3 பல்வகைத் தாங்கிகள்

உறுப்பு உறுதிச் சமநிலையில் இருக்க, இடப்பெயர்ச்சிகள் உறுப்பின் எல்லாப் பகுதிகளிலும் தடை செய்யப்பட வேண்டும் என்பதில்லை. ஏதாவதொரு புள்ளியில் தடை செய்யப்பட்டாலே போதும். படம் 5.4இல் ஓர் உருக்குத் தூணோடு பற்றவைத்து இணைக்கப்பட்டுள்ள (Welded)

கம்பியொன்று காட்டப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் மறுமுனையில் விசை செலுத்தப்படும்போது இணைக்கப்பட்டுள்ள முனை தவிர மற்றெல்லாப் பகுதிகளிலும் u, v, θ ஆகிய மூன்று இடப்பெயர்ச்சிகள் இருப்பிலும் தாங்கப்படும் முனையில் இவை தடுக்கப்படுவதால் கம்பி, உறுதிச் சமனிலையில் நிறுத்தப்பட்டுள்ளதைக் காண்கிறோம்.

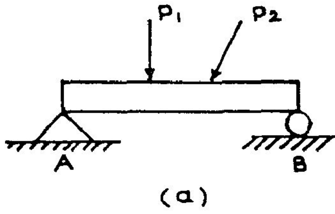


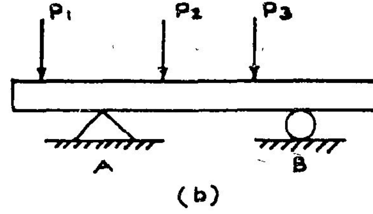
படம் 5.4

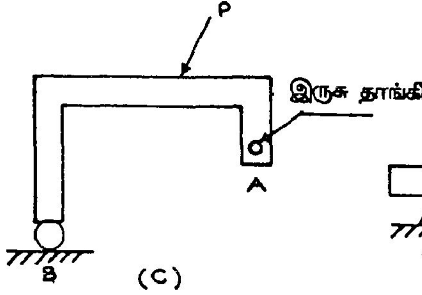
அடுத்து, படம் 5.3 (b) இல் காட்டப்பட்டுள்ளது இருசு தாங்கி (pin support) யாகும். இத் தாங்கி u, v ஆகிய இடப்பெயர்ச்சிகளைத் தடை செய்கிறது; ஆனால், சுழற்சியைத் தடுப்பதில்லை. இவ்வாறே கூர்முனைத் தாங்கி (knife edge support)யும் சுழற்சியை அனுமதித்து இடப்பெயர்ச்சிகளைத் தடைசெய்கிறது. படம் 5.3 (d) இல் காட்டப்பட்டுள்ள உருளைத் தாங்கி, y திசையில் இடப்பெயர்ச்சியை (v)யை மட்டுமே தடுத்து, u, θ இரண்டையும் அனுமதிக்கிறது. அதனால் இவ் வகைத் தாங்கிகளுள் ஒன்று மட்டுமே உறுதிச் சமனிலைக்குப் போதாது எனக் காண்கிறோம். படங்கள் 5.5இல் ஒன்றனுக்கு மேற்பட்ட தாங்கிகளைக் கொண்டு எவ்வாறு உறுதிச் சமனிலையை எய்த முடியும்? என்பதற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள் தரப்பட்டுள்ளன.

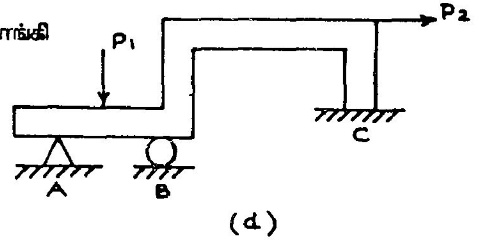
5.5 (a), (b), (c) ஆகிய படங்களில் ஒரு கூர்முனைத் தாங்கி, ஓர் உருளைத் தாங்கி இரண்டும் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ் அமைப்புகளில் A என்னும் முனையில் u, v இரண்டும் தடுக்கப்படுகின்றன. B என்ற முனையில் v மட்டுமே தடுக்கப்படுகிறது. எனினும், இரண்டு புள்ளிகளில் v தடை செய்யப்படுவதனால் உறுப்பின் சுழற்சியும் தடைசெய்யப்படுகிறது. அதனால் உறுப்புகள், உறுதிச் சமனிலையில் இருத்தப்படுகின்றன. இனி d, e, f ஆகிய படங்களில் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்புகளும் உறுதிச் சமனிலையில்தான் இருக்கின்றன. இவ் அமைப்புகளில் உறுதிச் சமனிலையை எய்துதற்குத் தேவையானதைவிட மிகுதியான தடைகளைத் தாங்கிகள் செலுத்துகின்றன.

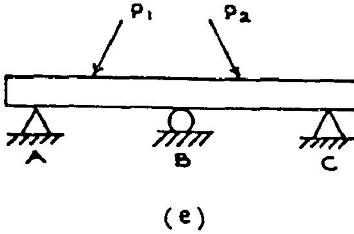
எடுத்துக்காட்டாய்ப் படம் 5.5 (d) இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பினை உறுதிச்சமனிலையில் நிறுத்துதற்குத் தாங்கி c அல்லது தாங்கிகள் a,b இரண்டின் கூட்டுமட்டுமே போதும். மூன்று தாங்கிகளையும் அமைப்பதனால் தேவைக்கு அதிகமான தடைகள் செலுத்தப்படுகின்றன. இத்தகைய கட்டமைப்புகளை மிகைத்தடைக் கட்டமைப்புகள் (Redundant structures) என அழைக்கிறோம். படம் 5.5(d) காட்டும் அமைப்பில்,

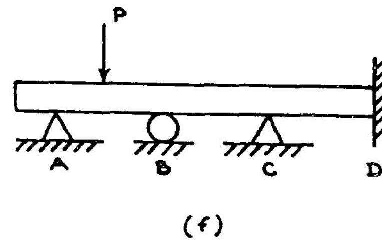












படம் 5.5

தடுக்கப்பட வேண்டிய பெயர்ச்சிக்கூறுகள் (Degrees of Freedom) = 3

தடுக்கப்பட்டுள்ள பெயர்ச்சிக் கூறுகள் = 6

தேவைக்கும் அதிகமான தடைக் கூறுகளின் எண்ணிக்கையைத் தடை மிகைமை (Redundancy) என்கிறோம். இங்கு,

தடைமிகைமை 6 − 3 = 3

தேவையான அளவிற்கு மட்டுமே தாங்கிகள் கொண்ட அமைப்புகளை நிலையியல் சார் அமைப்புகள் (Statically determinate structures) என அழைக்கிறோம். இவ் வத்தியாயத்தில் நிலையியல் சார் அமைப்புகளைப் பற்றி மட்டும் கற்போம்.

மேலும், மற்றொரு முக்கியக் கருத்தையும் நோக்குவோம். ஓர் அமைப்பின் உறுதிச் சமனிலையை வெறும் தடைகளின் எண்ணிக்கையை மட்டுமே கொண்டு முடிவு செய்யக்

கூடாது. மூன்றுவித இடப்பெயர்ச்சிகளும் தடுக்கப்பட்டிருந்தால் மட்டுமே உறுப்பு, உறுதிச் சமனிலையில் இருக்கும்.

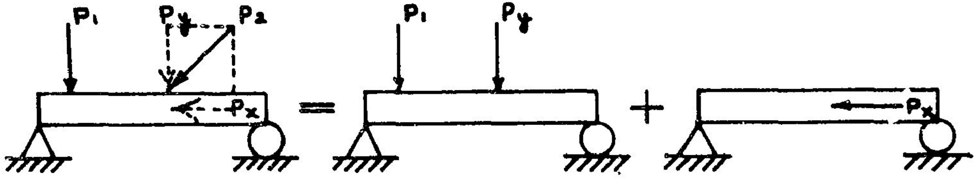


படம் 5.6 உறுதியிலாச் சமனிலை

படம் 5.6 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பில் நான்கு தடைகள் இருக்கின்றன. இங்குத் தடைகளின் எண்ணிக்கை மூன்றனுக்கும் அதிகமாய் இருப்பதால் உறுப்பு உறுதிச் சமனிலையில் இருக்கும் என்று கருதுதல் பிழையாகும். இந் நான்கு தாங்கிகளும் சேர்ந்து y திசையில் இடப்பெயர்ச்சி v யையும், சுழற்சி θ வையும் மட்டுமே தடுக்க இயலும். நான்கேயன்றி, 400 உருளைத் தாங்கிகள் இருந்தாலும் x திசையில் இடப்பெயர்ச்சி u வைத் தடுக்க இயலாது; இதனால், உறுப்பு உறுதியில்லாச் சமனிலையில்தான் இருக்கும் என்பதை உணர வேண்டும்.

5.2 விட்டங்களும் அவற்றின் மீது செயல்படும் விசைகளும் (Beams And The Forces On Beams)

கடந்த பகுதியில் பலவகைக் கட்டமைப்புகளைப் பற்றிக் கண்டோம். இப் பகுதியில் குறிப்பாய் விட்டங்களைப்பற்றிக் கற்போம். மூன்றாம் நான்காம் அத்தியாயங்களில் அச்சு விசைகள், நறுக்கு விசைகள் பற்றிக் கற்றோம். ஓர் உறுப்பின் அச்சிற்கு செங்குத்தான திசையைப் பக்கவாட்டுத் (Lateral) திசை என்கிறோம். நேரான அச்சினை உடைய ஒருகட்டுமான உறுப்பின்மீது பக்கவாட்டுத் திசையில் விசைகள் செலுத்தப்பட்டால் அவ் உறுப்பினை விட்டம் (beam) என அழைக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாய்ப் படங்கள் 5.5 (b), (f) ஆகியவற்றில் காட்டப்பட்டுள்ள உறுப்புகளின்மீது செயல்படும் விசைகள் யாவும், உறுப்பின் அச்சிற்குச் செங்குத்தாகவே செயல்படுகின்றனவாகலின், இவற்றை விட்டங்கள் என அறிவதில் ஐயமில்லை. இனிப் படம் 5.5 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள உறுப்பு விட்டமா என ஆய்வோம். இங்குச் செயல்படும் விசைகளைக் கூறுபடுத்தி இவ் அமைப்பினை இரண்டு அமைப்புகளின் கூட்டாகக் கருதலாம். படம் 5.7ஐ நோக்குக.



படம் 5.7

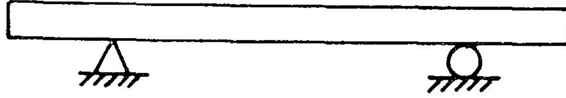
படம் 5.7 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள P_2 என்னும் சாய்வு விசையை அதன் அச்சுக் கூறு P_x பக்கவாட்டுக்கூறு P_y என்னும் விசைகளால் குறிப்பிட்டால், உறுப்பினைப் படம் 5.7 (b) இல் காணப்படும் விட்டம், படம் 5.7 (c) இல் காணப்படும் அச்சுச் சுமையுறுப்பு (Axially loaded member) ஆகிய இரண்டின் கூட்டாகக் கருதலாம். இவ்வகை உறுப்பு விட்டத் தூண் (Beam column) என அழைக்கப்படுகிறது. இதன் ஆய்வில் பல சிக்கல்கள் உள. அதனால் இப்போதைக்கு பக்கவாட்டு விசைகளுக்கு மட்டுமே உட்படும் விட்டங்களைப்பற்றி இங்குக் கற்போம்.

படம் 5.3 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டம் ஒருமுனையில் உறுதித் தாங்கியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வகை விட்டங்கள் துருத்து விட்டங்கள் (cantilevers) என அழைக்கப்படுகின்றன.

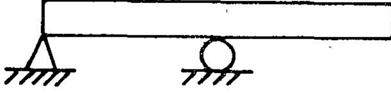
படம் 5.5 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின் இருமுனைகள் ஒன்று கூர்முனைத் தாங்கியாலும், மற்றொன்று உருளைத் தாங்கியாலும் தாங்கப்படுகின்றன. இவ்வகையினை எளிமை தாங்கி விட்டம் (Simply supported beam) என்றழைக்கிறோம்.

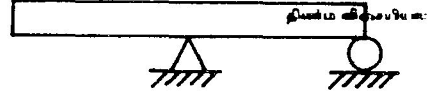
படம் 5.5 (b) இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்திற்கும் இரண்டு இடங்களில், கூர்முனைத் தாங்கி, உருளைத் தாங்கிகள் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. ஆனால், தாங்கிகள் விட்டத்தின் முனையில் இல்லை. அஃதாவது, விட்டத்தின் ஒருபகுதி (அல்லது இருபகுதிகள்) தாங்கி(களு)க்கு வெளியே தொங்கிக் கொண்டிருப்பதைக் காணலாம். இவற்றை முனைதொங்கு விட்டங்கள் (Overhanging beams) என அழைக்கிறோம். இவற்றுள் இருவகைகளைப் படம் 5.8 இல் நோக்குக.

இனி விட்டங்களின்மீது செயல்படும் விசைகளை நோக்குவோம். விட்டங்களின்மீது செலுத்தப்படும் விசைகளைப் பளு அல்லது சுமை (Load) என்று குறிப்பிடுகிறோம். சுமைகளில் பலவகை உள. இவற்றைப் படம் 5.9 விளக்குகிறது.



(a) இரு முனை தொங்கு விட்டம்



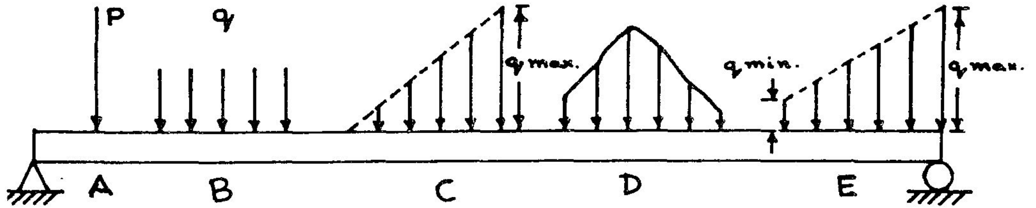


(b) (c)

ஒரு முனை தொங்கு விட்டங்கள்

படம் 5.8

படம் 5.9 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின்மீது செயல்படும் பலவிதச் சுமைகளை நோக்குவோம். A என்பது ஒருகுறுகிய புள்ளியில் செலுத்தப்படும் விசையாகும். இதனைக் குவிசுமை (Concentrated Load) அல்லது புள்ளிச்சுமை (Point Load) என அழைக்கிறோம். மற்றச்



படம் 5.9 பல்வகைச் சுமைகள்

சுமைகள் (B, C, D, E) யாவும் ஒரே புள்ளியில் குறிக்கப்படாமல், விட்டத்தின் நீளப்போக்கில் பரவலாகச் செலுத்தப்படும் சுமைகளாகும். இவற்றைத் தொடர்பரவு சுமைகள் (Distributed loads) என்கிறோம். அவற்றுள் குறிப்பாய் இரண்டு வகைகளை நோக்குவோம். விட்டத்தின் B எனும் பகுதியில் செலுத்தும் பளு அது செலுத்தப்படும் பகுதியில் சீராய்ச் செலுத்தப்படுகிறது. இதனைச் சீர் தொடர்பரவு சுமை (Uniformly distriobuted load) என்கிறோம். இதன் அளவினை விட்டத்தின் அலகு நீளத்தில் சுமத்தப்படும் பளுவின் அலகாக உரைக்கலாம். (எ.கா. ஒரு மீட்டருக்கு 600 நியூட்டன், அஃதாவது 600 N//m அல்லது 0.6 kN/m) . இதன் அளவு q என்ற

குறியீட்டால் உரைக்கப்படும். மொத்த விசை காணவேண்டில், விசை = q × சுமை நீளம், எனக் கணக்கிடலாம்.

அடுத்து விட்டத்தில் C, E எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள சுமைகளை நோக்குவோம். இச் சுமைகளின் செறிவுகள் (Intensities) சீரான மாற்றமடைகின்றன; (அஃதாவது சுமை செலுத்தப்படும பகுதியில்) இவற்றைச் சீர்மாறு சுமைகள் (Uniformly varying loads) என அழைக்கிறோம். இவற்றைச் சரியாக வரையறுக்க மூன்று அளவுகள் தேவைப்படுகின்றன. அவை 1. சுமை செலுத்தப்படும் விட்டப் பகுதி 2. இப் பகுதியின் இரு எல்லைகளிலும் சுமைச் செறிவு (Intensity of load) கள் என்பனவாம். சுமைச் செறிவுகள் q_1, q_2 என்றும், சுமை செலுத்தப்படும் நீளம் l எனவும் கொண்டால், மொத்தச் சுமையை $\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right) \times l$, அஃதாவது சராசரிச் செறிவு × நீளம் எனக் கணக்கிடலாம். சுமை தொடங்கும் புள்ளியிலிருந்து x என்னும் தொலைவில் சுமைச் செறிவினை $q(x) = q_1 + \left(\frac{q_2 - q_1}{l}\right) x$ என்னும் சார்பலன் (Function) மூலம் பெறலாம். C என்னும் பகுதியில் உள்ள பளுவினைப் போன்று q_1 அல்லது q_2, 0 ஆக இருப்பினும் அதற்கேற்பச் சுமைகளைக் கணிப்பதும் எளிதே.

இனி D என்னும் பகுதியில் செலுத்தப்படும் சுமையின் தன்மையை நோக்குவோம். இச் சுமையின் செறிவு மாறுபாடுகளை எளிய வருணனைகளால் உரைக்க இயலாது; இதனைத் தொடர்பரவு சுமை (Distributed load) என்னும் பொதுப் பெயராலேயே குறிப்பிடுவோம். எவ்வொரு புள்ளியிலும் சுமையின் செறிவு அப் புள்ளியின் அச்சுத்தொலை (axial distance) xன் சார்பலனாகவே உரைக்கப்படும் (அஃதாவது q(x) என்பது போன்ற கோவையால்). சில எடுத்துக்காட்டுகள்,

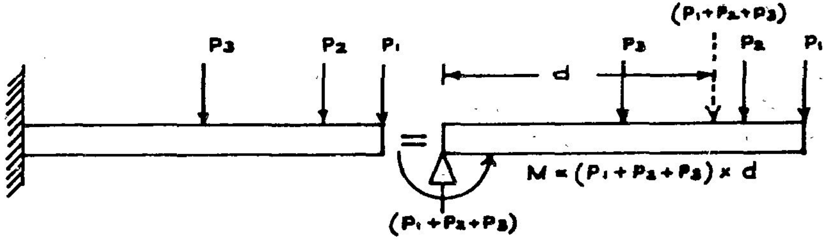
$$q(x) = q_1 x^3 - 2q_2 x$$

$$q(x) = q_0 \sin\left(\frac{x}{c}\right)$$

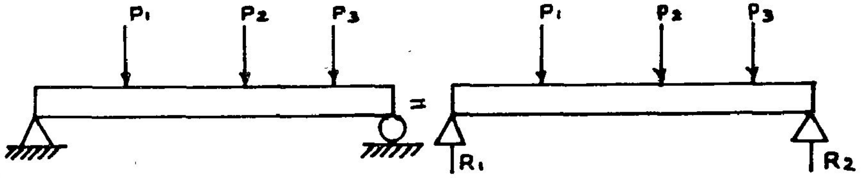
இவ் விசைகளின் கணக்கீடுகளை மேற்கொள்ள q(x) என்ற பொதுவான வருணனை போதாது; q(x) எனக் குறிப்பிடப்படும் கோவையும், அக் கோவைக்கேற்பச் சுமைகள் செலுத்தப்படும் பகுதியின் வரம்புகளும் தெளிவாகத் தரப்படுதல் அவசியம்.

இனித் தாங்கி எதிர்வினைகள் (Support Reactions) பற்றியும் சிறிது ஆராய்வோம். தாங்கிகள் செலுத்தும் எதிர்வினைகளின் அளவுகள், விட்டங்களின்மீது செலுத்தப்படும் பளுக்களைச் சமனிலையில் இருத்தும் வகையில் இருக்க வேண்டுமென முன்னரே கற்றோம். விளக்கமாகச் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

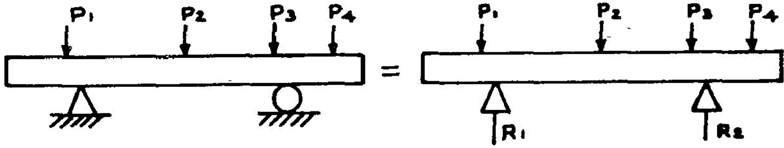
படம் 5.10 (a) இல் உள்ள துருத்து விட்டத்தை நோக்குக. இதன்மீது P_1, P_2, P_3 என்னும் கீழ் நோக்கிய சுமைகள் செலுத்தப்பட்டுள்ளன. விட்டத்தைச் சமனிலையில் இருத்த $(P_1+P_2+P_3)$ அளவினதாய மேல்நோக்கிய புறவிசையொன்று விட்டத்தின்மீது செலுத்தப்பட வேண்டும்.



(a) துருத்து விட்டத்தில் தாங்கி எதிர் வினைகள்



(b) எளிதை தாங்கி விட்டத்தில் தாங்கி எதிர் வினைகள்



(c) முனை தாங்கு விட்டத்தில் தாங்கி எதிர் வினைகள்

படம் 5.10 விட்டங்களில் தாங்கி எதிர்வினைகள்

நாமாகச் செலுத்தும் சுமைகளைத் தவிர வேறு புறவிசைகள், தாங்கிகளிலிருந்துதான் விட்டத்தின்மீது செலுத்த முடியும்; இவை விட்டம் தாங்கப்படும் புள்ளிகளில்தான் செயல்படவும் முடியும்; இவ் விசைகள் தாங்கி எதிர்வினைகள் (Support Reactions) என அழைக்கப்படுகின்றன. அதனால் தாங்கிகளுக்குப் பதிலாய் அவை செலுத்தும் எதிர்வினை களைப் புறவிசைகளாய்க் குறிப்பிடும் விசைப்படத்தில் (Free body diagram) விட்டத்தின் இட முனையில் தாங்கி எதிர்வினை ($P_1 + P_2 + P_3$) மேல்நோக்கிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஆனால், இவ்விசையால் மட்டும் விட்டத்தைச் சமனிலையில் இருத்த முடியாது; புறச் சுமைகளின் கூட்டு (Resultant Load), $P_1 + P_2 + P_3$ தாங்கியிலிருந்து d என்னும் தொலைவில் செயல்படுவதாய்க் கொள்வோம். இக் கூட்டுவிசையும், தாங்கி எதிர்வினையும் சம அளவுள்ள, இணையான, எதிர்திசை விசைகள் (Equal and Opposite Parallel Forces); (இவற்றுக்குச் சுருக்கமாக விசையிணை (Couple) என்ற மாற்றுப் பெயருண்டு). இவ் விசையிணை விட்டத்தைக் கடிகைத்

திசையில் சுழற்ற முற்படுகிறது. இச் சுழற்சியைத் தடுத்து விட்டத்தைச் சமனிலையில் இருத்த, இவ் விசையிணையின் திருப்புமைக்குச் (Moment) சமஅளவில் எதிர்த் திருப்புமை (Counter Moment) கடிகை எதிர்த் திசையில் தாங்கியால் செலுத்தப்பட வேண்டும்; இத்திருப்புமையும் விட்டத்தின் இட முனை (அஃதாவது தாங்கப்படும் முனை) யிலேயே செலுத்தப்படுகிறது. அதனால், வலப்புறம் (படம் 5.10 (a) காட்டப்பட்டுள்ள விசைப்படத்தில் உள்ளவாறு தாங்கி எதிர்வினைகளைக் குறிப்பிடுவதனால் விட்டத்தின்மீது செயல்படும் எல்லாவிதமான புறவிசைகளையும் வரையறுத்து விட்டோம். விட்டங்களின் ஆய்வின் முதற்படி தாங்கி எதிர்வினைகளைக் காணலே.

இனிப் படங்கள் 5.10 (b), (c) காட்டும் விட்டங்களில் தாங்கி வினைகளைக் காணும் முறைகளில் கவனம் செலுத்துவோம். இங்கு இரண்டு தாங்கிகள் உள்ளன. இரண்டு (இருவகை) தாங்கிகளுமே சுழற்சியைத் தடை செய்வதில்லை. அதனால், தாங்கிகள் விட்டத்தின்மீது திருப்புமை ஏதும் செலுத்த இயலாது. அதனால் தாங்கி எதிர்வினைகள், R_1 , R_2 என்னும் மேல்நோக்கிய (இவை ஒன்றோ, இரண்டோ கீழ்நோக்கியும் இருக்கலாம்) விசைகளே* எனக் காண்கிறோம். இவ்விரு விசைகளையும் அறிய, நமக்குக் கிடைக்கும் இரண்டு சமன்பாடுகள்,

$$R_1 + R_2 = P_1 + P_2 + P_3$$

$$M_z = 0$$

எனவே,

சமன்பாடுகள் 5.1 இல் இரண்டாம் சமன்பாடு, விட்டத்தின் எப்புள்ளிக்கும் பொருந்துமாயினும், ஏதாவதொரு தாங்கியை மையமாகக் கொண்டு இச்சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துவதனால் எளிதில் தாங்கி வினைகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம். இக் கருத்தினை ஓர் எடுத்துக்காட்டினால் விளக்குவோம்.

படம் 5.11 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் கண்டுபிடிப்போம். சமன்பாடுகள் 5.1 இன் முதல் சமன்பாட்டின்படி,

$$R_A + R_D = 750 + 500 = 1250N \qquad (a)$$

இரண்டாம் சமன்பாட்டை E என்னும் புள்ளியில் பயன்படுத்துவோம்.

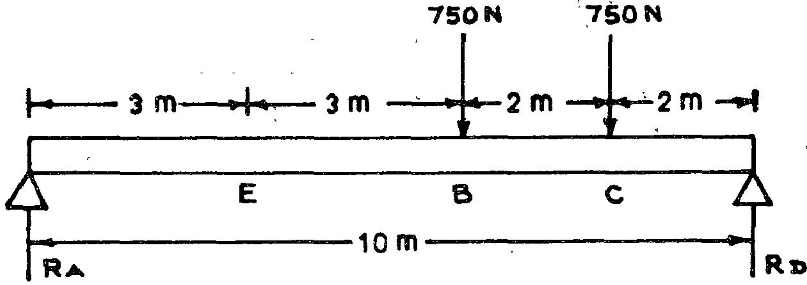
$$M_E = R_D \times 7 - 750 \times 3 - 500 \times 5 - R_A \times 3 = 0 \qquad (b)$$

$R_D = 1250 - R_A$ எனச் சமன்பாடு (a) விலிருந்து பெறலாம். எனவே சமன்பாடு (b)ஐ

$$(1250 - R_A) \times 7 - 750 \times 3 - 500 \times 5 - R_A \times 3 = 0$$

என எழுதலாம். அஃதாவது,

* கூர்முனைத் தாங்கியில் எதிர்வினை கிடைத்திசைக் கூறு (Horizontal Component) கொண்டதாயும் இருக்க முடியும். ஆனால் கிடைத் திசையில் (x திசையில்) புறவிசை ஏதும் இல்லாதபோது, தாங்கி எதிர்வினை y திசையில் மட்டுமே இருக்கும்.



படம் 5.11

$$1250 \times 7 - 750 \times 3 - 500 \times 5 - R_A \times 3 = 0 \quad (c)$$

$$4000 - 10 R_A = 0$$

$$\therefore \quad R_A = 400 \text{ N}$$

மற்றும் $R_D = 1250 - 400 = 850$ N எனப் பெறுகிறோம்.

இனி தாங்கி A யில் திருப்புமை = 0 எனச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால்,

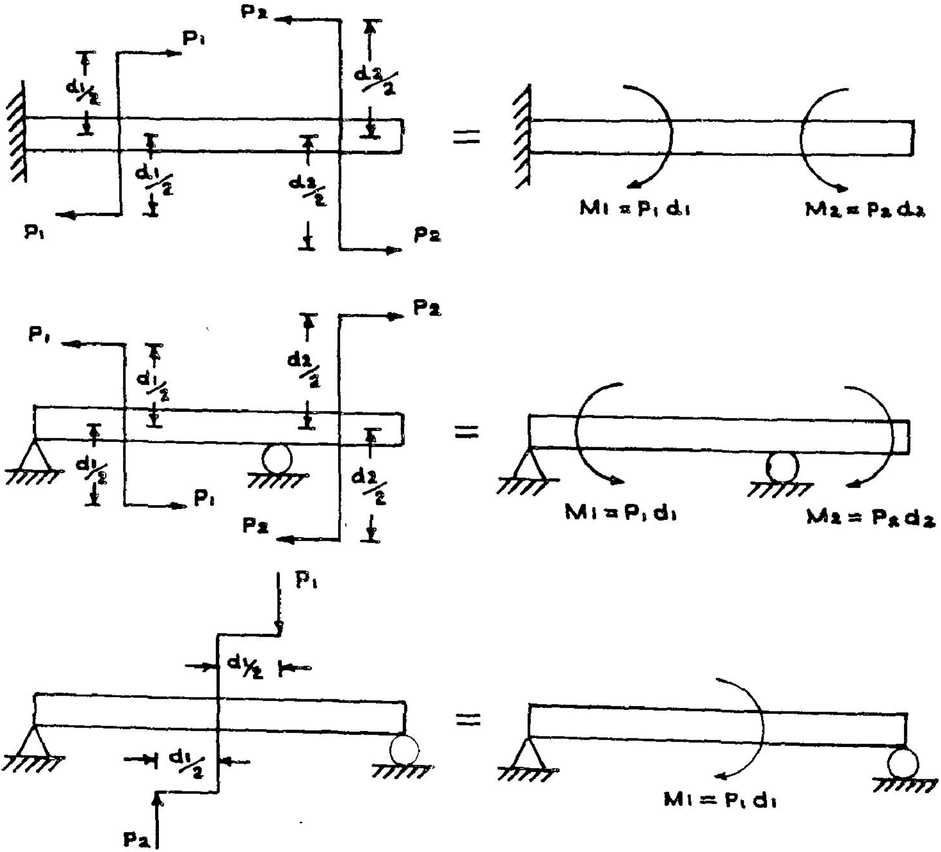
$$M_A = R_D \times 10 - 750 \times 6 - 500 \times 8 = 0$$

$$R_D = 8500/10 = 850 \text{ N}$$

என எளிதில் விடை பெறலாம்.

இனி, முக்கியமான மற்றொருவகைப் புறச்சுமையைப்பற்றியும் இங்குக் கற்போம். அஃதாவது விசையிணைகளாகச் செலுத்தப்படும் சுமைகள்.

படம் 5.12 இல் விட்டங்களின்மீது விசையிணைகள் (Couple) வடிவில் புறச் சுமைகள் செலுத்தப்படுதற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் தரப்பட்டுள்ளன. இங்கு நாம் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டிய கருத்து ஒன்றுதான். அஃதாவது, விசையிணைள் செலுத்தப்படும் விதம் எவ்வாறிருப்பினும், விட்டத்தின்மீது அவற்றின் செயல்பாடு விசையிணையின் திருப்புமையை மட்டுமே பொறுத்திருக்குமாதலால், இத் திருப்புமை (Moment) மட்டுமே புறச்சுமையாய்க் கருதப்படுதலே போதும். திருப்புமைகள் உட்படப் பல்வேறு விதச் சுமைகளின் செயல்பாட்டினை அடுத்துவரும் பகுதிகளில் விரிவாய்க் காணலாம்.



படம் 5.12

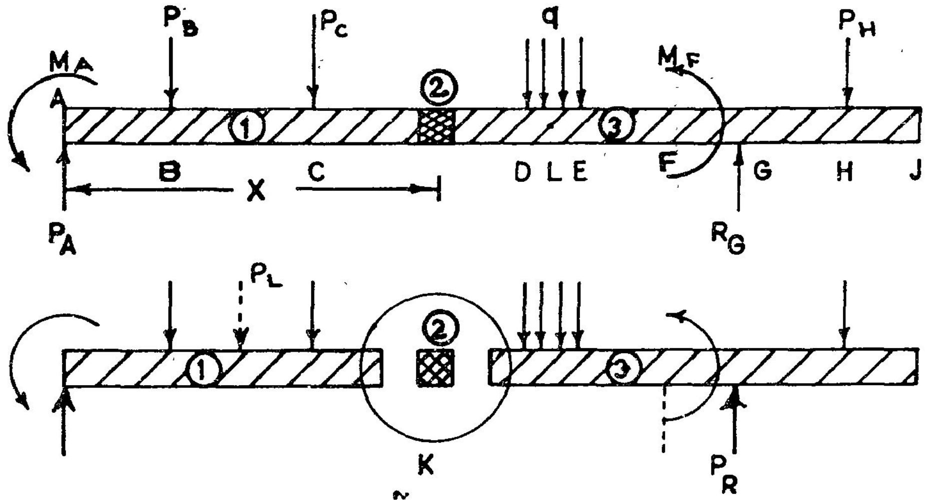
5.3 விட்டங்களில் நறுக்குவிசை, வளைதிறன், வளை திருப்புமை (Shear forces and Bending Moment in Beams)

விட்டங்களில் செயல்படும் புறவிசைகளைப்பற்றி முந்திய பகுதியிற் கண்டோம். இனி, அவை தோற்றுவிக்கும் அகவிசைகளைப்பற்றி இங்குக் காண்போம்.

விட்டத்தைப் பல பகுதிகளாகப் பிரித்துத் தனித்தனிப் பகுதிகளின் சமனிலை ஆய்வுகளை மேற்கொள்வோம். *

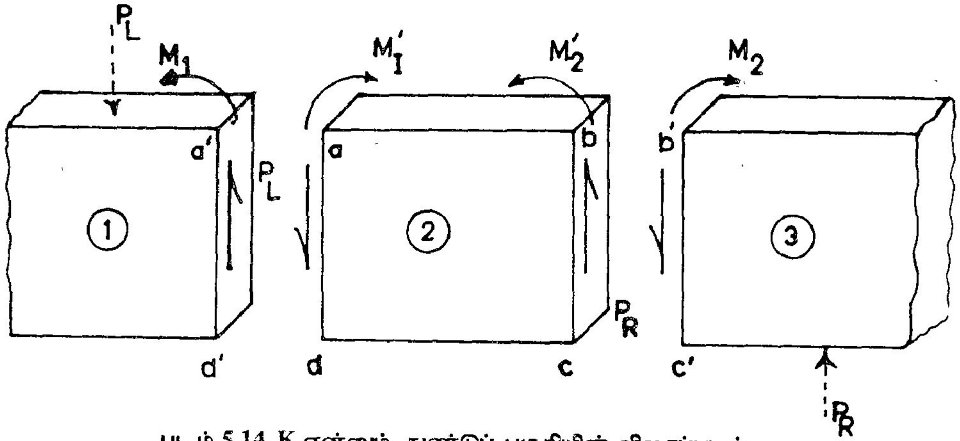
---

* படங்கள் 3.4, 4.2, 4.13 ஆகியவற்றை மீண்டும் நோக்கி, இவற்றில் எவ்வாறு கட்டமைப்புகள தனித்தனி உறுப்புகளாகப் பகுக்கப்பட்டு, தனி உறுப்புகளின் சமனிலை ஆய்வுகள்மூலம் அவ் உறுப்புகளின் அகவிசைகள் எவ்வாறு காணப்படுகின்றன என்பதை ஆழ்ந்து சிந்தியுங்கள்.



படம் 5.13 விட்டத்துண்டு ஒன்றன் சமனிலை

படங்கள் 5.13 (a) ஐ நோக்குவோம். ஒருவிட்டத்தின்மீது செயல்படும் விசைகள் (திருப்புமைகள்) யாவும், (தாங்கி எதிர்வினைகள் உட்பட படம் 5.13 (a) இல் காட்டப் பட்டுள்ளன. இவ் விசைகள் யாவும் சேர்ந்து விட்டத்தைச் சமனிலையில் இருத்துகின்றன. (அவ்வாறில்லாவிடில் இந்த ஆய்வே தேவையற்றது). அதனால் இவ் விட்டத்தைத் தனிச்சிறுபகுதிகளாய்ப் பிரித்து நோக்கினால் ஒவ்வொரு பகுதியின்மீது செயல்படும் (அஃதாவது, அதன் அண்டைப் பகுதிகளில் நேரடியாகவும் செலுத்தப்படும்). புற விசைகள் யாவும் அப் பகுதியைச் சமனிலையில் இருத்த வேண்டும். படம் 5.13 (b) இல் விட்டம் மூன்று பகுதிகளாகப் பிரித்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இவற்றுள் பகுதி ②, ①, ③ பகுதிகளைவிட மிகச் சிறிதாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. (இப் பகுதியின் நீளம் புறக்கணிக்கத் தக்க அளவில் மிகச் சிறிது எனக் கொண்டால், இப் பகுதி, விட்டத்தின் இட முனையிலிருந்து x அளவு தொலைவிலுள்ளதொரு வெட்டுமுகத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம்). பகுதி ② இன்மீது புறவிசைகள் ஏதும் செயல் படவில்லை. பகுதி ①இன்மீது செயல்படும் புறவிசைகளின் கூட்டு (Resultant), P_L என்றும், பகுதி ③ இன்மீது செயல்படும் புறவிசைகளின் கூட்டு P_R என்றும் கொள்வோம். விட்டத்தின் சமனிலை கருதில் $P_L + P_R = 0$ என்றும் சமன்பாடு கிட்டும். நிற்க, பகுதி ②உம் அதன் அண்டைப் புற விட்டப் பகுதிகளும் பெரிதாக்கப்பட்ட அளவில் படம் 5.14 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. P_L, P_R இரண்டும் வெவ்வேறு புள்ளிகளில், வெவ்வேறு பகுதிகளின்மீது செயல்படும் விசைகள்; அதனால், விட்டத்தின் மொத்தச் சமனிலையேயன்றியும், விட்டப் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் சமனிலையில் இருக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனைகளைக் கருத்திற்கொண்டு நோக்குவோம். பகுதி ②, ad, bc என்ற இரண்டு தளங்களைக் கொண்டது. a′ d′ யோடு இணையும் பகுதி ① இன் தளம் d என்றும் b′ c′ யோடு இணையும் பகுதி ③ இன் தளம் b′c′ என்றும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 5.14. K என்னும் துண்டுப் பகுதியின் விசைப்படம்

இப்போது, பகுதி ③இன் சமனிலையை நோக்குவோம். முதலில் இப் பகுதியின்மீது P_R என்னும் மேல்நோக்கியவிசை செலுத்தப்படுகிறது. இவ் விசையைச் சமனிலைப் படுத்த இப் பகுதியின்மீது, இதே அளவில் கீழ் நோக்கிய விசை செலுத்தப்பட வேண்டும். இவ் விசையைச் செலுத்த ஒரே சாதனம் பகுதி ② தான், அஃதாவது, பகுதி ② b c என்ற தளத்தின்மீது P_R அளவுள்ள கீழ்நோக்கிய விசையைச் (இது தளத்தின்மீது நறுக்கு விசையாகச் செயல்படும்) செலுத்துகிறது; அவ்வாறே பகுதி ③, bc என்ற தளத்தின்மீது P_R க்குச் சமமான மேல்நோக்கிய நறுக்கு விசையைச் செலுத்துகிறது. இவ்வாறே, பகுதி ②, ab என்ற தளத்தின்மீது P_L க்குச் சமமான கீழ்நோக்கிய நறுக்கு விசையைச் செலுத்துகிறது என்பதையும் எளிதிற் காணமுடியும். அதனால் பகுதி ② இன் இருபுறத் (இட, வல) தளங்களின்மீதும் செயல்படும் நறுக்கு விசைகளின் திசையையும் அளவையும் கண்டறிந்துள்ளோம். இடப்புறத் தளத்தின்மீது செயல்படும் நறுக்கு விசையின் அளவு, உறுப்பிற்கு இடப்புறத்திலுள்ள விட்டப் பகுதியின்மீது செயல்படும் புறவிசைகள் அனைத்தின் கூட்டுக்குச் சமம் என்பதையும், வலப் புறத் தளத்தின் மீது செயல்படும் நறுக்கு விசையின் அளவு, உறுப்பிற்கு வலப்புறத்திலுள்ள விட்டப் பகுதியில் செயல்படும் புறவிசைகளின் கூட்டுக்குச் சமம் என்பதையும் தெளிவாகக் காண்கிறோம். இவ்விரு விசைகளும் (P_L, P_R) அளவில் சமமாகவும் திசையில் எதிராகவும் இருத்தலின், உறுப்பு ②சமனிலையில் இருக்கிறது. உறுப்பின் வலப் புறத் தளத்தில் மேல்நோக்கிய இணைவிசையும், இடப்புறத்திலுள்ள தளத்தில் கீழ்நோக்கிய இணைவிசையும் இருப்பதால் பகுதி ② இன்மீது செலுத்தப்படும் நறுக்கு விசை நேர்மறையானது (+ve) என அறியலாம். அதனால் விட்டத்தின் எந்தஒரு குறுக்குப் பரப்பின் (Cross section) மீதும் செயல் படும் நறுக்கு விசையின் அளவையும், தன்மையையும் கணக்கிடக் கீழ்வரும் வாய்ப்பாட்டினைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

தேவைப்படும் குறுக்குப் பரப்பிற்கு வலப் புறத்தில் விட்டத்தின்மீது செயல்படும் புறவிசைகள் அனைத்தின் கூட்டினைக் கண்டுபிடிக்க, இது குறுக்குப் பரப்பின்மீது

செலுத்தப்படும் நறுக்கு விசையின் அளவைத் தரும். இக் கூட்டு மேல்நோக்கியிருப்பின், நறுக்குவிசை நேர்மறையானதாகும் (+ ve). அன்றிக் கீழ்நோக்கியதாயிருப்பின் நறுக்கு விசை எதிர்மறையானதாகும் (– ve)*

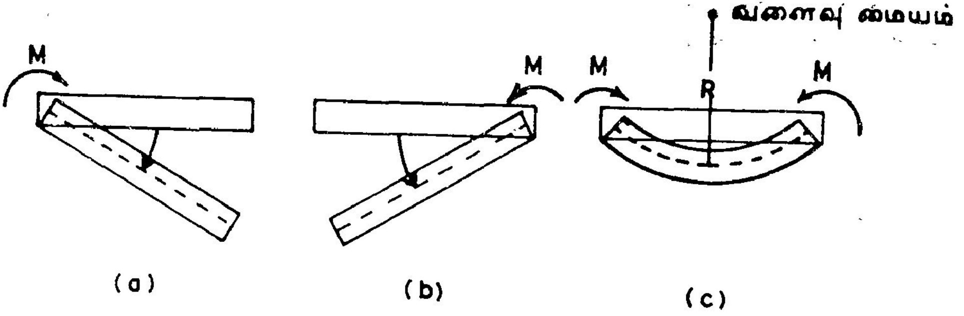
இவ் வாய்ப்பாடு பலமுறை பயன்படுத்தப்படவிருப்பதால் தெளிவாகப் புரிந்து கொள்ளப்பட வேண்டியதொரு கருத்தாகும்.

அடுத்து உறுப்புகளின் சமனிலையில் மற்றோரு முக்கிய அம்சத்தினை நோக்குவோம். பகுதி ③ இன் மீது செயல்படும் விசைகளை மீண்டும் நோக்குவோம். புறவிசைக் கூட்டு P_R, b′c′ என்னும் தளத்தின் மீது செயல்படும் நறுக்குவிசை P_R இரண்டும் அளவில் சமமாயதும், திசையில் எதிராயதுமாய விசைகள் என்பதையும் இவை இரண்டும் ஒரே நேர்க்கோட்டின் வழியாக இருக்க வேண்டுவதில்லை என்பதையும் கருதும் போது, இவ்இரண்டும் சேர்ந்து ஒருவிசையினை (Couple) யாய் அமைவதைக் காண்கிறோம். அதனால், பகுதி ③ சமனிலையில் இருக்க வேண்டின், அதன்மீது விசையிணையின் திருப்புமைக்குச் சமமான எதிர்த் திருப்புமை செலுத்தப்படவேண்டும் என்பதை உணர்கிறோம். இவ் எதிர்திருப்புமையை செலுத்தும் தாங்கியாயமையும் ஒரே சாதனம் பகுதி ② தான் என்பதையும், பகுதி ② இவ்வாறு பகுதி ③ இன் மீது திருப்புமை செலுத்தும் போது, பகுதி ② இன்மீதும் பகுதி ③ திருப்புமை செலுத்த வேண்டும் என்பதையும் சமனிலை விதிகள் உணர்த்துகின்றன. பகுதி ③இன்மீது பகுதி ②செலுத்தும் திருப்புமை M_2 எனில், பகுதி ② இன் மீது வலமுனையில், பகுதி ③ செலுத்தும் எதிர்திருப்புமை (M'_2) M_2 விற்கு அளவில் சமமாகவும், திசையில் எதிராகவும் இருக்கவேண்டும். இவ்வாறே, பகுதி ②இன் மீது இடமுனையில் செலுத்தப்படும் திருப்புமையின் அளவையும் திசையையும் கணக்கிட்டு அதனை M'_1 எனக் குறிப்போம் M'_1 , M'_2 இரண்டும் சேர்ந்து உறுப்பினைச் சமனிலையில் இருத்த வேண்டுமாதலின் இவை இரண்டும் அளவில் சமமாயும் திசையில் எதிராயும் இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு. இவ்வாறு ஓர் உறுப்பின் இருமுனைகளிலும் எதிரெதிரானதிசைகளில் (அளவில் சமமான) திருப்புமைகள் செலுத்தப்படும் போது அவற்றின் விளைவு யாதென நோக்குவோம் (படங்கள் 5.15ஐ நோக்குக).

ஓர் உறுப்பின் இடமுனையில் மட்டும் கடிகைத் திசையில் திருப்புமை செலுத்தினால் அஃது உறுப்பினை, இடமுனையை மையமாய்க்கொண்டு கடிகைத் திசையில் சுழற்ற முற்படும்; அவ்வாறே அதன் வலமுனையில் மட்டும் கடிகை எதிர்திசையில் அதே அளவு திருப்புமை செலுத்தினால் அஃது உறுப்பினை, அதன் வல முனையை மையமாய்க் கொண்டு சுழற்ற முற்படும். ஆனால், இவ் இரண்டு திருப்புமைகளும் ஒரே சமயத்தில் செலுத்தப்படும் போது, (படம்5.15 c), இவை உறுப்பினைக் கீழ்நோக்கி வளைக்க முற்படும். (இருமுனைகளிலும் திருப்புமை செலுத்தப்படும் போது தான் உறுப்பு வளைக்கப்படுமேயன்றி, ஒருமுனையில் மட்டும் செலுத்தப்படும் போது உறுப்பு சுழன்றாலும் நேராகவே இருக்கும்).

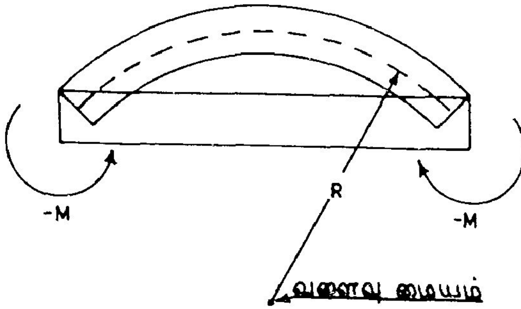
---

* சில பழைய நூல்களில் இவ் வாய்பாடே, நறுக்குவிசையின் வரையறையாய்க் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். இதனால் சரியான விடை பெறலாமெனினும், கருத்துத் தெளிவு நோக்கி, இதனை வாய்ப்பாடாகவே உணர வேண்டும்.



படம் 5.15 நேர்மறை வளைதிறன்

உறுப்பின் இரு முனைகளிலும் இவ்வாறு செலுத்தப்படும் திருப்புமை இணைகள் (Pair of Moments) உறுப்பினை வளைக்க முற்படுவதால், இவ்விணை வளைதிருப்புமை (Bending Moment) என அழைக்கப்படுகிறது. உறுப்பு வளைக்கப்படும்போது, அதன் வளைவுமையம் (Centre of Cuirvature). விட்டத்திற்கு மேலே இருப்பின், அவ் வளைவினைத் தொங்கல் (Sagging) என்றும் தொங்கலை விளைவிக்கும் வளைதிருப்புமையை நேர்மறையான திருப்புமை (+ve) என்றும் கருதுகிறோம். மாறாய் உறுப்பின் வளைவுமையம் விட்டத்திற்குக் கீழே இருப்பின், இவ் வித வளைவினைத் தூக்கல் (Hogging) என்றும், இதனை விளைவிக்கும் வளைதிருப்புமையை எதிர்மறையாவது (–ve) என்றும் கருதுகிறோம். படம் 5.15 (c) இல் காட்டப்பட்டுள்ளது நேர்மறை வளைதிருப்புமையாகும். படம் 5.16 இல் எதிர்மறை வளைதிருப்புமை (அல்லது எதிர் வளைதிருப்புமை) காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 5.16 எதிர் மறை வளை திருப்புமை

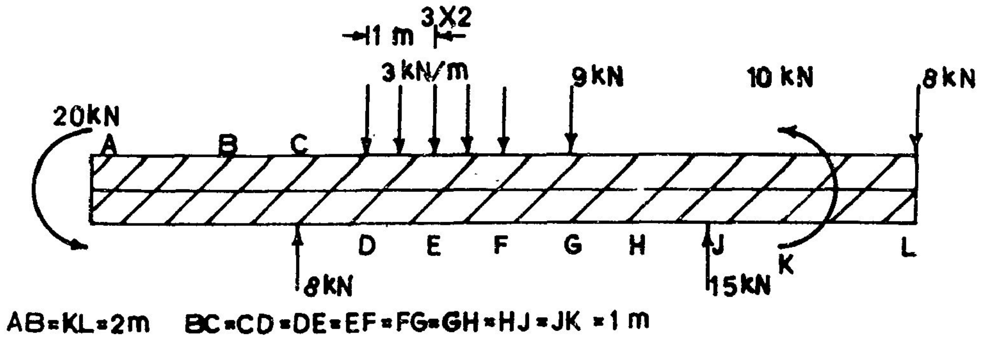
வளைதிருப்புமை என்றால் என்ன? என்பதை விளக்கமாய்க் கண்டோம். இனி அதன் அளவினைக் காண முயல்வோம். படம் 5.14 ஐ மீண்டும் நோக்குக. பகுதி ③ இன் b′c′ என்ற முனையில் செலுத்தப்படும் திருப்புமை M_2 எவ்வளவினதாய் இருக்க வேண்டும். நிலையியல் விதிகளின் படி இஃது இவ்வுறுப்பின் மீது செலுத்தப்படும் கூட்டுத் திருப்புமைக்கு (Resultant Moment) அளவில் சமமானதாயும் திசையில் எதிரானதாயும் இருக்க வேண்டும் (இங்குக் கூட்டுத் திருப்புமை என்பதில் உறுப்பின் மீது செயல்படும் விசைகளின் திருப்புமைகள், விசையிணைகளாய்ச்

செலுத்தப்படும் திருப்புமைகள் யாவற்றையும் உள்ளடக்கும்). அவ்வாறாயின், பகுதி ② இன் வலமுனையில் செலுத்தப்படும் திருப்புமை, அளவிலும் திசையிலும் பகுதி ③ இன் மீது செலுத்தப்படும் கூட்டுத் திருப்புமைக்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும். இவ்வாறே உறுப்பு ② இன் இடமுனையில் செயல்படும் திருப்புமையும், அளவிலும் திசையிலும் பகுதி ①இன் மீது செலுத்தப்படும் கூட்டுத் திருப்புமைக்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும். மேலும் உறுப்பு ②இன் இரு முனைகளிலும் செயல்படும் திருப்புமைகள் (உறுப்பினைச் சமனிலையில் இருத்துவதால் சமமாயும் எதிராயும் இருக்க வேண்டுமென்பதும் தெளிவு.

மேற்கண்ட ஆய்வுகளிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டதொரு உறுப்பின் (உறுப்பு ③ இன்) மீது செலுத்தப்படும் வளைதிருப்புமைக் காண்பதற்குரிய வாய்ப்பாட்டினை வகுக்க முடியும். வாய்ப்பாடு வருமாறு :

கொடுக்கப்பட்ட உறுப்பிற்கு வலப் புறத்திலுள்ள விட்டப் பகுதியின் மீது செலுத்தப்படும் கூட்டுத் திருப்புமையை*காண்க. இது கடிகை எதிர் திசைத் திருப்புமையாயிருப்பின், இதனை உறுப்பின் மீது செயல்படும், நேர்மறை வளைதிருப்புமையாகக் (Positive Bending Moment) கொள்க; அன்றேல் எதிர் மறை வளைதிருப்புமையாகக் கொள்க.

இவ் வாய்ப்பாட்டினைப் பயன்படுத்தும் முறைக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம். படம் 5.17 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தில் B, C, E, G, H ஆகிய புள்ளிகளில் வளைதிருப்புமை காண்போம்.



படம் 5.17

* கூட்டுத் திருப்புமை என்பது கருதப்படும் விட்டப் பகுதியின் மீது செலுத்தப்படும் புறவிசைகள் அனைத்தின் திருப்புமை (அஃதாவது விசைக x கருது புள்ளியிலிருந்து விசையின் செங்குத்துத்தூரம்) கள், விசையிணைகளின் திருப்புமைகள் இவற்றின் கூட்டு ஆகும்.

(i) புள்ளி (வெட்டுமுகம்) B* யில் வளைதிருப்புமை** (Bending Moment at B), அஃதாவது

வெட்டுமுகம் B க்கு இடப்புறத்திலுள்ள விட்டப்பகுதியில் செயல்படும் கூட்டுத் திருப்புமை (கடிகைத் திசையில்) = – 20 kNm

எனவே M_B = – 20 kN.m

இதே விடை B க்கு வலப்புறத்திலுள்ள விட்டப் பகுதியில் கூட்டுத் திருப்புமை காண்பதனாலும் அடைய முடியும்.

வெட்டுமுகம் B க்கு வலப்புறத்திலுள்ள விட்டப்பகுதியில் கூட்டுத்திருப்புமை (கடிகை எதிர்திசையில்)

$$= 8 \times 1 - (3 \times 2) - 9 \times 5 + 15 \times 7 + 10 - 8 \times 10$$

$$= -20 \text{ kN.m}$$

(இருபுறங்களிலும் எதனைக் கருதினாலும் விடை ஒன்றே வரவேண்டும்; அதனால் எப் புறத்திலுள்ள விசைகளைக் கருதினால் கணக்கீடுகள் குறைவாய் தேவைப்படுகின்றனவோ, அதனையே தேர்ந்தெடுக்க)

(ii) ' C-என்ற வெட்டுமுகத்தில்* வளைதிருப்புமை (இடப்புற விட்டப்பகுதியை நோக்குக) ** = – 20 kNm

---

* விட்ட அச்சின்மீது புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டிருப்பினும் இப் புள்ளிகளில் நாம் காணும் விசைகள், இப் புள்ளிகளையடக்கிய குறுக்குப் பரப்புகளின் மீதே செயல்படுகின்றன. என்பதைப் படம் 5.14 மூலம் உணரலாம். இப் பரப்புகளை வெட்டுமுகங்கள் (Cross Sections) என அழைக்கலாம். ஒவ்வொரு புள்ளியும் உண்மையில் ஒரு வெட்டு முகத்தையே குறிப்பிடுகிறது.

** வளைதிருப்புமைக்குக் குறியீடு M எனக் கண்டோம். அது செயல்படும் புள்ளியைக் கீழடையாகப் பயன்படுத்தல், செயல்படும் வெட்டுமுகத்தையும் வரையறுக்கிறது. அஃதாவது, M_B என்பது B என்ற வெட்டு முகத்தில் செலுத்தப்படும் (வளை) திருப்புமை மாறாக $M_{2.0}$ என்பது போன்று, திருப்புமை செலுத்தப்படும் வெட்டுமுகத்தின் ஆயத் தூரத்தையும், கீழடையாகப் பயன்படுத்தலாம்.

வலப்புற விட்டப்
பகுதியை நோக்க $= -(3 \times 2)\,2 - 9 \times 4 + 15 \times 6 + 10 - 8 \times 9$
(கடிகை எதிர்திசையில்)

$= -20$ kNm

E என்ற புள்ளியில் வளைதிருப்புமை : (விட்டத்தில் இடப்பகுதி ஐக் கருத): :

இங்குத் தொடர்சுமையில் ஒரு பகுதிதான், அஃதாவது DE என்ற நீளத்தின் மீது செயல்படும் சுமைதான், கருதப்படும் விட்டப்பகுதிமீது செலுத்தப்படுகிறது என்பது கவனத்தில் இருக்க வேண்டும்.

மொத்தக் தொடர்சுமை = 3 kN/m × 1 m = 3 kN

இது செயல்படும் தூரம்
(E யிலிருந்து x திசையில்) = − 0.5 m

எனவே, $M_E^* = -20 + 8 \times 2 - 3 \times 0.5 = -5.5$ kN.m.

வலப்பகுதியை நோக்க.

$$M_E = -3 \times 0.5 - 9 \times 2 + 15 \times 4 + 10 - 8 \times 7 = -5.5 \text{ kN.m}$$

அடுத்து (வலப்பக்கப்பகுதியை மட்டும் கருத)

$$M_G = 15 \times 2 + 10 - 8 \times 5 = 0$$

$$M_H = 15 \times 1 + 10 - 8 \times 4 = -7$$

எனப் பெறலாம்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள், கொடுக்கப்பட்டதொரு புள்ளியில் வளைதிருப்புமைக் கண்டுபிடிக்கும் முறைகளை விளக்குகின்றன. விட்டங்கள் கட்டுமானங்கள் இவற்றை ஆய்வதில் திருப்புமை கணக்கீட்டில் தெளிவு இன்றியமையாதது. அதனால், நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை கணக்கிடும் முறைகளை ஐயமின்றிக் கற்க வேண்டும்

5.4 சுமைச் செறிவு நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை இவற்றின் தொடர்புகள் (Relationships between Load Intensity, Shear Force and Bending Moment)

விட்டங்களில் தோற்றுவிக்கப்படும் நறுக்குவிசையும் வளைதிருப்புமையும் எவ்வாறு சுமைச்செறிவுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்பதை அறிதல் மிகவும் பயனுடையதாகும்.

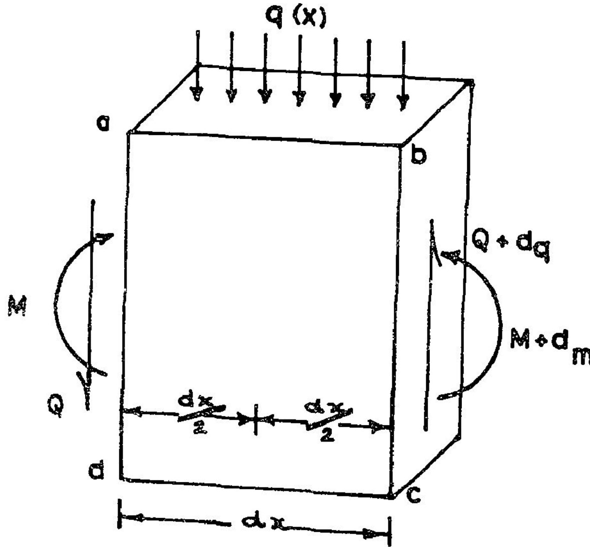
---

* கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெட்டுமுகத்திற்கு இடப்புறத்தில் விட்டப்பகுதியில் செயல்படும் விசைகளைக் (விசையிணைகளையும்) கருதும் போதெல்லாம் கடிகைத் திசைத் திருப்புமையே நேர்மறையாய்க் (Positive) கொள்ளவேண்டும். அவ்வாறே வலப்புறப் பகுதியில் செயல்படும் விசை களைக் (விசையிணைகளையும்) கருதும் போதெல்லாம், கடிகை எதிர்த் திசைத் திருப்புமையே நேர்மறையாய்க் கொள்ள வேண்டும்.

இவ் ஆய்வினைத் தொடங்குமுன், படம் 5.13 (b) ஐ மீண்டும் நோக்குவோம். இங்கு உறுப்பு ②, அஃதாவது abcd இன் மீது செலுத்தப்படும் புறவிசைகளாய் நறுக்கு விசைகளையும், (வளை) திருப்புமைகளையுமே காண்கிறோம். ஆனால் விட்டத்தில் நேரடியாகப் புறச்சுமையேலாத உறுப்பு ஒன்றற்கே இவ் விசைப்படம் பொருந்தும். அதனால் கருதப்படும் சிறு உறுப்பின் (Small element) மீதே புறச்சுமைகள் நேரடியாகச் செலுத்தப்படும் போது அதன் சமனிலையை எவ்வாறு கருதவேண்டும் என்பதனை விளக்குதற்காகப் படம் 5.13 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள, விட்டத்தில் L, C, F ஆகிய வெட்டுமுகங்களை அடக்கிய மிகச் சிறு உறுப்புகளின்(Infinite small elements) சமனிலைகளை நோக்குவோம். கருதப்படும் உறுப்பு சிறிது என்பதன் பொருள் அதன் நீளம் மிகக் குறைவு என்பதேயன்றி வெட்டு முகத்தின் குறுக்களவுகள் சிறியன என்பதன்று. அவை முழுமையாகவே கருதப்படவேண்டும். சிறு உறுப்பின் நீளம் dx எனக் கொள்வோம். குறுக்களவுகளைப்பற்றி இப்போது பொருட்படுத்த வேண்டுவதில்லை. ஏனெனில், இவ் உறுப்பின் சமனிலை ஆய்வுக்குக் குறுக்களவுகள் தேவையில்லை. (இதனால் நாம் பெறும் மற்றொரு கருத்து, சீர் விட்டம் அன்றியும், சீரிலாவிட்டத்திற்கும் (Prismaticv and non-Prismatic beams) சமனிலை ஆய்வுகள் பொருந்தும்) .

தொடர்சுமையேற்கும் உறுப்பின் சமனிலை:

படம் 5.18 இல் காட்டப்பட்டுள்ள உறுப்பின் மீது செயல்படும் விசைகளை நோக்குவோம். அவை ad என்ற பரப்பின் மீது, நறுக்குவிசை Q வளைதிருப்புமை M ; bc என்னும்



படம் 5.18

தளத்தின் மீது நறுக்கு விசை, வளைதிருப்புமை சிறிதளவு அதிகரிப்பதாய்க் கொள்வோம். எனவே bc என்ற தளத்தின் மீது நறுக்கு விசை $= Q + dQ$, வளதிருப்புமை $= M + dM$. ab என்ற தளத்தின் மீது தொடர்சுமை (கீழ்நோக்கிய சுமைகளை நேர்மறையாகக் கொள்வோம்) செலுத்தப்படுகிறது. இச் சுமை சீராய் இருப்பினும், இல்லாவிடினும் dx என்ற நீளத்திற்குள் சுமையின் செறிவு சீராய் இருப்பதாய்க் கருதுவதில் பிழை மிகச் சிறிதே. இச் சுமைச் செறிவினை q(x) எனக் கருதுவோம். அஃதாவது உறுப்பின் மையத்தில் செலுத்தப்படும் சுமைச் செறிவின் அளவையே, உறுப்பின் நீளம் முழுவதிலும் செயல்படும் சீரான சுமைச் செறிவாகக் கொள்கிறோம்.

தளம் ab மீது செலுத்தப்படும் மொத்த விசை $= q(x).dx$ இவ் விசை உறுப்பின் மைய வழியாய்ச் செலுத்தப்படுவதால்,

இது விளைக்கும் திருப்புமை அளவு $= 0$

இப்போது புறவிசைகள் யாவற்றையும் வரையறுத்துவிட்டோம்; இனி விசைகளின் சமனிலைகளைக் காணலாம்.

(i) விசைச் சமனிலை (y திசையில்)

$$-Q - q(x)dx + (Q + dQ) = 0$$

அஃதாவது $dQ = q(x).dx$

அல்லது
$$\frac{dQ}{dx} = q(x) \qquad (5.2)$$

(ii) திருப்புமைச் சமனிலை

$$-M + Q.\frac{dx}{2} + (Q + dQ)\frac{dx}{2} + (M + dM) = 0$$

அஃதாவது
$$dM = -2.Q\frac{dx}{2} - \frac{dQ.dx}{2}$$

இங்கு dQ, dx இரண்டுமே சிறு அளவின. ஆகலின் அவற்றின் பெருக்கல் தொகை மிகச்சிறு அளவினதாகவே இருக்குமாதலின், அதனைப் புறக்கணித்து விடலாம். எனவே

$$dM = -Q.dx$$

அல்லது
$$\frac{dM}{dx} = -Q \qquad (5.3)$$

ஆனால், நறுக்குவிசை Q இன் மதிப்பு (சமன்பாடு 5.3 இல் கிடைக்கும் வகையில்) சமன்பாடு 5.2 இல் பயன்படுத்தப்பட்டால்

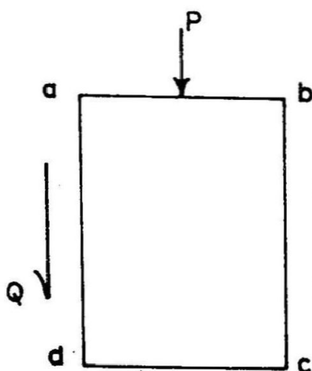
$$q\ (x) = \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-dM}{dx}\right) = -\frac{d^2M}{dx^2}$$

அஃதாவது,

$$q\ (x) = -\frac{d^2M}{dx^2}$$

சமன்பாடுகள் 5.2, 5.3, 5.4 ஆகியன சுமைச்செறிவு, நறுக்கு விசை, வளைதிருப்புமை இவற்றுக்கிடையேயான அடிப்படைக் கணித உறவுகளாகும். பல சூழல்களில், நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை இவற்றைக் கணிப்பதில் இவ்உறவுகளைப் பயன்படுத்திக் கணக்கீடுகளை எளிமைப்படுத்தலாம்.

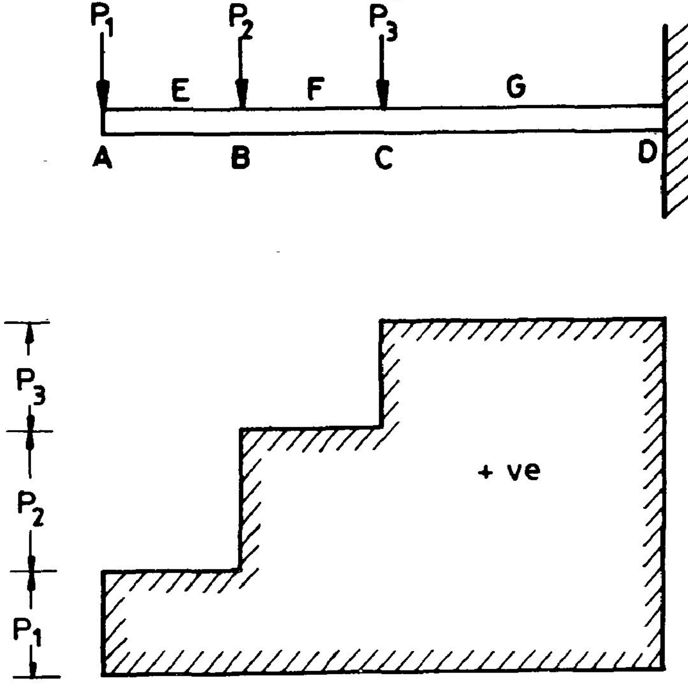
குளிசுமை ஏற்கும் உறுப்பின் சமனிலை:



படம் 5.19

படம் 5.14 இல் உள்ள விட்டத்தின் C என்ற வெட்டுமுகத்தில் ஒரு சிறு உறுப்பினைத் தேர்ந்தெடுத்து அதன் மீது செயல்படும் புறச்சுமைகள் படம் 5.19 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவ் உறுப்பின் விசைச் சமனிலையை நோக்கினால், இடப்புற வெட்டுமுகத்தின் மீது நறுக்குவிசை Q வும் வலப் புறவெட்டுமுகத்தின் மீது நறுக்குவிசை (Q+P) யும் இருப்பதைக் காண்கிறோம். சிற்றுறுப்பினையே முழுமையாக மறந்துவிட்டு விட்டத்தின் இரண்டு (இடப்புற, வலப்புற) பகுதிகளையும் நோக்கு வோமாயின், இடப்புறப் பகுதியின், வலமுனை வெட்டுப் பரப்பின் மீது செயல்படும் நறுக்கு விசையின் அளவு Q எனவும், வலப்புறப் பகுதியின் இடமுனை வெட்டுப் பரப்பின் மீது செயல்படும் நறுக்குவிசையின் அளவு (Q+P) எனவும் பெறுவோம். விட்டங்களின் நறுக்குவிசைப் படங்களை வரையும் போது பெரும்பாலோர்க்கு ஏற்படும் குழப்பத்தைத் தவிர்க்க உதவும் ஓர் எடுத்துக்காட்டினைக் காண்போம்.

படம் 5.20 இல் காட்டியுள்ள துருத்துவிட்டம் AD யின் நறுக்குவிசைப் படம் (Shear Foce Diagram) அஃதாவது, விட்டத்தின் ஒவ்வொரு வெட்டுமுகப்பிலும் நறுக்குவிசையின் அளவைக் காட்டும் படம், வரைந்து காட்டப்பட்டுள்ளது. விட்டத்தில் A, B, இரண்டிற்கு மிடையே ஏதாவதொரு புள்ளியில் உள்ள ஏதாவதொரு E என்னும் வெட்டுமுகத்தை எடுத்துக் கொண்டால், அதன் மீது செலுத்தப்படும் நறுக்குவிசை = P_1 அவ்வாறே B,C இரண்டிற்கு மிடையேயுள்ள ஏதாவதொரு F என்னும் வெட்டுமுகத்தின் மீது நறுக்குவிசை = $P_1 + P_2$ என்பதிலும் குழப்பமில்லை. அடுத்து, B என்னும் வெட்டுமுகத்தின்மீது செயல்படும் நறுக்கு விசையின் அளவு என்ன? என்பதில் தான் குழப்பம் ஏற்படக்கூடும். நறுக்குவிசைப் படத்தை நோக்கினால் B என்னும் வெட்டுமுகத்துக்கு நேராய் வரைபடம் செங்குத்தாயிருக்கிறது.



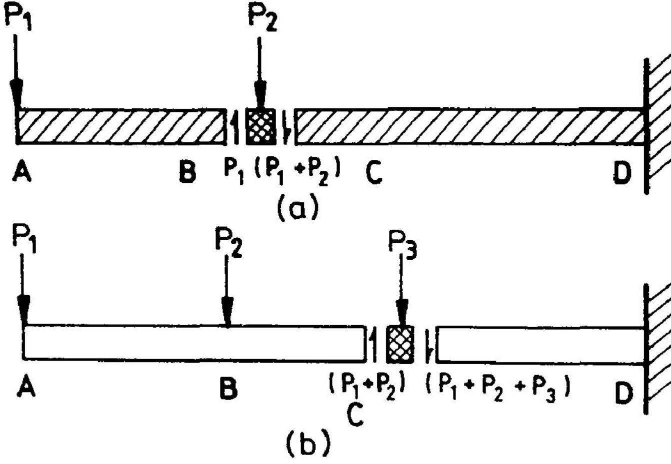
படம் 5.20 நறுக்கு விசைப்படம்

அஃதாவது, நறுக்குவிசையின் அளவு P_1 முதல் (P_1+P_2) வரை எது வேண்டுமாயினும் இருக்கலாம் (கணித ரீதியாக). ஆனால், அதற்கு நாம் எவ்வாறு பொருள் கொள்ளவேண்டும் என்பதைப் படங்கள் 5.21 விளக்குகின்றன.

B என்ற புள்ளியில் விட்டத்தை இரு பகுதிகளாய்ப் பிரித்தால், இடப் புறப்பகுதியில் வெட்டுமுகத்தில் நறுக்கு விசையின் அளவு P_1 என்பதையும் வலப்புறப் பகுதியில் வெட்டு முகத்தில் நறுக்கு விசையின் அளவு $(P_1 + P_2)$ என்பதையும் படம் 5.21 (a) விளக்குகிறது. அவ்வாறே C என்ற புள்ளியில் விட்டத்தின் இரு (இட, வல) பகுதிகளின் வெட்டுமுகங்களில் செயல்படும் நறுக்குவிசைகளின் அளவுகள் முறையே $(P_1 + P_2)$, $(P_1 + P_2 + P_3)$ என்பதையும் படம் 5.21 (b) இல் காண்க.

படம் 5.20 இல் காட்டப்பட்டுள்ள குவிசுமைகள் $P_1 = 300$ N, $P_2 = 500$ N, $P_3 = 200$ N எனக் கொள்வோம். மேலும் AB = BC = 1 m, CD = 2 m என்றும், P_2 உண்மையில்

+ R_F இன் குறி + எனில் இது மேல் நோக்கு விசை என உணரலாம்.



படம் 5.21 குவிசுமைப் புள்ளிகளில் நறுக்குவிசைகள்

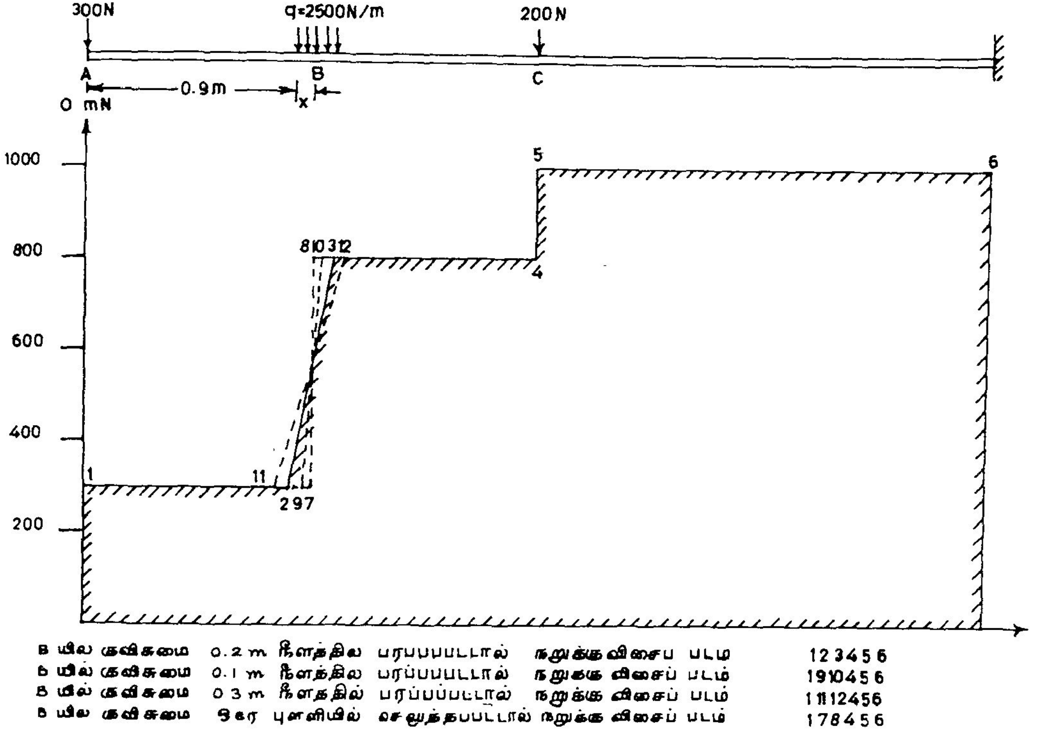
குவிவிசையாயில்லாமல் 0.2 m நீள விட்டப்பகுதியில் சீர் தொடர்சுமையாகச் செலுத்தப்படுகிறது என்றும் கொண்டு ஆய்ந்து பார்ப்போம். இச் சுமை விட்டத்தில் x = 0.9, x = 1.1 என்னும் வெட்டுமுகங்களுக்கு இடையே செலுத்தப்படுகிறது. இப் பகுதியில் சுமைச்செறிவு

$$= \frac{500 \text{ N}}{0.2 \text{ m}} = 2500 \text{ N/m}.$$

A- இல் இருந்து x தொலைவில் உள்ளதொரு வெட்டுமுகத்தில் நறுக்குவிசை Q_x (நியூட்டனில்) $= 300 + 2500\,(x - 0.9)$

$$\therefore \quad Q_x = (2500x - 1950) \text{ N} \qquad (5.5)$$

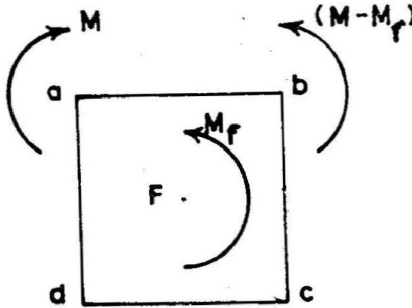
5.5 என்பது ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு. அதனால் இரு புள்ளிகளில் (x = 0.9, x=1.1) Q இன் மதிப்பினைக் கண்டுபிடித்து நேர்க்கோட்டால் இணைக்கலாம். $Q_{0.9} = 300$ N: $Q_{1.1} = 800$ N இவ்விரு எல்லைகளுக்கிடையே பல்வேறு பகுதிகளில் Q இன் மதிப்பு 300N முதல் 800 N வரை தொடர்ந்து மாறிக்கொண்டே வருகிறது. P_2 செலுத்தப்படும் நீளம் மாறமாற , நறுக்கு விசைப் படம் 5.22 காட்டுகிறது. P_2 செலுத்தப்படும் நீளம் 0 ஆகக் குறுக்கும் போது, நறுக்குவிசைப் படமும், படம் 5.20 இல் உள்ள நறுக்கு விசைப் படமாக மாறுவதையும் நோக்கலாம்.



படம் 5.22 குவிசுமைப் புள்ளிகளில் நறுக்குவிசைகள்

விசையிணை செலுத்தப்படும் உறுப்பின் சமனிலை:

படம் 5.13 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின் F என்ற வெட்டுமுகத்தில் ஒரு சிறிய உறுப்பின் சமனிலையை நோக்குவோம். வெட்டு முகத்தில் சிறிய துண்டு படம் 5.23 இல் தனியே காட்டப்பட்டுள்ளது. இங்கு உறுப்பின் மீது செலுத்தப்படும் விசையிணையின் திருப்புமை M_f ஐயும் நோக்கினால், உறுப்பின் இடமுனையில் (ad) வளைதிருப்புமை M எனில், வலமுனையில் வளை திருப்புமை $(M-M_f)$ எனச் சமனிலை வாய்பாட்டால் அறியலாம். அஃதாவது விட்டத்தின் இடப்புறப் பகுதியின் வலமுனை (a′ d′) யில் வளை திருப்புமை M என்றும், வலப்புறப் பகுதியின் இடமுனை (b′ c′) யில் வளைதிருப்புமை $(M-M_f)$ என்றும் அறிய வேண்டும். (M_f) இன் அளவை அதற்குரிய குறியோடு (+ அல்லது −) பயன்படுத்த வேண்டும். அஃதாவது M_f + ve திசையில் (கடிகை எதிர்திசை) இருந்தால்தான் bc யின் மீது வளைதிருப்புமை $(M-M_f)$ என எழுதலாம்.



படம் 5.23

அதனால் வளைதிருப்புமை படங்களில் (Bending Moment Diagrams) விசையிணையின் திருப்புமையை தக்கவாறு சேர்த்துக் கொள்ளவேண்டும்.

இப்பகுதியை முடிக்குமுன் திருப்புமைகளின் திசைபற்றிய இரண்டு வித மரபுகளை விளக்குதல் பயனுடையது. வளைதிருப்புமை என்பதைப் பல சமயங்களில் திருப்புமை என்னும் பொதுச் சொல்லாலேயே குறிப்பர். உண்மையில் இது தனியாய திருப்புமை அன்று ; இரண்டு எதிரான திருப்புமைகளின் இணையே என்பதை முன்னர் விளக்கினோம். இவ்வாறு திருப்புமையைக் குறிப்பிடுதல் நலிவுசார் மரபு (Deformation Convention) எனப்படும். இம்மர பின்படி திறனின் குறி + ஆ, அல்லது – ஆ, என்பதை அஃது உறுப்பில் எம் முனையில் செலுத்தப்படுகிறது என்பதை வைத்தே சொல்ல முடியும். அவை:

இட முனையில் கடிகைத்திசைத் திருப்புமை எனில் + ve
இட முனையில் கடிகை எதிர்திசைத் திருப்புமை எனில் – ve

இம் மரபு விட்டங்களின் வளைதன்மை, அதனால் தோற்றுவிக்கப்படும் தனகவுகள், இடப்பெயர்ச்சிகள் இவற்றை ஆய்வதில் பயன்படும். ஆனால் சமனிலைச் சமன்பாடுகளில் இம் மரபினைப் பின்பற்றின் குழப்பமே விளையும். அதனால், சமனிலை ஆய்வுகளில், கடிகை எதிர்திசைத் திருப்புமைகளை (அவை எம் முனையில் செலுத்தப்பட்டாலும்) நேர்மறையாகவும், கடிகைத் திசைத் திருப்புமைகளை எதிர்மறையாகவும் கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு கொள்ளல், இடவெளி மரபு (space convention) எனப்படும். அதனால், ஆய்வுப் பகுதிகளில் திருப்புமைகள் எம் மரபின் படி உரைக்கப்பட்டிருக்கின்றன? என்பதை அறிந்து பயில வேண்டும்.

5.5 நறுக்கு விசை, வளைதிருப்புமைப் படங்கள் (Shear Force and Bending Moment Diagrams)

ஒரு விட்டத்தின் எந்தவொரு வெட்டுமுகத்திலும் நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை இவற்றைக் கணக்கிடும் முறைகளைக் கற்றோம். விட்டத்தின் எல்லாப் பகுதிகளிலும் இவற்றை அறிந்துகொள்ளல் விட்டத்தின் முழுமையான ஆய்வு எனலாம். இவ்வாறான ஆய்வுகளின் முடிவுகளை வரைபட வடிவில் அளித்தல் விரைந்து உணர உதவும் முறையாய் இருப்பதால், நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை படங்களை வரைதல் பொருள்வலிமை இயலில் மிக முக்கியப் பயிற்சியாகும். அதனால் விளக்கமான எடுத்துக்காட்டுகளுடன் இத் துறையில் தேர்ச்சி காணல் அவசியம்.

முதலிற் சில கலைச் சொற்களுக்கு விளக்கம் காண்போம்.

நீட்டம் (Span) : விட்டத்தை விவரிக்கும் அளவீடுகளில் முக்கியமானது நீட்டம் என அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு துருத்துவிட்டத்தைப் பொறுத்தமட்டில் அதன் முழுநீளத்தையும் நீட்டம் என அழைக்கிறோம். எளிமை தாங்கி விட்டத்தில் இரு தாங்கிகளின் மையங்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தையே நீட்டம் என்கிறோம். தொடர்விட்டங்களின் மொத்த நீளத்தை முழுநீட்டம் (Total span) எனக் குறிப்பிட்டு, இடையே இருதாங்கிகளுக் கிடையிலுள்ள பகுதிகளையும் தனித்தனி நீட்டங்கள் என்றே அழைக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாய் (படம்8.5 f) ஒரு விட்டத்தின் முழுநீளம் ABCD யில் A, B, C, D எனும் நான்கு புள்ளிகளிலும் தாங்கிகள் இருப்பின், AB, BC, CD என்னும் பகுதிகள் தனித்தனி நீட்டங்களாகவே கருதப்படுகின்றன.

முனை தொடங்குவிட்டங்களில் தாங்கிகளுக்கிடையேயுள்ள விட்டப் பகுதியைத் தாங்குநீட்டம் (Supported span) என்றும் தாங்கிகளுக்கப்பால் நீட்டிக்கொண்டிருக்கும் பகுதிகளைத் தொங்கு நீட்டம் (Overhanging span) அல்லது துருத்து நீட்டம் (cantilever span) என்றும் அழைக்கின்றனர்.

எடுத்துக்காட்டு 5.1

படம் 5.24 இல் காட்டப்பட்டுள்ள துருத்துவிட்டத்தின் நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை படங்கள் வரைக. விட்டத்தின் தொங்கு முனை A யில் எவ்வளவு மேல் நோக்கிய விசை செலுத்தினால், தாங்கியில் வளைதிருப்புமையைப் பாதியாய்க் குறைக்கலாம்?

தீர்வு:

விட்டத்தின் தொங்குமுனை A யை ஆய மையமாகக் (Origin of Coordinates) கொண்டு, மையத்திலிருந்து x தொலைவிலுள்ள தொரு x-x என்ற வெட்டுமுகத்தினை நோக்குவோம். இங்கு

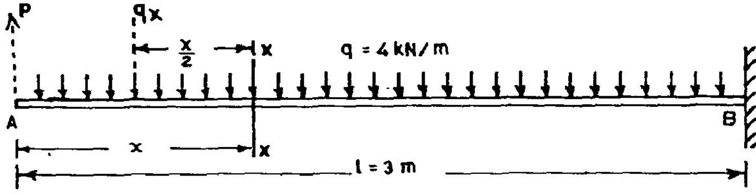
நறுக்குவிசை, Q_x = சுமைச்செறிவு x சுமை செயல்படும் நீளம்

$$Q_x = + q.x \qquad (5.6)$$

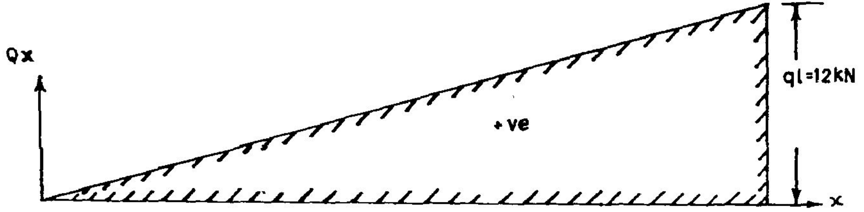
qx அளவுள்ள விசையின் கூட்டு, வெட்டுமுகத்திற்கு இடப்புறமாய் $\frac{x}{2}$ தொலைவில் செயல்படுகிறது. அதனால்,

வெட்டுமுகத்தில் வளைதிருப்புமை M_x
(இடப்பக்கம் ஆகலின் கடிகைத் திசையில் திருப்புமை நேர்மறையாகக் கொள்க) $= - qx.\frac{x}{2}$

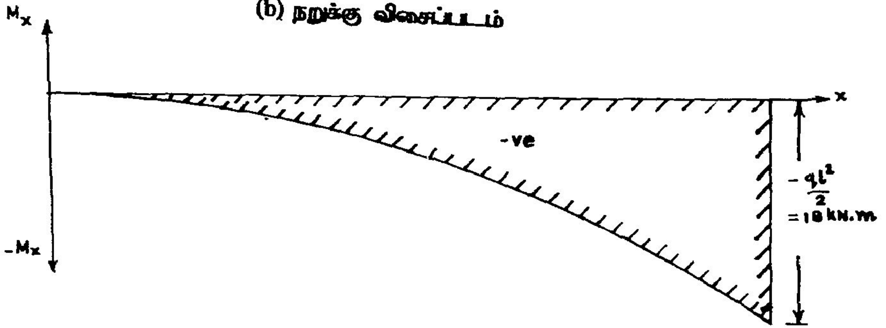
$$M_x = -\frac{qx^2}{2} \qquad (5.7)$$



(a) திருத்து விட்டத்தின் மீது சீர்தொடர் சுமை



(b) நறுக்கு விசைப்படம்



(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

படம் 5.24

ஆயமையத்திலிருந்து x-x என்ற வெட்டுமுகத்தின் தொலைவினை x என்று பொதுவாக நாம் வரையறுத்துள்ளோம். இப்போது எப்புள்ளியில் (வெட்டுமுகத்தில்) நறுக்கு விசையோ, வளைதிருப்புமையோ தேவைப்படுகிறதோ, அவ் வெட்டுமுகத்தின் ஆயத்தூரத்தை (x ஐ) சமன்பாடுகள் (5.6), (5.7) களில் பயன்படுத்தி விடைகளைப் பெறலாம். விட்டம் முழுவதிலுமுள்ள வெட்டுமுகங்கள் ஒவ்வொன்றின் நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புகளை இவ்வாறே பெற முடியும். அவ்விடைகள் வரைபடமாகப் படம் 5.24. இல் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. இப்படத்தில் x, Q_x, M_x முதலாய அச்சுகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. ஆனால், போதிய தேர்ச்சி பெற்றோர்க்கு இவை தேவையில்லை. வரைவின் உட்புறத்திலேயே +ve அல்லது – ve என்று குறிப்பிடுவதே போதும்.(இனிவரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் நாமும் இம் முறையையே பின்பற்றுவோம்.

இவ்வெடுத்துக்காட்டில் (சீர்சுமைபேற்கும் துருத்துவிட்டத்தில்), நறுக்குவிசை, வளைதிறன்களின் உச்சமதிப்பு தாங்கியில் (B), இருப்பதைக் காண்கிறோம். அதனால்

$$Q_{max} = + q L \qquad (5.8)$$

இங்கு, $Q \; 4 \times 3 = 12 \text{ kN}$

வளைதிருப்புமை உச்ச மதிப்பு (அளவில்)

$$M_{max} = -\frac{q L^2}{2}$$

அஃதாவது $-4 \times \dfrac{32}{2} = -18 \text{ kN.m}$

இனி, தொங்கு முனை (Free end) A - இல் மேல்நோக்கிய விசை P செலுத்தப்படுவதாய்க் கருதுவோம். இப்போது x-x என்னும் வெட்டுமுகத்தில் வளைதிருப்புமை

$$M_{max} = -\frac{q x^2}{2} + P.x$$

தாங்கி வளைதிறன், $M_B = -\dfrac{q l^2}{2} + Pl$

M இருக்க வேண்டிய அளவு $= \dfrac{\left(-\dfrac{q l^2}{2}\right)}{2}$

அஃதாவது $-\dfrac{q l^2}{2} + Pl = -\dfrac{q l^2}{4}$

$$\therefore \quad Pl = +\frac{q l^2}{4}$$

$$\therefore \quad P = \frac{q l}{4}$$

எனவே, தாங்கியில் வளைதிருப்புமையின் அளவு பாதியாகக் குறைக்கப்பட வேண்டு மானால்,

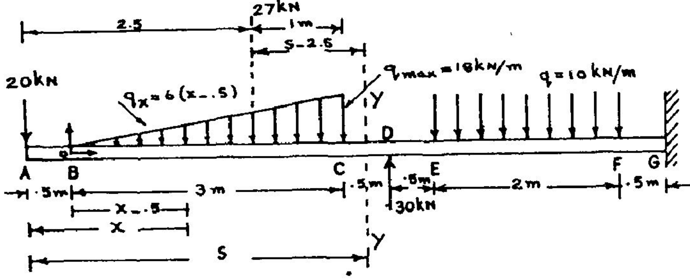
தொங்குமுனையில் செலுத்தப்பட

வேண்டிய மேல் நோக்கிய விசை $P_A = \dfrac{q l}{4}$

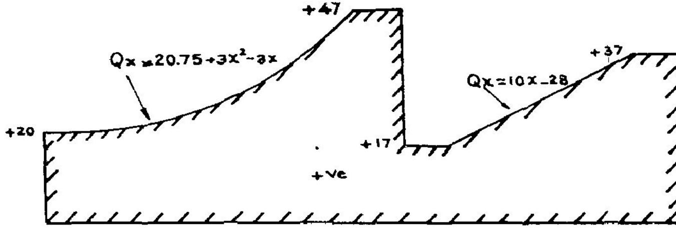
$$= 4 \times \frac{3}{4} = 3 \text{ kN.}$$

எ.கா. 5.2

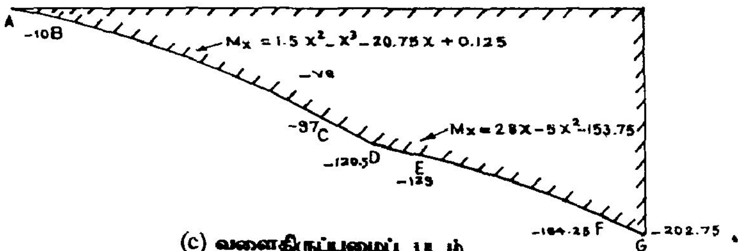
படம் 5.25 இல் காட்டப்பட்டுள்ள துருத்துவிட்டத்தின் நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமைகளின் படம் வரைந்து முக்கிய மதிப்புகளைக் குறிப்பிடுக.



(a) விட்டமும் சுமைகளும்



(b) நறுக்கு விசைப்படம்



(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

படம் 5.25

இவ் எடுத்துக்காட்டில் விசைகளின் வேறுபாடுகள் மிகுதியாயிருப்பதால் நறுக்குவிசை, திருப்புமைகளை உரைக்கும் கோவைகள் AB, BC முதலாய வெவ்வேறு விட்டப்பகுதிகளுக்கும் தனித்தனியே கண்டுபிடிக்கப்பட வேண்டும்.

AB இல் :

நறுக்கு விசை, $Q_x = +20$ kN

வளைதிருப்புமை, $M_x = -20x$

A,B எனும் வெட்டுமுகங்களின், Q_x, M_x களை முறையே x = 0, x = 5, எனும் ஆயத் தூரங்களைப் பயன்படுத்த.

$$M_A = -20 \times 0 = 0$$

$$M_B = -20 \times 0.5 = -10 \text{ kN.m.}$$

BC இல்

ஆய மையத்திலிருந்து x அளவு தூரத்திலுள்ள வெட்டுமுகம் x இல் நறுக்கு விசை, Q_x களை,

இவ் வெட்டுமுகத்தில் சுமைச்செறிவு q_x எனில், விட்டப் பகுதி BX இல் செயல்படும் தொடர்சுமையின் சராசரி அளவு.

$$q_{av} = \frac{q_b + q_x}{2}$$

இதில் q_x இன் மதிப்பினை முக்கோணப் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி.

$$\frac{q_x}{BX} = \frac{q_c}{BC} \text{ என்பதிலிருந்து}$$

$$q_x = \frac{q_c}{BC} \times BX = \frac{18\,(x-0.5)}{3}$$

$$= 6\,(x-0.5)$$

எனவே சராசரிச் செறிவு

$$q_{av} = \frac{6\,(x-0.5)+0}{2}$$

$$= 3\,(x-0.5)$$

BX பகுதியில் செயல்படும் மொத்த விசை $= 3\,(x-0.5).\,(x-0.5)$

எனவே, வெட்டுமுகம் x இல் நறுக்குவிசை $Q_x = 20 + 3\,(x-0.5)^2$

குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் Q_x காண,

$$Q_{1.5} = 20 + 3(1.5 - 0.5)^2 = 23 \text{ kN}$$

அவ்வாறே $Q_{2.5} = 32$ kN

$$Q_{3.5} = 47 \text{ kN}$$

மாற்றுமுறை

சில சூழ்நிலைகளின் சமன்பாடுகள் 5.2, 5.3 எனும் இவை தரும் உறவுகளைக் கொண்டும் நறுக்குவிசைகளையும், வளைதிருப்புமைகளையும் எளிதிற் காணலாம்.

அஃதாவது, $q_x = \dfrac{dQ}{dx}$ இலிருந்து $dQ = q_x \cdot dx$ என எழுத

$$Q_x = \int q_x \cdot dx \qquad (5.9)$$

$$M_x = -\int Q_x \cdot dx \qquad (5.10)$$

என்னும் உறவுகளைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாய்,

BC யில் $q_x = 6(x - 0.5)$

எனவே $Q_x = \int (6x - 3)\, dx$

∴ $Q_x = 3x^2 - 3x + C_1 \qquad (5.11)$

இங்கு தொகையெச்சம் (Integration constant) C_1 இன் மதிப்பினைக் கண்டுபிடித்த பின்னரே, கோவை (5.11) ஐப் பயன்படுத்த முடியும்.

BC யில் (x = 0.5 என்னும் புள்ளியில்) $Q_x = 20$ kN என்பதை அறிவோம்.

எனவே, $3 \times 0.5^2 - 3 \times 0.5 + C_1 = 20$

∴ $C_1 = 20 + 1.5 - .75 = 20.75$ kN

ஆகவே, $Q_x = 20.75 + 3x^2 - 3x \qquad (5.12)$

இதிலிருந்து $Q_{1.5} = 20.75\ 3 \times 1.5\ 2 - 3 \times 1.5 = 23$ kN

$Q_{2.5} = 32$ kN

$Q_{3.5} = 47$ kN எனப் பெறுகிறோம்.

மற்றும் $M_x = -\int Q_x\, dx = -(20.75 + 3x^2 - 3x)\, dx$

$= 1.5\, x^2 - x^3 - 20.75\, x + C_2$

எனவும் பெறலாம்.

தொகையெச்சம் C_2 இன் மதிப்பைக் காண,

$x = 0.5$ என்னும் புள்ளியில், $M_x = -10$ kN.m என்பதைப் பயன்படுத்துவோம். அஃதாவது.

$M_{0.5} = 1.5\times (0.5)\,2 - (0.5)\,3 - 20.75\times 0.5 + C_2 = -10$

எனவே, $C_2 = -10 + 20.75 \times 0.5 + 0.5^3 - 1.5 \times 0.5^2$

$= 0.125$

எனவே, $M_x = 1.5\, x^2 - x^3 - 20.75\, x + 0.125$

இதிலிருந்து $M_{1.5} = 1.5 \times (1.5)^2 - (1.5)^3 - 20.75\times 1.5 + 0.125$

$= 31$ kN.m

$M_{2.5} = -58$ kN.m

$M_{3.5} = -97$ kN.m

(ஆயமையத்தை B யில் கொண்டிருப்பின் கணக்கீடுகள் குறைந்திருக்கும். இதனைப் பயிற்சியாய்ச் செய்து காண்க).

CD யில்,

நறுக்குவிசை $Q_x = 47$ kN

வளைதிருப்புமை $M_x = -\int 47\, dx$

$M_x = -47\, x + C_3$

$M_{3.5} = -47 \times 3.5 + C_3 = -97$

எனவே $C_3 = -97 + 7 \times 3.5 = 67.5$

எனவே $M_x = 67.5 - 47x$

விசைகளின் திருப்புமைகளை நேரடியாகக் கணக்கிட்டு இதனைப் பெறுவோம். CD என்ற பகுதியில் SS என்ற வெட்டுமுகத்தைக் கருதுவோம். இதன் ஆயத் தூரம் $x_{ss} = s$ எனக் கொள்க.

$x = 0$ இலிருந்து $x = s$ வரை, செயல்படும் சுமைகள்

$x = 0$ வில் 20 kN

BC இல் செயல்படும் தொடர் சுமையின் கூட்டு $= \dfrac{(q_{max} + q_{min}) \times \text{நீளம்}}{2}$

$$= \frac{18}{2} \times 3 = 27 \text{ kN}$$

இது செயல்படும் வெட்டுமுகம் B இலிருந்து 2m அஃதாவது $x = 2.5$ m. (முக்கோணத்தின் மையம்)

எனவே, $M_{x=s} = -20s - 27(s - 2.5)$

$$M_s = 67.5 - 47s$$

(இரண்டு முறைகளிலும் அவ்வச் சூழ்நிலைகளில் எம்முறை எளிதாக உள்ளதோ அதனைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.)

$$M_D = 67.5 - 47 \times 4 = -120.5 \text{ kN.m}$$

DE இல்,

நறுக்குவிசை $Q_x = 20 + 27 - 30 = 17$ kN

வளைதிருப்புமை $M_x = -\int 17\, dx = -17x + C_4$

$M_{4.0} = -120.5$ எனவே $-17 \times 4 + C_4 = -120.5$

$$\therefore \quad C_4 = 120.5 - 17 \times 4 = 52.5$$

$$M_x = -17x - 52.5$$

$$M_E = M_{4.5} = -129 \text{ kN}$$

EF இல்,

$$q_x = 10$$

நறுக்குவிசை $Q_x = \int q_x\, dx = \int 10\, dx = 10x + C_5$

$x = 4.5$ எனில் $Q_x = 17$

எனவே $10 \times 4.5 + C_5 = 17$

$$\therefore \quad C_5 = 17 - 10 \times 4.5 = -28$$

$$Q_x = 10x - 28$$

$$Q_{x=6.5} = 10 \times 6.5 - 28 = 37 \text{ kN}$$

வளைதிருப்புமை, $M_x = \int Q\,dx = \int (10x - 28)\,dx$

$$= 28_x - 5x^2 + C_6$$

E இல் (x = 4.5), $M_{4.5} = 28 \times 4.5 - 5 \times 4.5^2 + C_6 = -129$

$$\therefore \quad C_6 = -129 - 28 \times 4.5 + 5 \times 4.5^2 = -153.75$$

$$M_x = 28x - 5x^2 - 153.75$$

$$M_{5.5} = -151$$

$$M_{6.5} = -184.25$$

FG இல்,

நறுக்குவிசை $Q = 37 \text{ kN}$

வளைதிருப்புமை $M_x = -\int 37\,dx = -37x + C_7$

$$M_{6.5} = -37 \times 6.5 + C_7 = -184.25$$

$$\therefore \quad C_7 = -184.25 + 37 \times 6.5 = 56.25$$

$$M_x = 56.25 - 37x$$

$$M_G = M_{7.0} = 56.25 - 37 \times 10 = -202.75$$

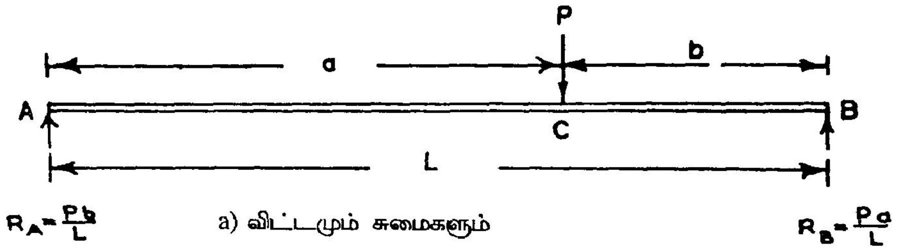
இவ் விடைகளை வரைபட வடிவில் (படம் 5.25 இல்) தொகுத்தளிப்பதுவே, நறுக்குவிசை வளைதிறன் படவரைவுகள் என்பனவாம்.

எ.கா. 5.3

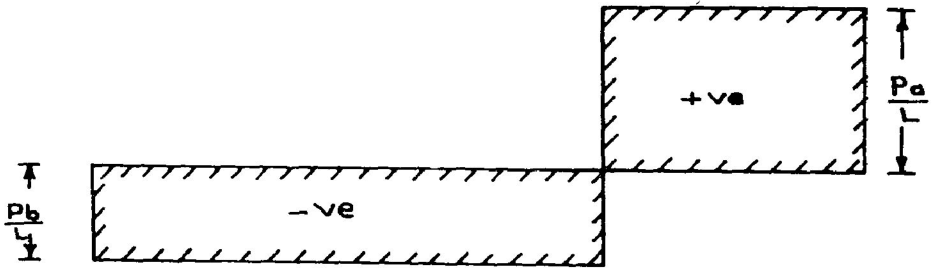
படம் 5.26 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின் நறுக்குவிசைப் படமும், திருப்புமைப் படமும் வரைக.

துருத்துவிட்டத்தைப் போலன்றி, இங்கு முதலில் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் (R_A, R_B) கண்டுபிடிக்க வேண்டும். முனை B இல் விசைகளின் திருப்புமைச் சமனிலை காண்போம். ($M_B = 0$)

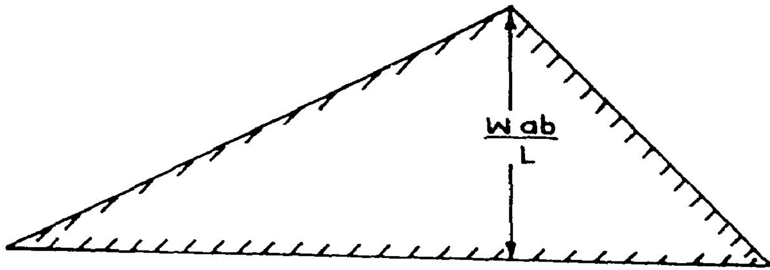
$$P \times b - R_A \times L = 0$$



a) விட்டமும் சுமைகளும்



b) நறுக்கு விசைப் படம்



c) வளைதிருப்புமைப் படம்

படம் 5.26

$$\therefore \quad R_A = \frac{Pb}{L};$$

$$R_B = P - R_A = \frac{P \cdot a}{L}$$

AC இல்

நறுக்குவிசை, $Q_X = -R_A = -\frac{Pb}{L}$

வளைதிருப்புமை, $M_x = R_A \cdot x = +\frac{Pb}{L} \cdot x$

CB இல்

நறுக்குவிசை, $Q_x = -R_A + P = R_B = +\frac{Pa}{L}$

வளைதிருப்புமை, $M_x = R_A\, x - P\,(x - a)$

$$= \frac{Pb}{L}\, x - Px - Pa$$

$$= P\,\frac{b}{L}\, x - x - a = \frac{Pa}{L}\,(L - x)$$

இங்கு (L– x) என்பதைத் தவிர மற்ற அளவுகளின் மதிப்புகள் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளன. அதனால், M_x இன் மதிப்பு உச்சமாயிருக்க வேண்டின், (L– x) இன் மதிப்பு உச்சமாயிருக்க வேண்டும். CB யில் (L– x) இன் உச்ச மதிப்பு = b.

உச்சவளைதிருப்புமை, $M_{max} = \frac{Pb}{L} \cdot a = +\frac{Pab}{L}$

$$M_{max} = \frac{Pab}{L} \qquad (5.14)$$

படம் 5.26 இல், இவ் விடைகளைக் கொண்டு வரையப்பட்ட நறுக்கு விசை, வளைதிருப்புமை படங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

எ.கா. 5.4

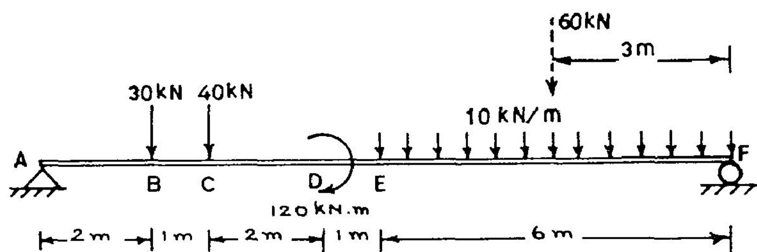
(படம் 5.27 காண்க)

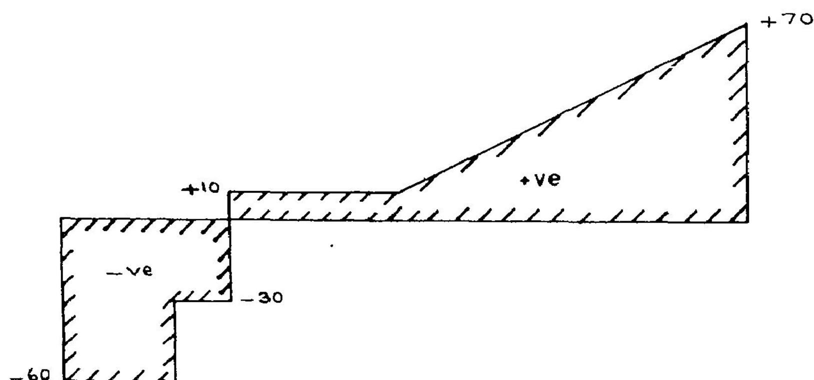
முதலில் முனை A இல் திருப்புமை சமனிலை கருதி, தாங்கி எதிர் விளைகளைக் கணக்கிடுவோம்.

$$M_A = R_F \times 12 - 6 \times 109 - 120 - 40 \times 3 - 30 \times 2 = 0$$

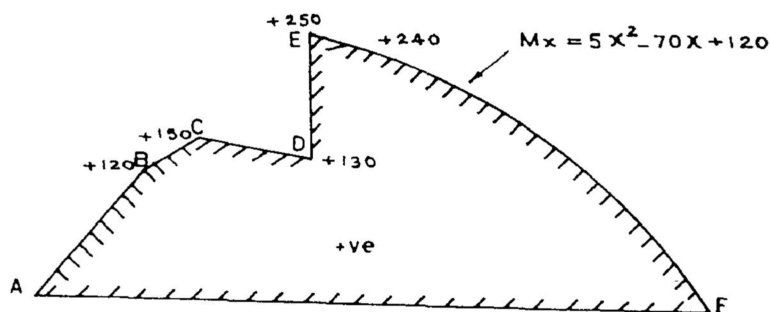
$$12\, R_F = 840$$

$$\therefore \quad R_F = +70 \text{ kN*}$$





b) நறுக்குவிசைப் படம்



c) வளை திருப்புமைப் படம்

படம் 5.27

விசைச் சமனிலையைப் பயன்படுத்த,

$$R_A = 6 \times 10 + 40 + 30 - 70 = +60 \text{ kN}$$

AB இல்

$$Q_x = -R_A = -60 \text{ kN}$$

$$M_x = +R_A\, x = +60\, x$$

x = 2 எனக் கொள்ள,

$$M_B = M_{2.0} = 60 \times 2 = 120 \text{ kN.m}$$

அவ்வாறே BC இல்

$$Q_x = -60 + 30 = -30 \text{ kN}$$

$$M_x = 60x - 30\,(x - 2) = 30x + 60$$

$$M_c = M_{x=3} = 150 \text{ kN.m}$$

CD இல்

$$Q_x = -60 + 30 + 40 = 10 \text{ kN}$$

$$M_x = 60x - 30\,(x - 3) - 40\,(x - 3)$$

$$= 180 - 10x$$

M_D (இடப்புற விட்டப் பகுதியில்) $= 180 - 10 \times 5 = 130$ kN.m

M_D (வலப்புற விட்டப் பகுதியில்) $= 180 - 10\ 5 + 120 = 250$ kN.m

(M_D விட்டத்தின் இருவேறு வெட்டுமுகங்களில் வெவ்வேறாகக் குறித்த விளக்கத்தை மீண்டும் பகுதி 5.4 இல் காண்க)

DE இல்

நறுக்குவிசை Q_x இல் மாற்றமில்லை;

$$Q_x = +10$$

$$M_x = 60\,x - 30\,(x - 2) - 40\,(x - 3) + 120$$

$$= 300 - 10\,x$$

++ R_F இன் குறி + எனில் இது மேல் நோக்கு விசை என உணரலாம் .

$$M_E = M_{x=6} = 300 - 10 \times 6 = 240 \text{ kN.m}$$

EF இல்

சுமைச்செறிவு $q_x = 10$ kN/m

∴ நறுக்குவிசை $Q_X = \int 10\,dx = 10x + C_1$

தொகையெச்சம் C_1 காண,

$$Q_{x=6} = 10 \times 6 + C_1 = +10$$

$$\therefore C_1 = 10 - 60 = -50$$

$$\therefore Q_X = 10x - 50$$

$$Q_{12} = Q_{x=12} = 10 \times 12 - 50 = 70 \text{ kN}$$

$$M_x = -\int Q\,x\,.dx = \int (50 - 10x)\,dx$$

$$= 50x - 5x^2 + C_2$$

தொகையெச்சம் C_2 ஐக் கண்டுபிடிக்க முனை F இல் வளை திருப்புமை, $M_F = 0$

இங்கு, $x = 12$

$$\therefore 50 \times 12 - 5 \times 12^2 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 5 \times 12^2 - 50 \times 12 = 120$$

$$\therefore M_x = 50x - 5x^2 + 120$$

இக் கோவையைப் பயன்படுத்தி வளைதிருப்புமையின் படத்தை எளிதாய் வரைய, இடையில் இருபுள்ளிகளில் வளைதிருப்புமையின் மதிப்பினைக் காணல் உதவியாயிருக்கும்.

$$M_{x=8} = 50 \times 8 - 5 \times 8^2 + 120 = 200 \text{ kN.m.}$$

$$M_{x=10} = 50 \times 10 - 5 \times 100 + 120 = 120 \text{ kN.m.}$$

நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமையின் வரைவுகளைப் படம் 5.27 இல் காணலாம்.

இதுவரை கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் உறவுகள் 5.2, 5.3 ஆகியவற்றின் ஒருவகைப் பயனைக் கண்டோம். நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமையின் படங்களின் தன்மைகளைத் தெளிவாய் அறிய மற்றொரு வகையில் இவ் உறவுகளைப் பயன்படுத்தலைக் காண்போம்.

ஒருசார்பலனின் அளவு உச்சமாகவோ (Maximum) தாழ்வாகவோ (minimum) இருக்கும் போது அதன் முதல்வகைக் கெழு 0 ஆக இருக்க வேண்டும் என்று நுண்கணிதத்தில் (calculus) கற்றுள்ளோம். அதனால் நறுக்குவிசையின் உச்ச அல்லது இழிபு அளவுகள் இருக்குமிடத்தில், $\frac{dQ}{dx}$, அஃதாவது விசைச்செறிவு, 0 ஆக இருக்க வேண்டும். அடுத்து, வளைதிருப்புமையின் உச்ச அல்லது இழிபு அளவுகள் இருக்கும் வெட்டு முகத்தைக் காண வேண்டின், $\frac{dM}{dx}$, அஃதாவது, Q_x எங்கு 0 ஆக இருக்கிறது என்பதைக் காண வேண்டும்.

ஆய்வின் எளிமைக்குக் கீழ்க்காணும் குறிப்புகள் உதவும்.

1. நறுக்குவிசை, $Q = 0$ ஆக உள்ள விட்டப் பகுதியில் வளைதிருப்புமை நிலையாயிருக்கும்.

2. நறுக்குவிசை *சீராயுள்ள* ($Q = C$) விட்டப் பகுதியில் வளைதிருப்புமையின்படம் நேர்க் கோடாயிருக்கும்.

3. சுமைச்செறிவு (q) சீராயுள்ள ($q = c$) விட்டப்பகுதியில் நறுக்குவிசைப்படம் நேர்க் கோடாயும், வளைதிருப்புமையின் படம் பரவளையமா (parabolic) யுமிருக்கும்.

(மேலும் நறுக்குவிசைப் படத்திலோ, வளைதிருப்புமையின் படத்திலோ, வளைகோடாய் வரும் பகுதிகளுக்குரிய கோவைகளைக் குறிப்பிடுவோம். கோவை தரப்படாத பகுதிகளில் கொடுக்கப்படும் இருபுள்ளிகளுக்கு இடையே இவ் வரைவுகள் நேர்க்கோட்டாயிருக்கின்றன என்று பொருள் கொள்வோம்).

வளைமை மாறுபுள்ளிகள் (Points of Contraflexure)

வளைதிருப்புமையின் படங்களில் முக்கியமாய் நாம் அறிந்திருக்க வேண்டிய வெட்டுமுகங்கள், **வளைமை மாறுபுள்ளிகள்** (Points of Contraflexure) என்பனவாம். அஃதாவது, இப் புள்ளிகளின் வரையறைப்படி, இப் புள்ளிகளின் இரு புறங்களிலும் (இட, வல) வளைதிறனின் குறியீடுகள் (+ அல்லது −) வெவ்வேறாயிருக்கும். அஃதாவது தொங்கல் தூக்கலாகவோ, தூக்கல் தொங்கலாகவோ மாறுகின்ற வெட்டுமுகங்களை **வளைமை மாறுபுள்ளிகள்** என்கிறோம். இப் புள்ளிகளில் வளைதிருப்புமுனை 0 ஆக இருக்க வேண்டும். (ஆனால், வளைதிருப்புமை 0 ஆகவுள்ள புள்ளிகள் எல்லாம், வளைமைமாறு புள்ளிகள் அல்ல) மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

எ.கா. 5.5

படம் 5.28 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின், நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமையின் படங்கள் வரைந்து, நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை ஆகியவற்றின் உச்ச மதிப்புகளைக் காண்க.

முதலில் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் காண்போம்.

A என்னும் தாங்கியில் திருப்புமைச் சமனிலைச் சமன்பாடு:

$$R_F \times 15 - 1.5 \times 6 \times (15-3) - 7.5 \times 8 + 9 + \frac{3}{2} \times 6 \times 4 = 0$$

$$\therefore \quad R_F = 13 \text{ kN}$$

$$R_A = \text{மொத்தப் புறச்சுமை} - R_F$$

$$R_A = 1.5 \times 6 + 7.5 + 3 \times \frac{6}{2} - 13 = 12.5 \text{ kN}$$

பகுதி AB இல்

A என்னும் வெட்டுமுகத்தில் $Q = -R_A = -12.5$ kN

$$q_x = 0.5\,x$$

$$\therefore \quad Q_x = \int 0.5 \times dx = 0.25\,x^2 + C_1$$

$x = 0$ என்ற புள்ளியில் $\quad 0.25 \times (0)^2 + C_1 = -12.5$

$$\therefore \quad C_1 = -12.5$$

அல்லது $\quad Q_x = 0.25\,x^2 - 12.5$

$$Q_{x=6} = 0.25 \times 5^2 - 12.5 = -3.5 \text{ kN.}$$

$$M_x = -\int Q_x \, dx$$

$$= \int (12.5 - 0.25\,x^2)\,dx$$

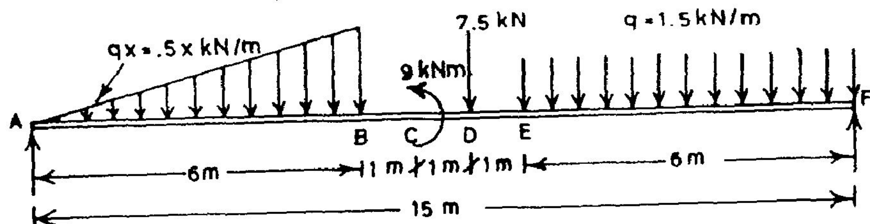
$$= 12.5 \times - \frac{x^3}{12} + C_2$$

$x = 0$ எனில், $M_x = 0$

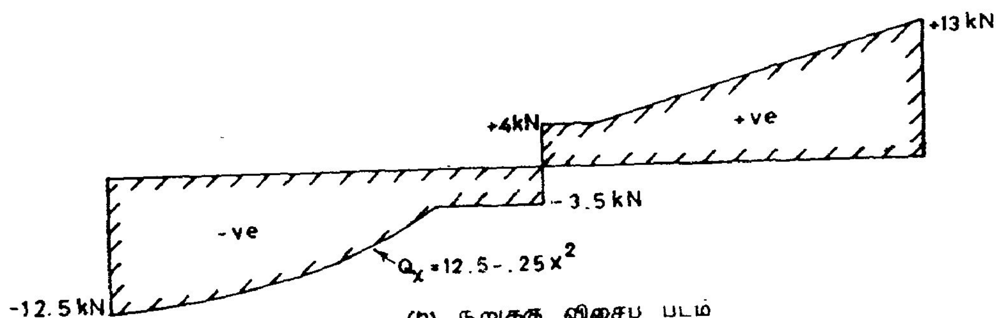
அஃதாவது, $\quad 12.5 \times 0 - \frac{(0)^2}{12} + C_2 = 0$

$$\therefore \quad C_2 = 0$$

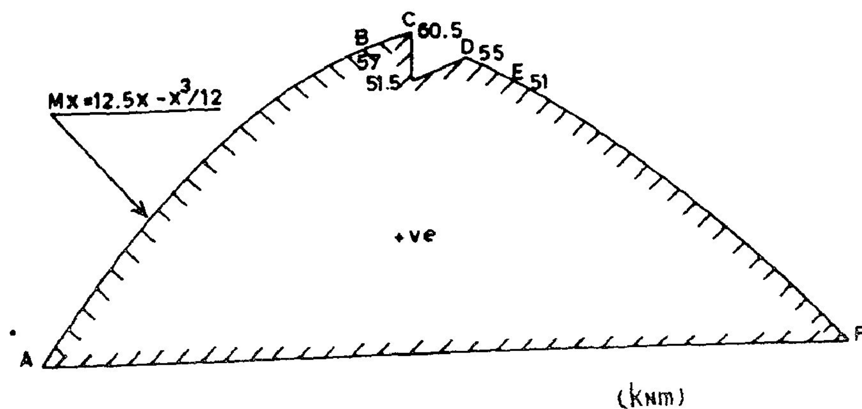
$$M_x = 12.5\,x - \frac{x^3}{12}$$



(a) விட்டமும் சுமைகளும்



(b) நறுக்கு விசைப் படம்



படம் 5.28

$$M_{x=3} = 12.5 \times 3 - \frac{3^3}{12} = 35.25 \text{ kN.m.}$$

$$M_{x=6} = 12.5 \times 6 - \frac{6^3}{12} = 57 \text{ kN.m.}$$

BC யில்

$$Q = 3.5 \text{ kN.}$$

$$M_x = \int 3.5 \, dx = 3.5x + C_3$$

$$M_{x=6} = 3.5 \times 6 + C_1 = 57$$

$$\therefore C_1 = 57 - 21 = 36$$

$$\therefore M_x = 3.5x + 36$$

$$M_{x=7} = 60.5 \text{ kNm}$$

CD யில்

$$Q = -3.5 \text{ kN}$$

$$M_{x=7} = 60.5 - 39 = +21.5 \text{ kN.m.}$$

$$M_{x=8} = 3.5 \times 8 + 36 - 39 = +25 \text{ kN.m}$$

DE யில்

$$Q_x = -3.5 + 7.5 = 4.0 \text{ kN}$$

$$M_x = -\int 4 \, dx = -4x + C_4$$

$$M_{x=8} = -4 \times 8 + C_4 = 25$$

$$\therefore C_4 = +57$$

$$\therefore M_x = 57 - 4x$$

$$M_{x=9} = 57 - 36 = 21 \text{ kN.m}$$

EF யில்

$$q = 1.5 \text{ kN/m.}$$

$$Q_x = \int 1.5 \, dx = 1.5x + C_5$$

$$Q_{x=9} = 1.5 \times 9 + C_5 = +4$$

$$\therefore \quad C_5 = 4 - 1.5 \times 9 = -9.5$$

$$Q_x = 1.5 \times -9.5$$

$$Q_{x=15} = 1.5 \times 15 - 9.5 = 13 \text{ kN}$$

$$M_x = \int (-1.5x + 9.5)\, dx$$

$$= 9.5x - 0.75x^2 + C_6 = 0$$

$x = 15$ எனில் $M_x = 0$

$$9.5 \times 15 - 0.75 \times .15^2 + C_6 = 0$$

$$C_6 = 26.25$$

$$M_x = 9.5x - .75x^2 + 26.25$$

நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமையின் படங்கள் 5.28ஐ நோக்குக. இங்கு வளைதிருப்புமையின் உச்ச மதிப்பு 60.5 kN.m ஆனால், $Q_x = 0$ என்ற நிலை உள்ள பகுதியில் இதனை நாம் பெறவில்லை; ஏன் பெறவில்லை என்பதைச் சிந்திக்க.

(குறிப்பு: dF/dx என்பது ஓர் அலைமுகட்டின் நிலை (local maximum) தானேயன்றி மீமிகை மதிப்பையே (Absolute maximum) எப்போதும் தருவதில்லை).

எ.கா. **5.6**

படம் 5.29 இல் காட்டியுள்ள முனை தொங்குவிட்டத்தின், நறுக்குவிசை, வளை திருப்புமை படங்கள் வரைந்து, வளைமைமாறு புள்ளிகளைக் கண்டுபிடிக்க.

முதலில் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் கண்டுபிடிப்போம்.

B என்ற தாங்கியில் திருப்புமைச் சமன்பாடு

$$6 \times 4 - 24 \times 10 + R_D \times 12 = 0$$

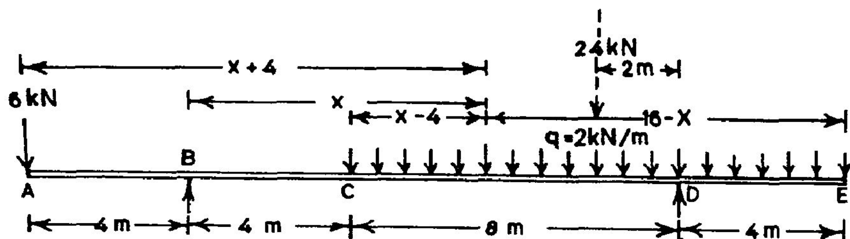
$$\therefore \quad R_D = (24 \times 10 - 6 \times 4)/12 = 18 \text{ kN}$$

$$R_B = 24 + 6 - 18 = 12 \text{ kN.}$$

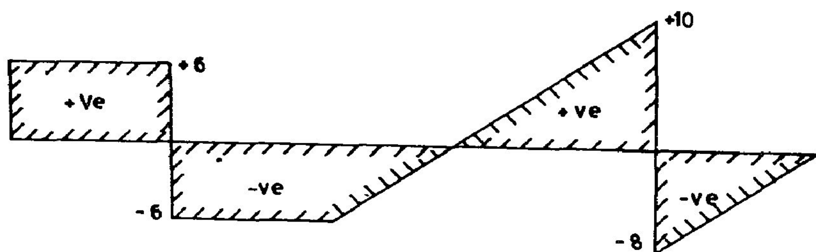
முதலில் நறுக்குவிசைப் படம் வரைவோம் (B ஐ ஆய மையமாகக் கொள்க).

AB யில் $Q_x = +6$ kN

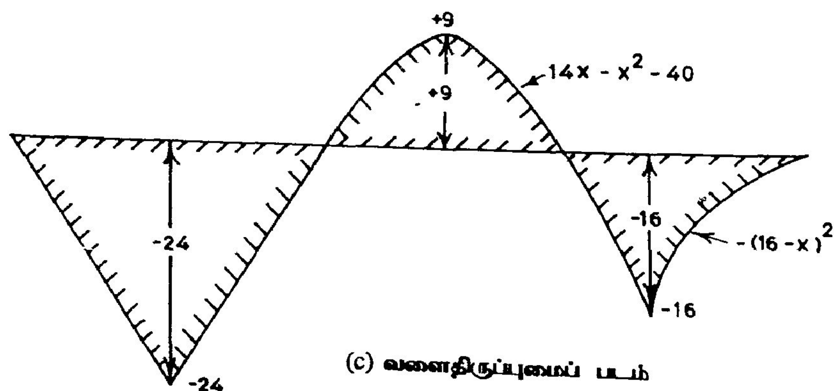
BC யில் $Q_x = +6 - R\,B = 6 - 12 = -6$ kN



(a) விட்டமும் சுமைகளும்



(b) நறுக்கு விசைப்படம்



(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

படம் 5.29

CD யில் $Q_x = 6 - 12 + 2 (x\ 4)$

$= 2x - 14$

$Q_c = 2 \times 4 - 14 = -6$

$Q_d = 2 \times 12 - 14 = +10$

DE இல் நறுக்குவிசை Q_x (விட்டத்தில் வலப்புறப் பகுதியை நோக்க).

$Q_x = -2 (16 - x) = -32 + 2x$

$Q_E = 0$

$Q_D = -32 + 2\times 12 = -8$

நறுக்குவிசைப் படம் நேர்க்கோடுகளாகவே இருக்கும் என்பதை சுமைப்படத்தால் உணரலாம் ; கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து அதனை எளிதில் வரையலாம். அடுத்து வளைதிருப்புமைகளை ஆய்வோம்.

AB யில் வளைதிருப்புமை $= -6 \times x$

$M_A = 0 ;\quad M_B = -6\times 4 = -24$ kN.m

BC யில் வளைதிருப்புமை $= 12 \times x - 6(x-4)$

$= 6x - 24$

$M_{x=4} = 0$

CD யில் வளைதிருப்புமை $M_x = 12x - 6(x + 4) - 2(x - 4)\left(\frac{x - 4}{2}\right)$

$= 6x - 24 - (x-4)^2$

$= 14x - x^2 - 40$

வளை திருப்புமை உச்சமடையும் புள்ளியில், நறுக்குவிசை 0 ஆய் இருக்க வேண்டும்.

CD யில் நறுக்குவிசை $= 2x - 14$

எனவே, இது $x = 7$ என்ற புள்ளியில் 0 ஆவதைக் காண்கிறோம்.

வளைதிருப்புமையில் உச்ச மதிப்பு, $M_{max} = M_{x=7} = +9$ kN.m

$M_D = M_{x=12} = 14 \times 12 - 12^2 - 40 = -16$ kN.m

DE இல் வளைதிருப்புமை, (தற்போது வலப்பகுதியை நோக்குக)

$$M_x = -2\,(16 - x)\,\frac{(16 - x)}{2} = -(16 - x)^2$$

$$M_D = M_{x=12} = -(16 - 12)^2 = -16 \text{ kN.m}$$

வளைமைமாறு புள்ளிகள் காண: M_x இன் சோவையை 0 விற்குச் சமன்படுத்துக :

$$14x - x^2 - 40 = 0$$

இச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

$$x^2 - 14x + 40 = 0$$ என மாற்றி எழுதித் தீர்வு காண

$$x = -(-7) \pm \sqrt{7^2 - 40}$$

$$x_{1,2} = 7 \pm 3$$

அஃதாவது $x_1 = 10$, $x_2 = 4$ என்பன வளைமைமாறு புள்ளிகள்

எ.கா. 5.7

படம் 5.30 இல் காட்டியுள்ள முனை தொங்குவிட்டத்தினை ஆய்க ; உச்ச திருப்புமை மதிப்பையும் அது செலுத்தப்படும் வெட்டுமுகத்தையும் காண்பதோடு, வளைமைமாறு புள்ளிகளையும் கண்டுபிடிக்க.

இங்கு ஒருமுக்கிய அம்சத்தைக் குறிப்பாய் நோக்க வேண்டும். அஃதாவது, (பொதுவாக) முனைதொங்கு விட்டங்களை ஆயும்போது தொங்கு பகுதிகளைத் துருத்துவிட்டங்களாகவே கருதி, ஆய்வு நடத்தலாம். இப் பகுதிகளில் வளைமைமாறு புள்ளிகள் பெரும்பாலும் இருப்பதில்லை.

முதற்படியாக தாங்கி எதிர்விளைகளைக் காண்போம். தாங்கி B இல் திருப்புமைச் சமனிலைச் சமன்பாடு

$$6 - 3 \times 6 \times 3 + R_C \times 6 - 6 \times 7 = 0$$

$$R_C = (-6 + 54 + 42) / 6 = 15 \text{ kN.}$$

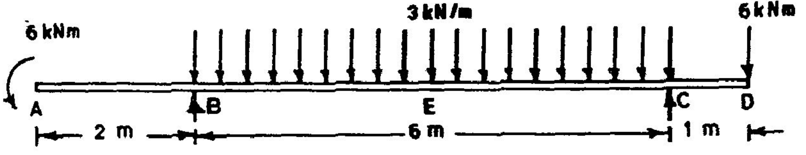
$$R_B = 18 + 6 - 15 = 9 \text{ kN.}$$

நறுக்கு விசைகள் : (B ஐ ஆய மையமாகக் கொள்வோம்)

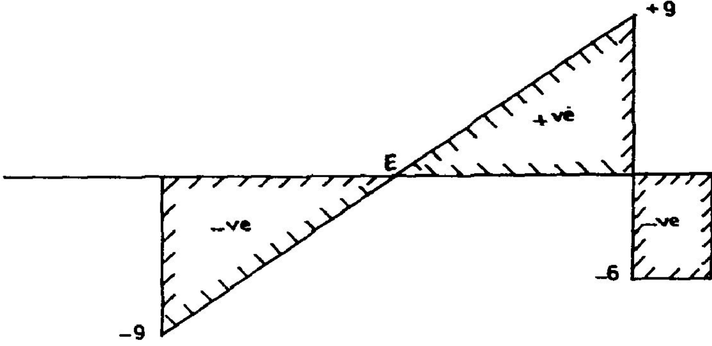
AB இல் $Q_x = 0$

BC இல் $Q_x = -R_B + 3_x = 3_x - 9$

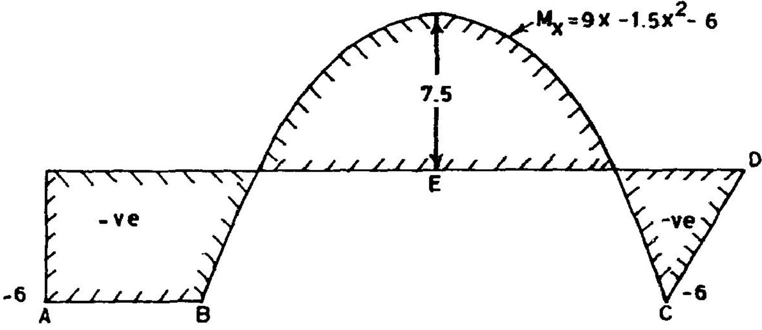
$$Q_{x=0} = -9; \quad Q_{x=6} = +9$$



(a) விட்டமும் சுமைகளும்



(b) நறுக்கு விசைப்படம்



(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

படம் 5.30

Q_x = 0 ஆக இருக்கும் வெட்டுமுகத்தைக் காண,

$Q_x = 3x - 9 = 0$

$\therefore \quad x = 3$

CD இல் நறுக்குவிசை = – 6 kN (வலப்புற விசைகளைக் கருதுக)

வளை திருப்புமைகள் :

$$AB \text{ இல்} \quad M_x = -6 \text{ kN}$$

$$BC \text{ இல்} \quad M_x = -6 + 9x - 3 . x . \frac{x}{2}$$

$$= 9x - 1.5x^2 - 6$$

உச்ச வளைதிருப்புமை M_{max}, $x = 3$ என்னும் வெட்டுமுகத்தில் இருக்க வேண்டும் எனக் கண்டோம்.

$$M_{max} = M_{x=3} = 9 \times 3 - 1.5 \times 3^2 - 6 = +7.5 \text{ kN.m}$$

வளைமை மாறு புள்ளிகள் காண.

$$M_x = 9x - 1.5x^2 - 6 = 0$$

அல்லது $\quad x^2 - 6x + 4 = 0$

தீர்வு, $\quad x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 4}$

$$= 3 \pm \sqrt{5}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{5}, \qquad x_2 = 3 - \sqrt{5}$$

என்னும் புள்ளிகளே வளைமைமாறு புள்ளிகளாம். நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமையின் படங்கள் (5.30) நோக்குக.

எ.கா. 5.8

படம் 5.31 இல் காட்டப்பட்டுள்ள முனைதொங்கு விட்டத்தினை ஆய்க .

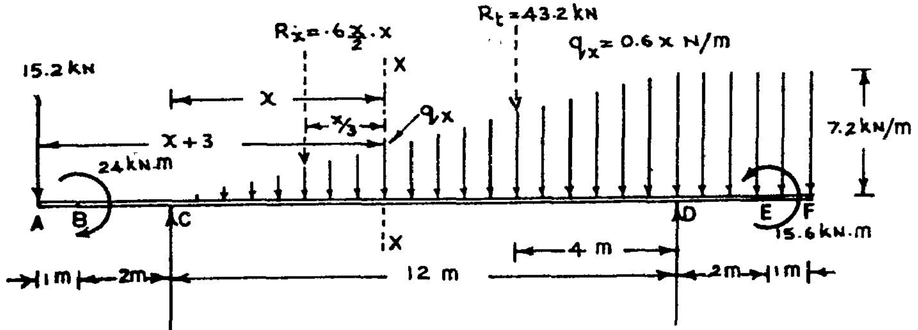
(விட்டங்களை ஆய்தல் எனில், விட்டங்கள் நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமையின் மாறுபாடுகளை முழுமையாய் அடைதலும், முக்கியப் புள்ளிகளில் இவற்றின் மதிப்பினை குறிப்பிடலுமாகும்).

முதலில் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் காண்போம். தாங்கி C இல் திருப்புமையின் சமனிலைச் சமன்பாடு ($M_c = 0$),

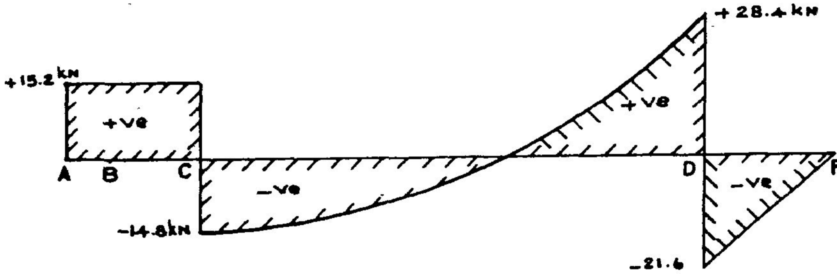
$$15.2 \times 3 - 24 - \left(\frac{7.2}{2} \times 12\right) \times 8 - (7.2 \times 3) \times 10.5 + 15.6 + R_D \times 12 = 0$$

$$12 R_D = -(15.2 \times 3) + 24 + (43.2 \times 8) + (21.6 \times 13.5) - 15.6 = 600$$

$$R_D = 600 / 12 = 50 \text{ kN}$$

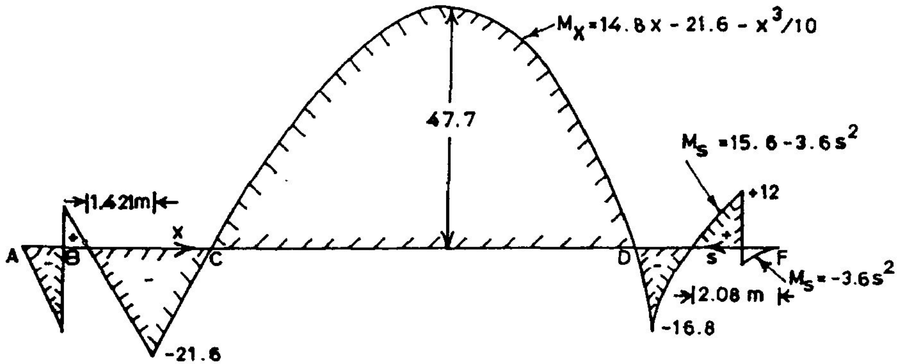


(a) விட்டமும் சுமைகளும்



(b) நறுக்கு விசைப்படம்

S.F.D.



(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

படம் 5.31

$$R_C = 15.2 + 43.2 + 21.6 - 50 = 30 \text{ kN}$$

முதலில் நறுக்குவிசைகளை ஆய்வோம் (ஆயமையம் : C)

AC இல், $Q_x = + 15.2 \text{ kN}$

CD இல், x-x என்னும் வெட்டுமுகத்தில் நறுக்குவிசை காண, x-x க்கு இடப்புறமுள்ள மொத்தச் சுமைகளின் கூட்டினைக் காண்க.

$$Q_X = 15.2 - 30 + \frac{0.16\,x}{2} \times x$$

$$Q_x = 0.3\,x^2 - 14.8$$

பல்வேறு வெட்டுமுகங்களுக்கு x, Q_x மதிப்புகளைப் பட்டியலிடுவோம்.

x (m)	0	2	4	6	8	10	12
Q (kN)	– 14.8	– 13.6	– 10	– 4	+ 44	15.2	28.4

DE இல் நறுக்குவிசை காண, (வலப்புறப் பகுதியின் சுமைகளிலிருந்து)

$$Q_x = - 7.2\,(15 - x)$$

$$Q_{x=15} = 0$$

$$Q_{x=12} = - 7.2 \times 3 = - 21.6 \text{ kN}$$

இனி வளைதிருப்புமைகளை ஆய்வோம்.

AB இல் $M_x = - 15.2\,(x+3)$

$$M_A = 0$$

$$M_B = M_x = - 2 = - 15.2 \text{ kN.m}$$

BC இல் $M_x = - 15.2\,(x+3) + 24$

$$M_B = M_x = - 2 = + 8.8 \text{ kN.m}$$

$$M_C = M_x = 0 = - 21.6 \text{ kN.m}$$

CD இல் $M_n = - 15.2\,(x + 3) + 24 + 30\,x - \frac{.6\,x}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{3}$

$$= - 15.2\,x - 45.6 + 24 + 30x - 0.1\,x^3$$

$$M_x = 14.8x - 21.6 - 0.1\,x^3$$

M_x எங்கு உச்ச மதிப்புடையது என்பதைக் காண,

CD இல் $Q_x = 0.3\,x^2 - 14.8 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x = \sqrt{\frac{14.8}{0.3}} = 7.024\text{m}$$

இங்கு $M_x = 14.8 \times 7.024 - 21.6 - 0.1\,(7.024)^3$

$$M_{max} = 47.7 \text{ kN.m}$$

வளைமைமாறு புள்ளிகளைக் காண,

$$14.8\,x - 21.6 - 0.1\,x^3 = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்போம் ;

தீர்வுகள் , $x_1, x_2, x_3 = 1.4814$ m, 11.357 m, – 12.84 m.

இவற்றுள் கடைசித் தீர்வு, அஃதாவது , x = – 12.84 m என்பது சமன்பாடு (5. 15) பொருந்தும் எல்லையான CD - க்குள் இல்லாமையால் அதனைப் புறக்கணிக்க, வளைமைமாறு புள்ளிகளின் ஆயத்தூரங்கள்,

$x_1 = 1.14814$ m, $x_2 = 11.357$ m.

இனி பல்வேறு புள்ளிகளில், வளைதிருப்புமைகளைப் பட்டியலிடுவோம்.

x (m)	0	1.4814	3.0	5.0	6.0	7.024
M_x (kN.m)	– 21.6	0	20.1	39.9	45.6	47.7

x (m)	8.0	9.0	10.0	11.357	12.0
M_x (kN.m)	45.6	38.7	26.4	0	– 16.8

இனி DEF ஐத் துருத்துவிட்டமாய்க் கொண்டு வலப்புற விசைகளைக் கருதுவோம். (இங்கு F ஐ ஆய மையமாகவும், FD ஐ s திசையாகவும் கொள்ளலாம்).

FE இல் $M_s = -7.2\,s \cdot \frac{s}{2} = -3.6\,s^2$

$$M_F = 0 ;$$

$$M_E = -3.6 \text{ kN.m}$$

ED இல் $M_x = -3.6 s^2 + 15.6$

$$M_E = -3.6 + 15.6 = 12 \text{.kN.m}$$

$$M_D = -3.6 \times 9 + 15.6 = 16.8 \text{ kN.m}$$

இனி நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமையின் படங்கள் வரைவோம். (படங்கள் 5.31 (b), (c))

இங்கு. (விசையிணைகள் B, E என்னும் வெட்டுமுகங்களில் செலுத்தப் படுவதனால் துருத்துவிட்டப் பகுதிகளிலும் வளைமைமாறு புள்ளிகள் இருப்பதை வளைதிருப்புமை படம் 5.31 (c) காட்டுகிறது. இப் புள்ளிகளையும் நிறுவுவோம்.

B, E என்னும் இரண்டு புள்ளிகளுமே, வளைமைமாறு புள்ளிகள் என்பதை நோக்கிலேயே காணலாம்.

BC இல் வளைமைமாறு புள்ளி :

இப் பகுதியில் $M_x = 24 - 15.2 (x+3)$

$M_x = 0$ எனில், $24 - 15.2x - 45.6 = 0$

அல்லது $x = -1.421 \text{ m}$

CE இல் வளைமை மாறுபுள்ளி :

இப் பகுதியில் வளைதிருப்புமை $M_s = 15.6 - 3.6 s^2$

$M_s = 0$ எனில் $s = \sqrt{\dfrac{15.6}{3.6}} = 2.08 \text{ m}$

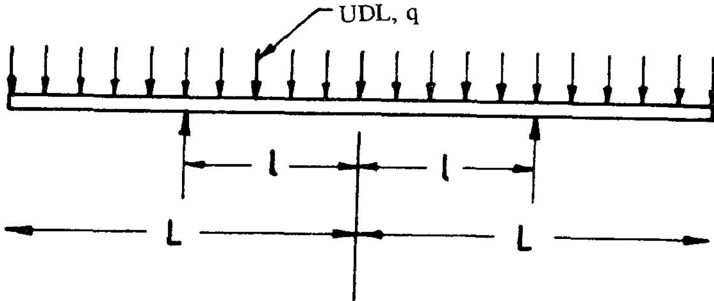
அஃதாவது. F இலிருந்து FD திசையில்2.08 m

பயிற்சி (5.1)

1. படங்கள் 5.29, 5.30, 5.31 இவற்றில் காணப்படும் விட்டங்களில் தாங்கிகளை, விட்டங்களின் இருமுனைகளிலும் அமைத்து. நறுக்கு விசை, வளைதிறன் படங்களை வரைக.

கடந்த எடுத்துக்காட்டுகள், 6, 7, 8 ஆகியவற்றை ஆழ்ந்து நோக்கினால் முனைதொங்கு விட்டங்களைப்பற்றிய முக்கியமானதொரு உண்மையைக் கண்டுணரலாம் (இதற்கு முதற்படியாகக் கடந்த மூன்று எடுத்துக்காட்டுகளிலும், விட்டத்தின் முனைகளில் தாங்கிகளை அமைத்து ஆய்வு செய்து நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை படங்களை வரைந்து பார்த்தலைப் பயிற்சியாக முடிக்க வேண்டும்).

படம் 5.30 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின் தாங்கிகள், அதன் முனைகளில் (A, D) இருப்பின், நறுக்குவிசைகளில் வேறுபாடு அதிகமில்லை எனினும், அதிகபட்ச வளைதிருப்பு மையின் அளவு, 7.5 kNm லிருந்து 238.52 kNm ஆக மிகுந்திருப்பதைக் காணலாம். படம் 5.29 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின் தாங்கிகள், அதன் முனைகளில் (A, E) இருப்பின், நறுக்குவிசையின் உச்ச மதிப்பு 10 kNm இலிருந்து 16.8 kNm ஆகவும், வளை திருப்புமையில் உச்சமதிப்பு (அளவில்) 24 kNm இலிருந்து 70.56 kNm ஆகவும் மிகுந்திருப்பதை நோக்கலாம். இவற்றிலிருந்து நாம் பெறும் முக்கியமானதோர் உண்மை, எளிமைதாங்கி விட்டங்களைவிட முனைதொங்கு விட்டங்களில் நறுக்குவிசைகளும் வளைதிருப்புமைகளும் (முக்கியமாக, வளைதிருப்புமைகள்) குறிப்பிடத்தக்க அளவில் குறைவாயிருக்கின்றன என்பதே. (துருத்து விட்டங்களைவிட எளிமைதாங்கி விட்டங்களில் இவை குறைவாயிருப்பதையும் நோக்கலாம்). இருப்பினும், கட்டுமானச் சூழ்நிலைகள் எல்லாவற்றிலும் முனைதொங்கு விட்டங்களை அமைத்துவிட முடியாது. ஆனால், முடியும் இடங்களில் முனைதொங்கு விட்டங்களை அமைப்பதால் பயன் இருப்பதை உணர்கிறோம். இப்பயன் எப்போது மிகவும் மிகுதியாயிருக்கு மெனில், விட்டத்தில் நேர்மறை வளைதிருப்புமை, எதிர்மறை வளைதிருப்புமை இவற்றின் உச்ச மதிப்புகள் சமமாயிருக்கும் பொழுதேயாகும். இக்கருத்தினை விளக்கும் எடுத்துக்காட்டு ஒன்றனைக் காண்போம். படம் 5.32 இல் 2L நீளமுள்ள ஒரு விட்டத்தின் மையத்திலிருந்து இருபுறங்களிலும் l தொலைவில் தாங்கிகள் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. தொங்குபகுதியில் உச்ச (எதிர்மறை) வளைதிருப்புமையும், நடுப்பகுதியில் உச்ச (நேர்மறை) வளைதிருப்புமையும் அளவிற் சமமாயிருக்க வேண்டுமெனில், l இன் அளவு எவ்வளவாக இருக்க வேண்டுமென்பதைக் கணிப்போம்.



படம் 5.32

தாங்கிகளின் எதிர்வினை = மொத்த சுமையிற் பாதி

$$= qL$$

உச்ச எதிர்மறை வளைதிருப்புமை $= -q\left(\frac{L-l}{2}\right)^2$

இதன் அளவு $= q\left(\frac{L-l}{2}\right)^2$

உச்ச நேர்மறை வளைதிருப்புமை $= \left(qL.l - qL.\frac{L}{2}\right)$

இவ்விரண்டனையும் சமன்படுத்த ,

$$q\left(\frac{L-l}{2}\right)^2 = qLl - q\frac{L^2}{2}$$

$$q(L-l)^2 = 2qLl - qL^2 = q(2l - L^2)$$

$$q(L^2 - 2Ll + l^2) = q(2Ll - L^2)$$

அஃதாவது,

$$L^2 - 2Ll + l^2 = 2Ll - L^2$$

$$l^2 - 4Ll + 2L^2 = 0$$

$$l = 2L \pm \sqrt{4L^2 - 2L^2}$$

$$l = L(2 \pm \sqrt{2})$$

$$l = L(2 - \sqrt{2}) = 0.5858\ L \qquad (5.15)$$

உச்ச வளைதிறன், $M = \pm\ 0.0858\ qL^2$

பயிற்சி 5.2

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் l = k.L என எடுத்துக் கொண்டு, k இன் பல்வேறு அளவுகளுக்கு $\frac{M_{max}\ (-ve)}{M_{max}\ (+ve)}$ விகிதங்களைக் கணக்கிட்டு, அவ்வுறவை $\frac{M_{max}\ (-ve)}{M_{max}\ (+ve)}$ என்னும் வரைபடமாகத் தருக.

புகைவண்டிப் பாதைகளில் தண்டவாளங்கள் நேரடியாய் தாங்கும் sleeper கள் எனும் விட்டங்களின் நீளத்தைச் சிக்கனமாய் நிர்ணயிப்பதில் இக் கருத்துத் துணை செய்கிறது. இங்குத் தண்டவாளங்களுக்கிடையேயுள்ள இடைவெளி $2l$ நமக்குத் தெரியும். அதனால், sleeper இன் நீளம் 2L எனக் கொண்டால், சுமைகள், குவிவிசைகளையும் (சக்கரத்தின் வழியே செலுத்தப்படும் விசைகள்), sleeper மீது படுகை (Ballast) செலுத்தும் எதிர்வினை, தொடர்சுமையாகவும் அமையும். இவ்அமைப்பினை தலைகீழாய் நோக்கில் படம் 5.32 இல் உள்ள விட்ட அமைப்பினையே பெறுவோம். இக்கருத்தினைப் பயன்படுத்தி, மீட்டர்கேஜ் இருப்புப் பாதையில் பயன்படுத்த வேண்டிய sleeper களின் நீளத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

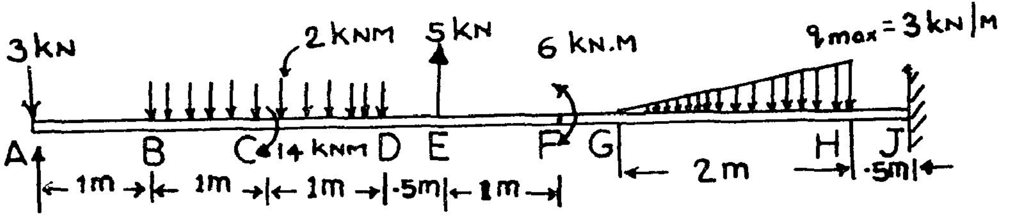
சமன்பாடு 5.15 இன்படி $\quad l \quad = \quad .5858\ L$

$$\text{அல்லது} \quad L \quad = \quad \frac{l}{.5858} = 1.7071\ l$$

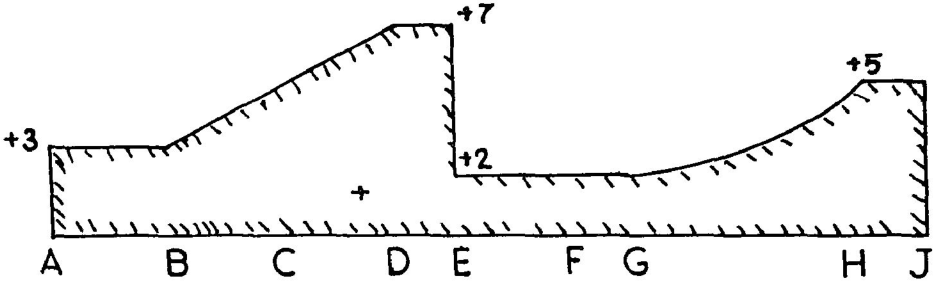
அஃதாவது sleeper இன் நீளம் (2L) $= 1.7071 \times 2l = 3.414\ l$

பயிற்சி 5.3

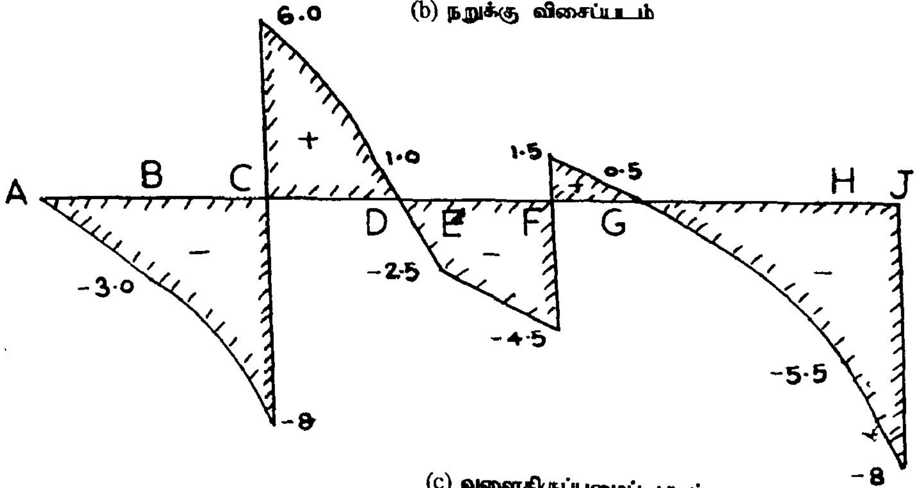
படங்கள் 5.33 முதல் 5.40 வரை, விட்டங்களையும், அவற்றின் மீதுள்ள சுமைகளையும் அவற்றுடன் விடைகளாய் அவற்றுக்குரிய நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை படங்களையும் காட்டுகின்றன. கணக்கீடுகள் வாயிலாய், இவற்றைச் சோதித்துப் பார்க்க.



(a) விட்டமும் சுமைகளும்

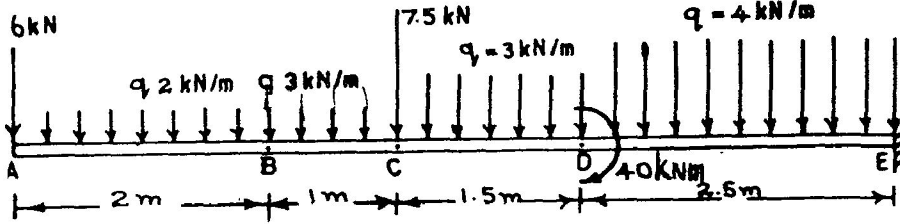


(b) நறுக்கு விசைப்படம்

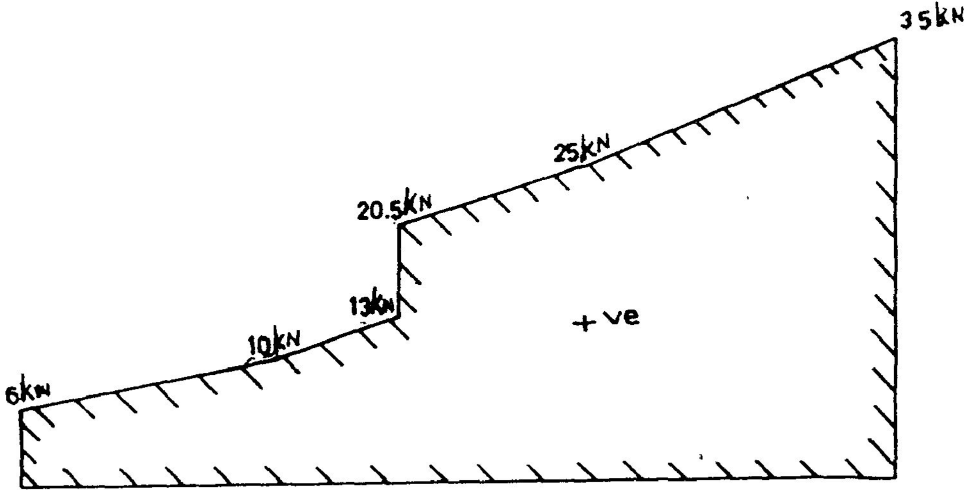


(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

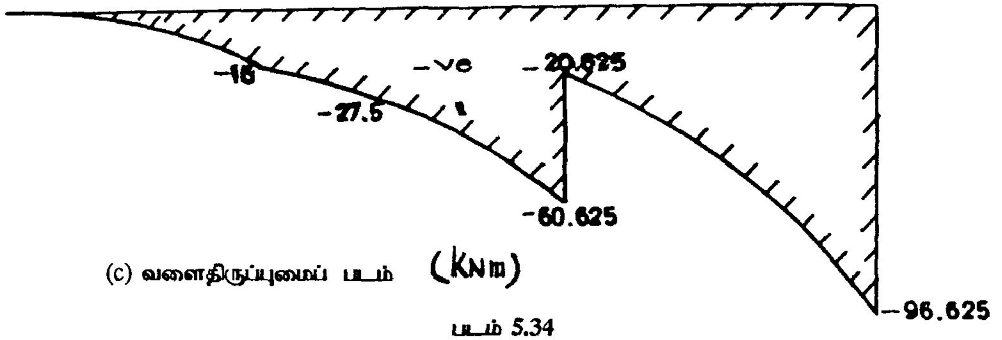
படம் 5.33



(a) விட்டமும் சுமைகளும்

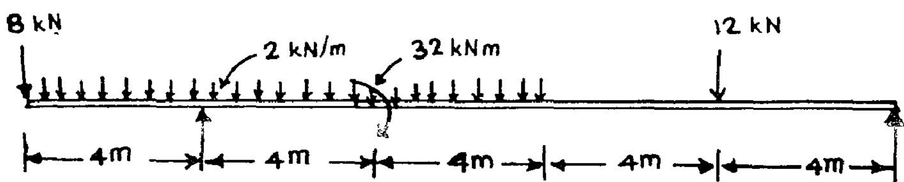


(b) நறுக்கு விசைப்படம்

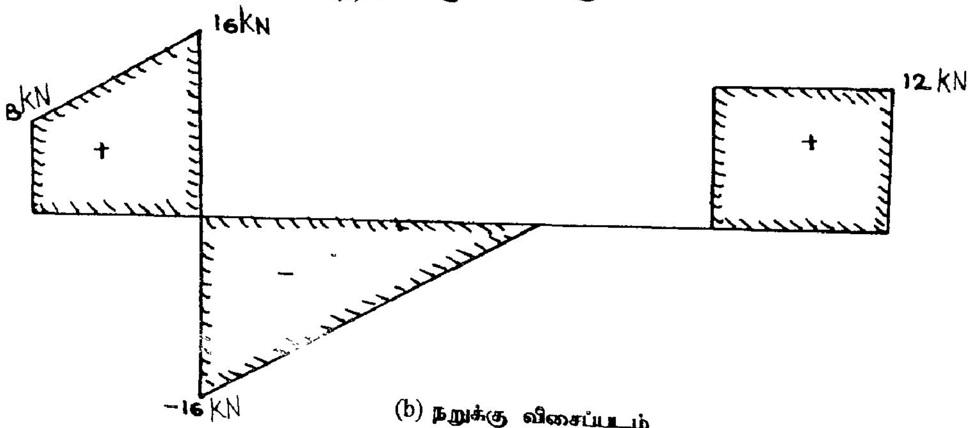


(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

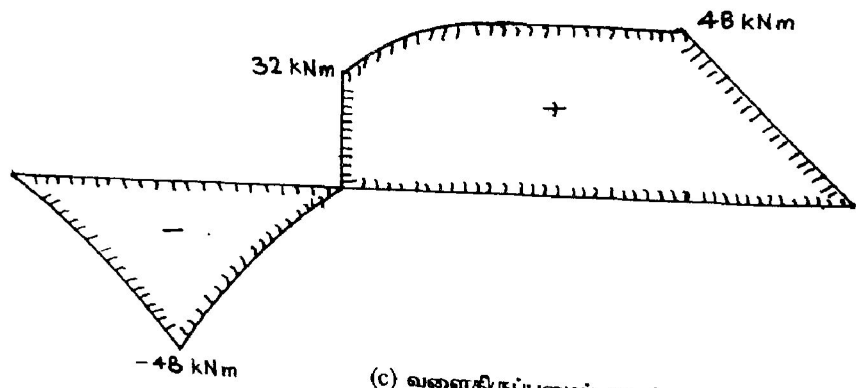
படம் 5.34



(a) விட்டமும் சுமைகளும்

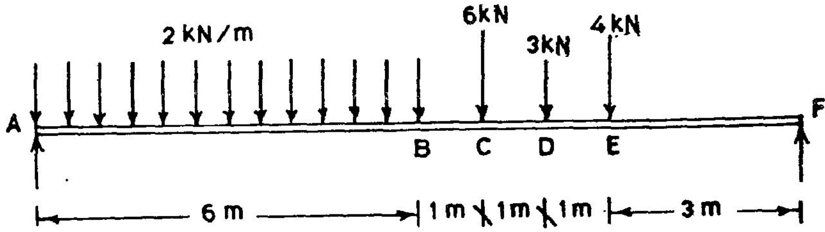


(b) நறுக்கு விசைப்படம்

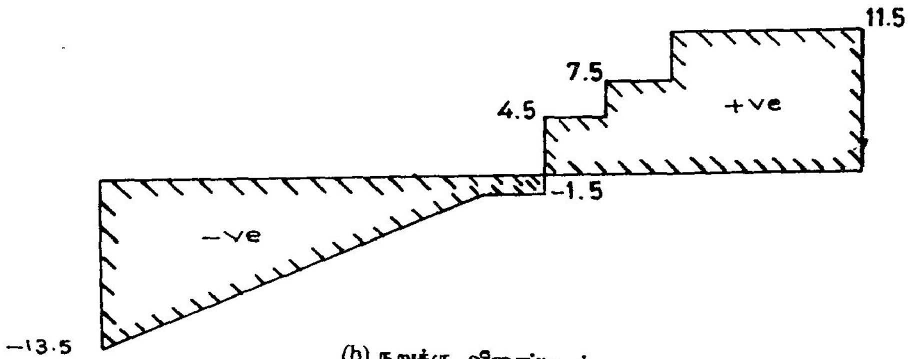


(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

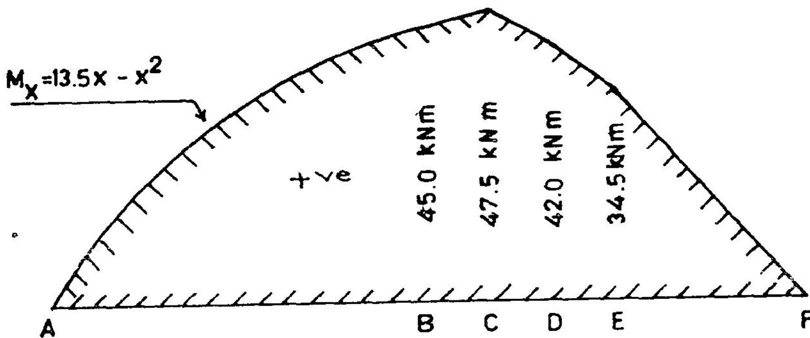
படம் 5.35



(a) விட்டமும் சுமைகளும்

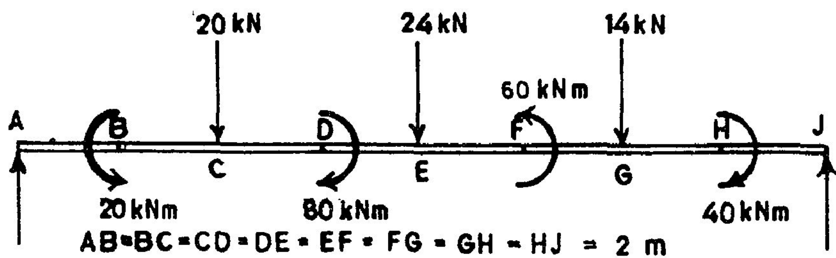


(b) நறுக்கு விசைப்படம்

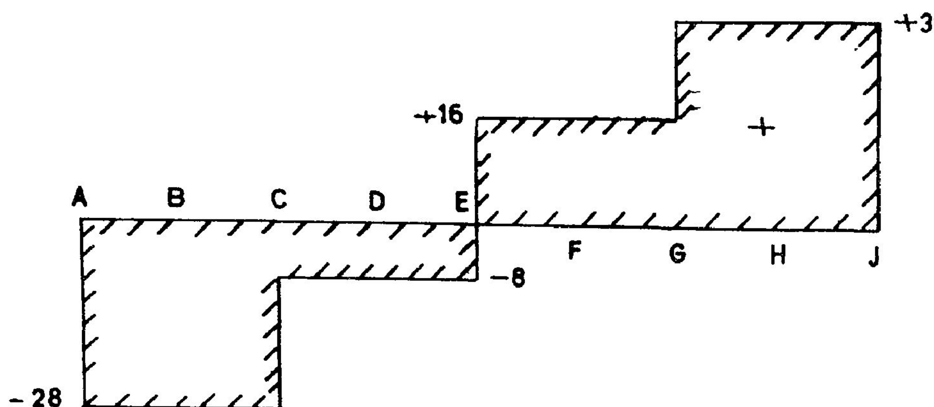


(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

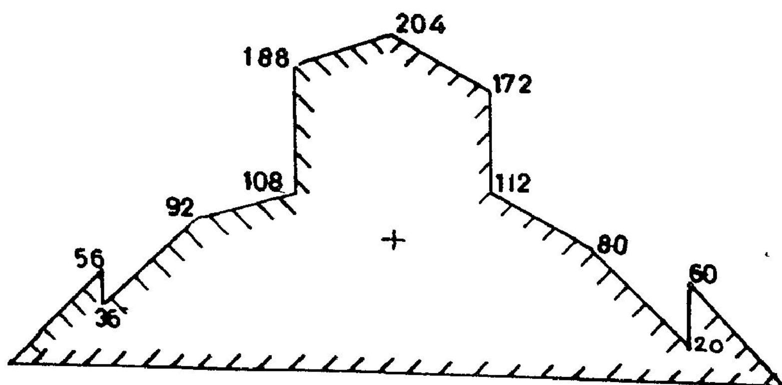
படம் 5.36



(a) விட்டமும் சுமைகளும்

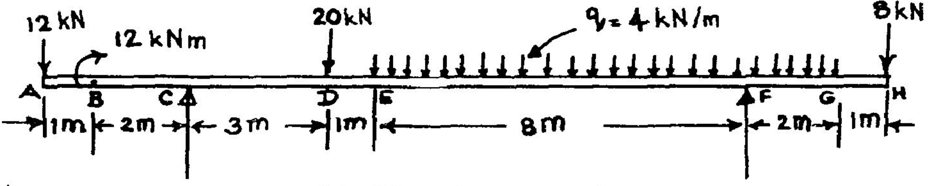


(b) நறுக்கு விசைப்படம்

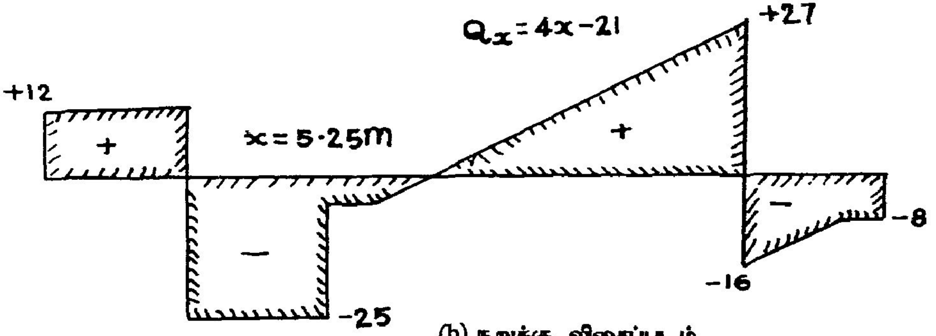


(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

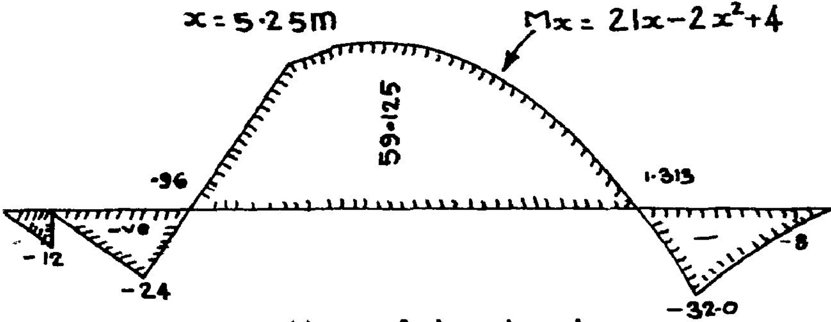
படம் 5.37



(a) விட்டமும் சுமைகளும்

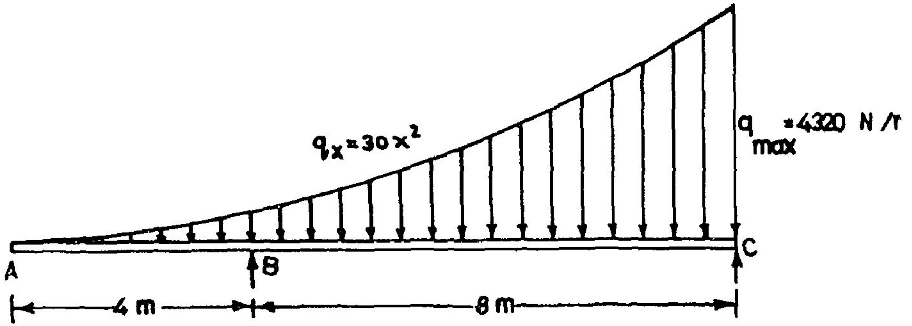


(b) நறுக்கு விசைப்படம்

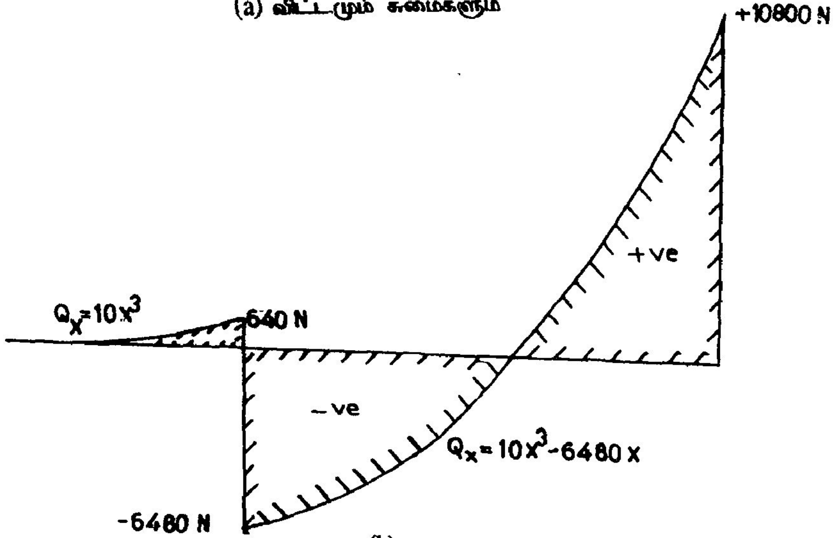


(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

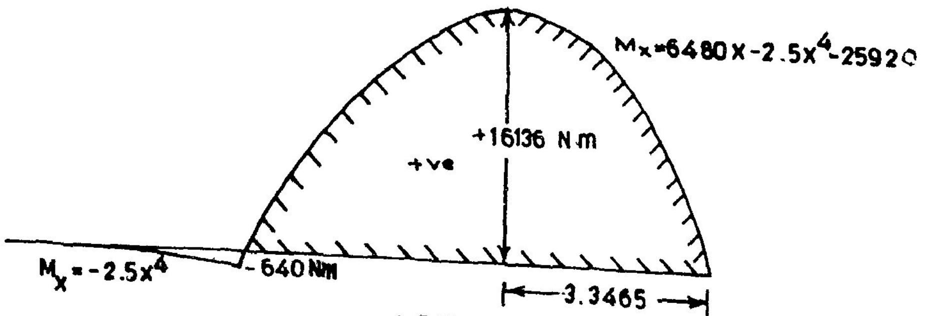
படம் 5.38



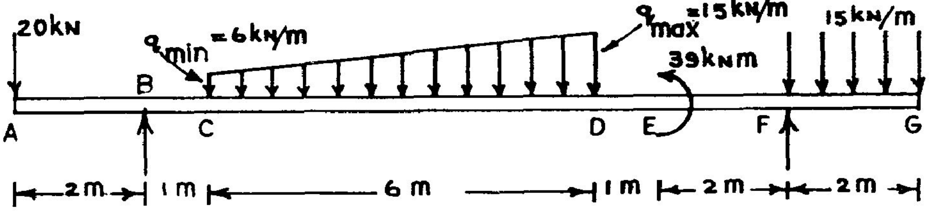
(a) விட்டமும் சுமைகளும்



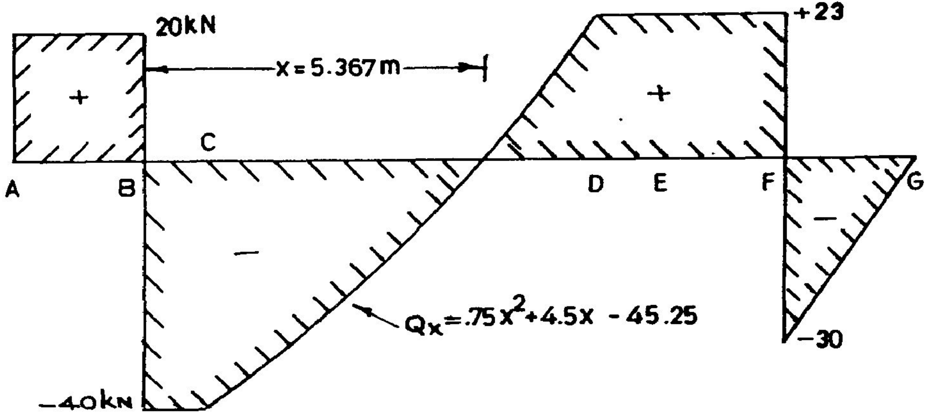
(b) நறுக்கு விசைப்படம்



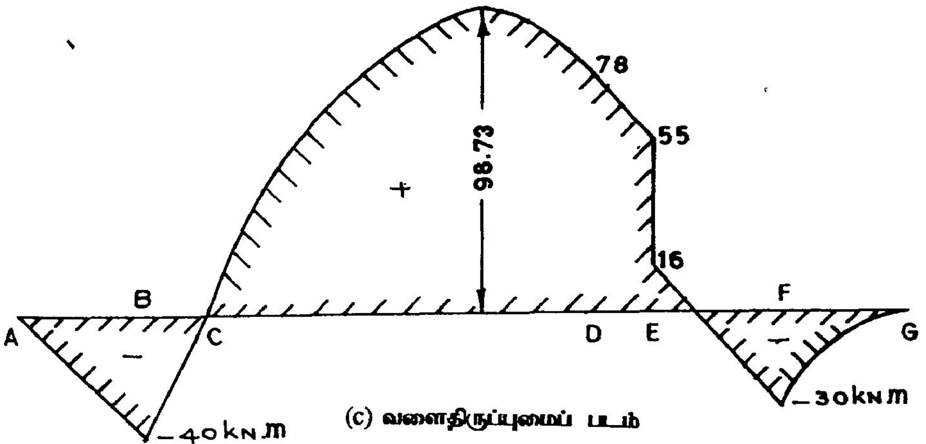
படம் 5.39



(a) விட்டமும் சுமைகளும்



(b) நறுக்கு விசைப்படம்

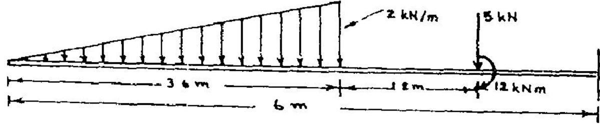


(c) வளைதிருப்புமைப் படம்

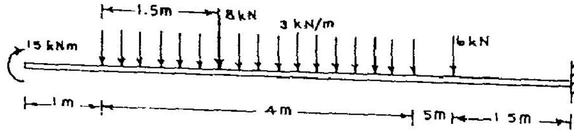
படம் 5.40

பயிற்சி 5.4

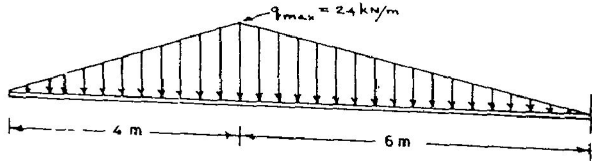
5.41 முதல் 5.50 வரையுள்ள படங்களில் காணப்படும் விட்டங்களை ஆய்ந்து நறுக்குவிசைப் படங்களும் வளைதிருப்புமை படங்களும் வரைக



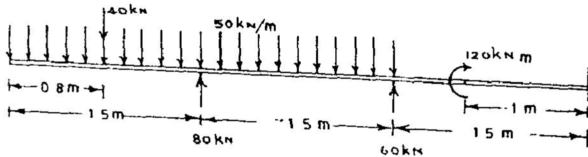
படம் 5.41



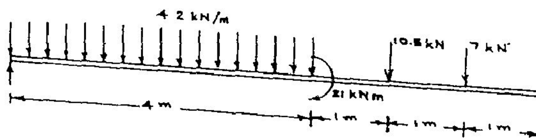
படம் 5.42



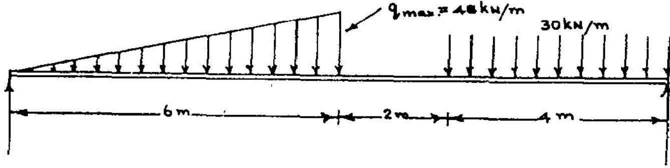
படம் 5.43



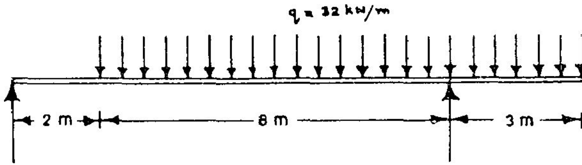
படம் 5.44



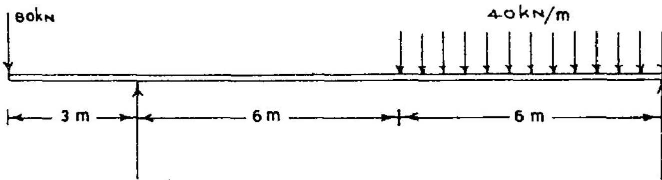
படம் 5.45



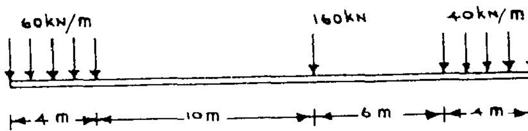
படம் 5.46



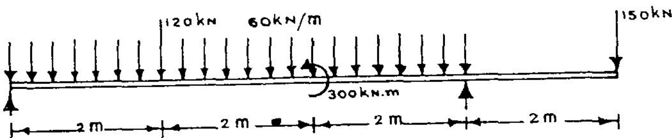
படம் 5.47



படம் 5 48



படம் 5 49



படம் 5.50

பயிற்சி 5.5

1. நீட்டம் (span) , L கொண்டதொரு எளிமைதாங்கி விட்டத்தின் முழுநீளத்திலும் சீராய தொடர்சுமை q செலுத்தப்பட்டால் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமையின் உச்சமதிப்பு $\frac{qL^2}{8}$ என நிறுவுக.

2. முழுநீட்டம், L கொண்டதொரு விட்டம், அதன் இடமுனையில் கூர்முனைத் தாங்கி கொண்டு விளங்கிறது. விட்டத்தின் முழுநீளத்திலும் சீரான தொடர்சுமை q செலுத்தப்படும்போது உச்சதிருப்புமை மதிப்பு மிகக் குறைவாய் இருக்க வேண்டுமெனில், உருளைத் தாங்கி ஒன்றனை எங்கு அமைக்க வேண்டும்?

3. படம் 5.24 இல் காட்டப்பட்டுள்ள துருத்துவிட்டத்தின் தொங்கு முனையில் (A) செலுத்தப்படும் மேல்நோக்கிய விசை P எவ்வளவாய் இருப்பின், உச்ச வளைதிருப்புமை அளவு மிகக் குறைவாயிருக்கும் ?

   $P = \frac{qL}{5}$ எனில், விட்டத்தினை ஆய்ந்து நறுக்குவிசை, திருப்புமைப் படங்களை வரைக.

4. படம் 5.25 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தில் D என்னும் வெட்டுமுகத்தில் செலுத்தப்படும் மேல் நோக்கிய விசை (30 kN) நீக்கப்பட்டால் தோன்றும் விளைவுகளை ஆய்க.

5. படம் 5.34 இல் காணப்படும் விட்டத்தின் இருமுனைகளிலும் எளிய தாங்கிகள் கொடுக்கப்பட்டால், தோற்றுவிக்கப்படும் உச்ச வளைதிருப்புமை, உச்ச நறுக்கு விசை இவற்றைக் காண்க.

6. படம் 5.52 இல் காணப்படும் விட்டத்தின் தாங்கிகளை எங்கு நிறுவினால் உச்சவளை திறனின் அளவினை மிகக் குறைவானதாக்க இயலும்?

6. விட்டங்களில் தகைவுகள்
(Stresses in Beams)

6.1 எளிய வளைதல் கோட்பாடு

ஒருவிட்டத்தின்மீது செலுத்தப்படும் பல்வேறு சுமைகளின் விளைவாய் விட்டத்தின் ஒவ்வொரு வெட்டுமுகத்திலும் செயல்படும் புறவிசைகளை, அஃதாவது, நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை ஆகியவற்றைக் காணும் முறைகளைக் கடந்த அத்தியாயத்தில் விரிவாய்க் கற்றோம் . இனி, இப் புறவிசைகளின் விளைவாய் விட்டத்தின் உட்பகுதியில் தோற்றுவிக்கப் படும் தகைவுகளைப் பற்றி ஆய முற்படுவோம். விட்டங்களின் உட்பகுதிகளில் தோற்று விக்கப்படும் தகைவுகளும், விகலங்களும், புறவிசைகளையும், விட்டப்பொருளின் மீள்மைப் பண்புகளையும், விட்டத்தின் வடிவக் கூறுகளையும் சார்ந்துள்ளன. இவற்றையும் கருத்தில் கொண்டுதான் விட்டத்தின் தகைவுகளைக் காண வேண்டும். இவ் ஆய்வுகளில் மிகவும் சரியான விடைகளைக் காணும் முயற்சிகளில் எதிர்ப்படும் கணித இடர்ப்பாடுகள் பலவற்றின் காரணமாய்த் தோராய ஆய்வுமுறைகள் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன. இம் முறைகளில் மிக எளிமையானதொன்றே, **எளிய வளைதல் கோட்பாடு** (Theory of simple bending) எனலாம். சில கற்பிதங்களை (Assumptions) மேற்கொண்டு கோட்பாட்டினை எளிமைப்படுத்தியுள்ளனர். இதன் விளைவாய் இக் கோட்பாட்டின் பயன் சில குறிப்பிட்ட சூழ்நிலைகளுக்கு மட்டுமே கிட்டும். எனினும், பல வடிவமைப்புகளில் இக் கோட்பாடே போதுமானது. மேலும், இக் கோட்பாடு முற்றும் போதாத சூழ்நிலைகளில், சற்றுச் சிக்கலான கோட்பாடுகளை உருவாக்க முடியுமென்பதனைப் பின்னர் காண்போம்.

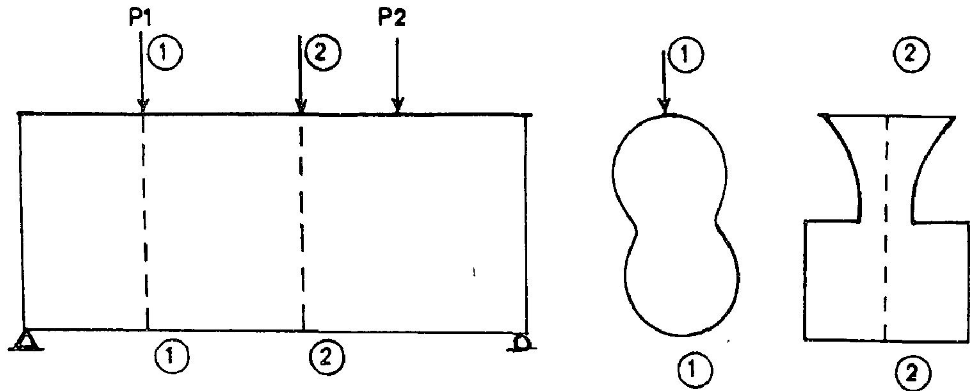
இக் கோட்பாட்டினை உருவாக்குவதில் மேற்கொள்ளப்படும் கற்பிதங்களைக் காண்போம். அவை :

1. விட்டத்திற்குப் பயன்படுத்தப்படும் பொருள் *திசைச் சீர்மை* (Isotropy)யும், *கனச் சீர்மை* (Homogenity)யும் கொண்டதாய் விளங்குகிறது.

2. விட்டங்களின்மீது செலுத்தப்படும் புறவிசைகளால் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவு விகலங்கள், மீட்சி எல்லைக்குள் இருக்கின்றன; அஃதாவது தகைவு விகல உறவு ஹூக் விதிக்கு உட்படும்.

3. விட்டத்தில் வளைதலைத் தோற்றுவிக்கும் விசைகள் செலுத்தப்படும் சமதளத்தின் இருபுறங்களிலும், விட்டத்தின் வெட்டுமுகப் பகுதிகள் வடிவச் *சீர்மை* கொண்டதாயிருக்கக வேண்டும்.

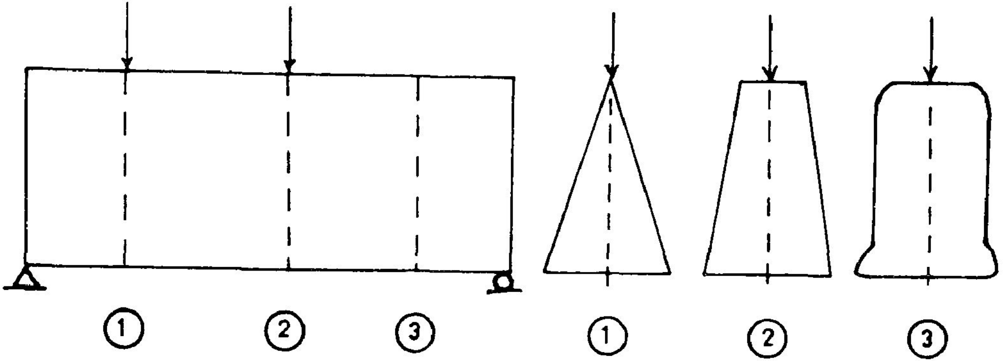
இக் கருத்தினை படம் 6.1 விளக்குகிறது.



படம் 6.1

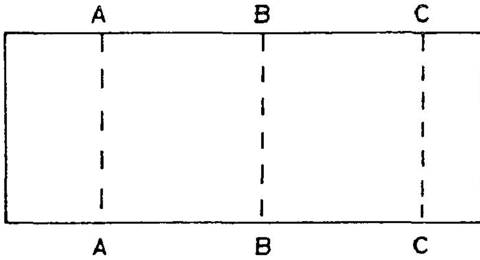
படம் 6.1 இல் ஒருவிட்டத்தின் நீள்வெட்டு முகம் (Longitudinal section), குறுக்கு வெட்டு முகங்கள் இரண்டும் காட்டப்பட்டுள்ளன. விசைகள் செலுத்தப்படும் தளத்தின் வீழல்கள் ① - ① அல்லது ②–② குறுக்கு வெட்டுப் படங்களில் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவ்வச்சு களை மையமாகக் கொண்டு நோக்கினால், அச்சுகளின் இருபக்கமும் வெட்டுமுகம் வடிவச்சீர்மை (Symmetry)யுடன் விளங்குதலை நோக்கலாம். அஃதாவது அச்சு ①–①, அல்லது ② - ② க்கு ஒருபக்கத்திலுள்ள பகுதி மற்றொரு பகுதியின் ஆடிப்பிம்பமா (Mirror Reflection) யிருப்பதைக் காண்கிறோம். இத் தன்மையை ஓரச்சு வடிவச் சீர்மை என்கிறோம். எங்கு வெட்டுமுகத்தைக் கருதினாலும், வெட்டுமுகங்களின் சீர்மை அச்சுகள் (Axes of symmetry) யாவும் ஒரே சமதளத்தில் இருக்க வேண்டும். (அஃதாவது, குறுக்கு வெட்டுத் தோற்றங்களில் காணப்படும் சீர்மை அச்சுகள் யாவும் இணையாயிருக்க வேண்டும்). இச் சமதளத்தில் தான் புறவிசைகள் செலுத்தப்பட வேண்டும். ஆனால், இச் சமதளம், நேர்க்குத்தா (Vertical)யிருக்க வேண்டுமென்பது அவசியமில்லை. விசைகள் செலுத்தப்படும் தளத்தின் வீழல்களே வெட்டுமுகங்களின் சீர்மை அச்சுகளாயிருக்கவேண்டும். இக் கருத்தினைப் படம் 6.2 தெளிவுறுத்துகிறது.

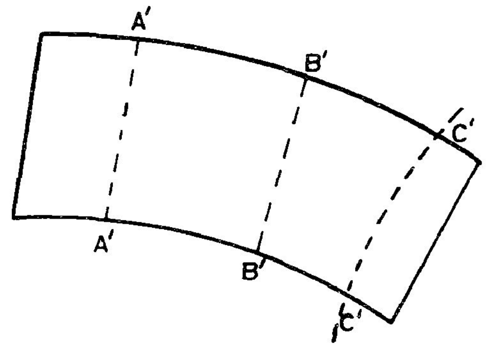
4. விட்டம் வளையத் தொடங்குமுன் சமதளங்களாய் விளங்கும் வெட்டு முகங்கள் வளைதலுக்குப் பின்னரும் சமதளங்களாகவே விளங்குகின்றன. இக் கருத்தின் விளக்கத்தைப் படம் 6.3 இல் காணலாம்.



படம் 6.2

அஃதாவது, படம் 6.3 (1) இல் நேரானதொரு விட்டத்தின் வெட்டுமுகங்கள் A-A, B-B, C-C ஆகியவை காட்டப்பட்டுள்ளன. விட்டம் வளையும்போது இவ் வெட்டுமுகங்கள், தம் முந்தைய நிலையின்று சாய்வு அடையலாம். ஆனால், A'A' அல்லது B'B' போன்று சமதளங் களாகவே விளங்குகின்றன. C'C' இல் காட்டப்பட்டுள்ளது போன்ற வடிவில் வெட்டுமுகங்கள் வளைவடைவதில்லை என்பதே அடிப்படைக் கற்பிதம்.





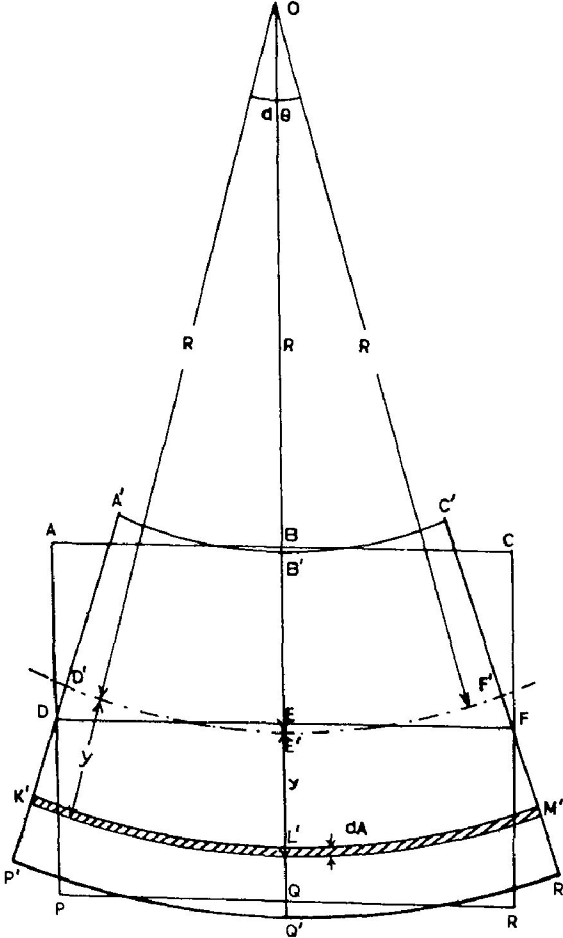
(i) வளைதற்கு முன் (ii) வளைந்த பின்

படம் 6.3

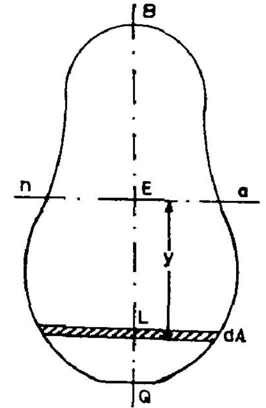
5. விட்டப் பொருளின் மீள்மைக் குணகம் (Elastic Modulus) நீள்தகைவுக்கும் (Tension), இறுக்குத் தகைவுக்கும் (Compression) ஒரேயளவாயிருக்க வேண்டும்.

விட்டம் வளையும்போது என்ன நடக்கிறது? என்பதை மேற்கண்ட ஐந்து கற்பிதங்களின் அடிப்படையில் நோக்குவோம். விட்டங்களின் வளைவிற்கு அளவீடு வளைமை (Curvature) எனலாம். அதாவது விட்ட அச்சின் எந்தவொரு புள்ளியிலும் அதன் வளைவாரத்தை (Radius of Curvature), R எனக் குறிப்பிடில், இதன் தலைகீழியான (Reciprocal) 1/R-ஐ, வளைமை என

வரையறுக்கிறோம். வளைந்த விட்ட அச்சின் வழியே ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வளைமை மாறிக்கொண்டேயிருக்கக்கூடும். ஆனால், விட்டத்தின் மிகச்சிறிதொரு பகுதியின் (நீளம் = dx) வளைவைக் கருதும்போது, அச் சிறுநீளத்திற்குள் வளைமை நிலையானதாயிருப்பதாய்க் கருதலாம்; அஃதாவது இச்சிறு நீளம் வட்டவடிவில் வளைந்திருப்பதாய்க் கொள்கிறோம். இவ்வாறு வளைந்ததொரு பகுதியினைப் படம் 6.4 இல் காணலாம்.



(i) dx நீளமுள்ள விட்டத்தின் வளைமை



(ii) வெட்டுமுகம் BEQ

படம் 6.4 விட்டத்தின் வளைமை

dx நீளமுள்ள ABCPQR எனப்படும் விட்டப் பகுதி வளைவாரம் (R) அளவு இருக்குமாறு, O ஐ மையமாகக் கொண்டு வளைவடைந்து A'B'C'P'Q'R' என்ற புதிய நிலையை அடைந் திருப்பதாய்க் கொள்வோம். இவ் விட்டப் பகுதியின் பல்வேறு அடுக்குகளிலும் நலிவுகள் தோற்றுவிக்கப்பட்டுள்ளமை நோக்கலாம். பல அடுக்குகள் நீட்சியடைந்திருப்பதையும் வேறுபல அடுக்குகள் குறுக்கம் அடைந்திருப்பதையும் நோக்கலாம். இடையே, தொடர்ச்சி நோக்கில், நீட்சியோ குறுக்கமோ ஏதும் அடையாத தளமும் ஒன்று இருக்க வேண்டும் என் பதை உய்த்துணரலாம். இத் தளத்தில் தகைவு இருக்க முடியாது. அதனால், இதனைத் **தகைவில் தளம்** (Neutral plane) என அழைக்கின்றோம். வெட்டுமுகத்தில் இதன் வீழலைத் (N–A) எனப் படம் **6.4** இல் வெட்டுமுகத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது) **தகைவில் அச்சு** (Neutral Axis) எனவும் அழைக்கின்றோம். இத் தளம் நீள்வெட்டுப்படத்தில் DEF எனக் குறிக்கப் பட் டுள்ளது. வளைதலையடுத்துத் தகைவில் தளம் D'E'F என்னும் நிலையை அடைந்திருக்கிறது. இது R ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் வில்; இவ் வில் நீட்சியோ, குறுக்கமோ அடையாமல் வெறும் வளைவை மட்டுமே அடைந்திருப்பதால் இதன் நீளம் DEFக்குச் சமமாகவே இருக்க வேண்டும். இவ் வில் மையத்தில் $d\theta$ அளவு கோணம் அடைவு (Subtend) செய்வதாய்க் கொள்ளின்,

$$DEF = D'E'F = Rd\theta$$ எனலாம்.

தகைவில் தளத்தைப் போன்றே மற்றத் தளங்களும் வட்டவில் வடிவிலேயே வளை வடைந்துள்ளன. (இதுவே நான்காம் கருதுகோளின் உட்பொருளாகும்). இவ் வட்ட விற்கள் அனைத்திற்கும் ஒரே மையம்தான் உண்டு. அதுவே O என்னும் புள்ளி. எனவே, எந்தவொரு தளத்தின் நீளமும் (வளைவின் பின்), அத்தளத்தின் வளைவாரத்தையொட்டியே (அடைவுக் கோணம் $d\theta$ பொதுவாயிருப்பதால்) இருக்க வேண்டும். அதனால், தகைவில் அச்சிலிருந்து வளைவாரத்தின் திசையில் y அலகு தூரத்தில் உள்ளதொரு தளத்தின் நீளத்தினைக் கணக் கிடுவோம். இது K'L'M' எனப் படத்தில குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

$$K'L'M' = (R + y)\, d\theta$$

இதன் தொடக்க நீளம் $= dx = Rd\theta$

எனவே இத் தளத்தின் விகலம் $\varepsilon = \dfrac{(R+y)\ d\theta - Rd\theta}{Rd\theta}$

அஃதாவது, $$\varepsilon = \frac{y}{R} \qquad 6.1$$

(கருதப்படும் தளம் (KLM) வளைவு மையத்தின் திசையில் இருப்பின், தகைவில் அச்சிலிருந்து அதன் தூரத்தை – y எனக் கொண்டு கணக்கிட விகலம் குறுக்கமாக வரும்). இத் தளத்தில் தகைவினை உறுக் விதிப்படி கணக்கிடில்,

தகைவு $\sigma = E\varepsilon = \dfrac{Ey}{R}$ என எழுதலாம்

அல்லது $\sigma = \frac{Ey}{R}$ 6.2

$$\therefore \quad \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \qquad 6.3$$

இனி வெட்டுமுகத்தின் சமனிவைகளை நோக்குவோம். சமன்பாடு **6.2** தரும் தகைவு விட்டத்தின் வெட்டுமுகத்தின்மீது ஒருகுறிப்பிட்ட மட்டத்தில், விட்டத்தின் அச்சுத் திசையில் செயல்படும் குத்துத் தகைவாகும். இக் குத்துத் தகைவு செயல்படும் பரப்பளவை dA எனக் குறிப்பிடின் இப் பரப்பின்மீது செயல்படும் விசையில் அளவு σdA எனலாம்; வெட்டுமுகத்தின்மீது மொத்த அச்சு விசை,

$$F_x = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{E}{R} y\, dA$$

ஒரு குறிப்பிட்ட வெட்டுமுகத்தைப் பொறுத்த மட்டில் E/R என்பது ஒரு சுழியில்லாத மாறிலி. எனவே

$$F_x = \frac{E}{R} \int_A y dA$$ எனலாம்.

ஆனால், விட்டத்தின்மீது அச்சுதிசையில் புறவிசைகள் ஏதும் செலுத்தப்படாமையின்,

$$\frac{E}{R} \int_A y dA = 0$$ ஆதல் வேண்டும்.

அல்லது

$$\int_A y dA = 0 \qquad 6.4$$

இக் கோட்பாட்டில் **6.4** முக்கியமானதொரு சமன்பாடாகும். விட்டத்தின் வளைதல் பற்றிப் பேசும்போது ஏதாவது ஒருதளம் நீட்சியோ, குறுக்கமோ அடையாதிருக்க வேண்டுமென்று கூறினோமேயன்றி, அத் தளம் எங்குள்ளது என்பதுபற்றிக் கூறவில்லை. ஒவ்வொரு தளத்தினையும் தகைவில் அச்சிலிருந்து (தகைவில் தளத்திலிருந்து) அதன்தூரம் y என்னும் அளவீட்டினாலேயே குறிப்பிட்டோம். எனவே, E/R இன் மதிப்புத் தெரிந்தாலும்கூட, தகைவில் அச்சினை வரையறுக்காவிடின், சமன்பாடு **6.2** ஐப் பயன்படுத்தலும் இயலாது. சமன்பாடு **6.4**, தகைவில் அச்சினை வரையறுக்க உதவுகிறது.

ydA என்பது dA எனும் சிறுபரப்பின் தகைவில் அச்சுத்திருப்புமை, (Moment of Area dA about Neutral axis) ஆகும். அதனால், சமன்பாடு **6.4** இன் படி, தகைவில் அச்சுத்திருப்புமையைக்

கணக்கிடின், மொத்தக் குறுக்குப் பரப்பின் திருப்புமை O ஆக வேண்டும். இதிலிருந்து, தகைவில் அச்சு, வெட்டுமுகத்தின் ஈர்ப்பு மையத்தின் (Centroid) வழியே செல்லும் கிடைக்கோடு என அறிகிறோம். சமன்பாடு 6.4, விசைச் சமனிலைச் சமன்பாடு . அடுத்து, திருப்புமை சமனிலையை நோக்குவோம்.

dA என்னும் பரப்பின்மீது செயல்படும் விசை, தகைவின் அச்சிலிருந்து y அளவு தொலை வின் இருப்பதால், தகைவின் அச்சின்பால் இதன் திருப்புமை, σdA. y எனலாம். இத் திருப்புமை களைத் தொகுக்க, மொத்த அகத்திருப்புமை

$$= \int_A \sigma \, dAy$$

$$= \int_A \frac{Ey}{R} \, ydA$$

$$M = \frac{E}{R} \int_A y^2 \, dA \qquad 6.5$$

எனப் பெறுகிறோம். சமன்பாடு 6.5 இல் வரும் $\int_A y^2 dA$ என்னும் தொகையம் ஒருவெட்டு முகத் தைப் பொருத்தமட்டில் ஒருமாறிலி (Constant)யே. இதனை வெட்டுமுகத்தின் உறழ்திருப்புமை (Moment of Inertia) என அழைத்து I என்னும் குறியீட்டால் குறிப்பிடுகிறோம். z என்னும் அச்சி லிருந்து y அளக்கப்படுவதால் இது பொதுவாக I_z எனக் குறிப்பிடப்படும்.

$$\therefore \quad M = \frac{E}{R} I$$

அல்லது

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} \qquad 6.6$$

இதன் சமன்பாடு 6.3 உடன் இணைப்பின்,

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R} \qquad 6.7$$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். இதுவே வளைதல் சமன்பாடு (Equation of Bending) என அறியப்படுகிறது.

6.2 வளைதல் கோட்பாட்டின் பயன்பாடுகள் (Applications of the Bending Theory)

சமன்பாடு 6.5 என்பது எளிய வளைதல் கோட்பாட்டின் அடிப்படைச் சமன்பாடாகும். இச் சமன்பாட்டினை முழுமையாகவோ பகுதிகளாகவோ பயன்படுத்தலாம். குறிப்பாக, ஒரு வெட்டுமுகத்தின் வடிவமும், அதன்மீது செயல்படும் திருப்புமையும் தெரிந்தால், எந்தவொரு தளத்திலும் தகைவினை,

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} \qquad 6.8$$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம். இதனை மேற்கொள்ளுதற்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வடிவமைப்பின் (குறுக்குப் பரப்பின்) உறழ்திருப்புமையை கணக்கிடுதல் முதல்தேவை ஆகும். பல்வேறு வகைப் பரப்புகளின் ஈர்ப்பு மையம் (அல்லது தகைவில் அச்சு), உறழ்திருப்புமை இவற்றைக் கணக்கிடும் முறைகள் அத்தியாயம் 7 இல் விரிவாய்த் தரப்படுகின்றன. அவற்றைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடு 6.8 இன் பயன்கள் சிலவற்றைக் காண்போம்.

எ.கா. **6.1**

120 mm. அகலமும், 200mm. உயரமும் உள்ள செவ்வகக் குறுக்குப் பரப்புக் கொண்டதொரு விட்டத்தின் ஒரு வெட்டுமுகத்தில் வளைதிருப்புமை 60000 Nm எனில், விட்டத்தில் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

செவ்வகக் குறுக்குப் பரப்பின் அகல, உயரங்கள் முறையே b, h எனில், அதன் தகைவில் அச்சு $\frac{h}{2}$ உயரத்தில் இருக்கும்.

இவ் அச்சின்பால் உறழ்திருப்புமை* $= \frac{bd^3}{12}$

$$I = \frac{120 \times 200^3}{12} = 8 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

வெட்டுமுகத்தின்மீது வளைதிருப்புமை $=$ 60000 Nm

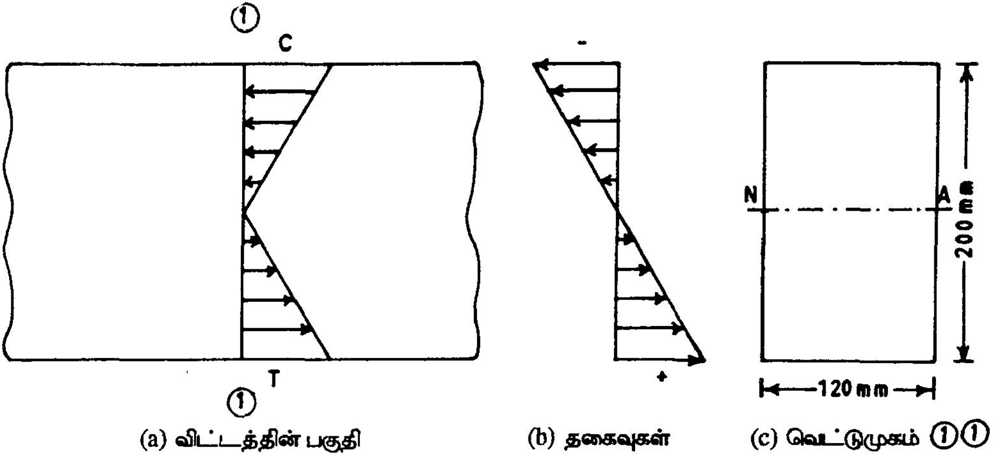
$$M = 60 \times 10^8 \text{ Nmm}$$

* கணக்கீட்டு விவரங்களை அத்தியாயம் 7 இல் காணலாம்.

தகைவில் அச்சிலிருந்து y தொலைவிலுள்ளதொரு தளத்தில் தகைவு σ $= \frac{M}{I} y$

அஃதாவது $\sigma = \frac{6 \times 10^7 \times y}{8 \times 10^7} = 0.75y$

அஃதாவது, விட்டத்தின் எந்தவொரு தளத்திலும் தகைவு, அத் தளம் தகைவில் தளத் திலிருந்து உள்ள தூரத்தோடு (y) நேர்முகப் பொருத்தமுள்ளது என்பதைக் காண்கிறோம். இப் பரவலைப் படம் 6.5 காட்டுகிறது.



(a) விட்டத்தின் பகுதி (b) தகைவுகள் (c) வெட்டுமுகம் 1 1

படம் 6.5

y இன் மதிப்பு உச்சமாகவுள்ள விட்டத்தின் விளிம்புகளிலேயே (extreme layers), தகைவுகள் உச்ச அளவில் தோற்றுவிக்கப்படுகின்றன என்பதை அறியலாம்.

உச்ச நீள்தகைவு $= 0.75\ y_{max} = 0.75 \times 100 = 75 N/mm^2$.

உச்ச இறுக்கத் தகைவு $= 0.75 \times y_{min} = 0.75 \times (-100) = -75\ N/mm^2$.

இவை படம் 6.5 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. இடைப்பட்ட எந்தவொரு தளத்திலும் சமன்பாடு 6.6 ஐப் பயன்படுத்தித் தகைவுகளைக் கணக்கிட முடியும். எனினும், நடைமுறையில் மிகுதியாய்ப் பயன்படுவன விளிம்புத் தகைவுகளே.

எ.கா. 6.2

150 mm அகலம், 400 mm உயரம் கொண்ட செவ்வக வடிவில் குறுக்குப் பரப்புள்ள விட்டமொன்றின், காப்புவலிமை 8 N/mm^2 எனில், விட்டத்தின்மீது செலுத்தக்கூடிய உச்ச வளை திருப்புமையை கணக்கிடுக.

தீர்வு:

வெட்டுமுகத்தின் தகைவில் அச்சு மையத்திலிருக்கும்

தகைவில் அச்சின்டால் உறழ்திருப்புமை, $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{150 \times 400^{33}}{12}$

$= 8 \times 10^8 \text{ mm}^4$

விளிம்புத்தூரம் $y = \pm\ 200\text{mm}.$

உச்ச தகைவின் அளவு $\leq$ காப்பு வலிமை

அல்லது, உச்சத் தகைவு $=$ காப்பு வலிமை

சமன்பாடு 6.8 ஐப் பயன்படுத்த,

$$\frac{M}{8 \times 10^8} = \frac{8}{200}$$

அல்லது உச்சவளைதிருப்புமை, $M = \frac{8 \times 8 \times 10^8}{200} = 32 \times 10^6 \text{ Nmm}$

$= 32 \text{ kNm}$

சமன்பாடு 6.6 இலிருநது உச்ச வளைதிருப்புமைக்கு பொதுவான வாய்பாடு காணலாம்.

$$M_{max} = \sigma_{max} \frac{I}{y_{max}} \qquad 6.9$$

சமன்பாடு 6.9 இல் இடப்புறப்பகுதியாய M_{max} என்பது வெட்டுமுகம் ஒன்றில் செலுத்தப்படக்கூடிய வளைதிருப்புமையின் உச்ச அளவாகும். இதனை வெட்டுமுகத்தின் திருப்பு வலிமை (Moment capacity, Resisting Moment) எனலாம். புறவிசையாய்ச் செலுத்தப்படும் வளை திருப்புமை (External Bending Moment) எப்பொழுதும் வெட்டுமுகத்தின் திருப்பு வலிமைக்கு மிகாமல் இருக்குமாறு அமைதல் வடிவமைப்பாளர் பொறுப்பாகும்.

இவ் எடுத்துக்காட்டின் துணையுடன், மற்றொரு புதிய கருத்தையும் உரைப்போம். உறழ்திருப்புமை I யைப் போலவே, ஒரு வெட்டுமுகத்தின் உச்ச விளிம்புத் தூரங்களும் (y_{max}) மாறிலிகளே. அதனால், சமன்பாடு 6.7ல் தோன்றும் $\frac{I}{y_{max}}$ என்பதும் ஒரு மாறிலியே.

இதனை ஒரே மாறிலியாய்ப் பயன்படுத்தலாம். இம் மாறிலி, வெட்டுமுகக்கெழு (Modulus of section அல்லது Section Modulus) என அழைக்கப்பட்டு Z என்னும் குறியீட்டால் குறிக்கப் படுகிறது. இனிச் சமன்பாடு 6.9 இன் மாற்றுவடிவமாய,

திருப்புவலிமை = உச்சத் தகைவு × வெட்டுமுகக்கெழு

அல்லது $R.M = \sigma_{max}.Z$ 6.10

என உரைக்கிறோம்.

எ.கா. **6.3**

காப்புவலிமை 12 N/mm^2 கொண்டதொரு மரத்தினைக் கொண்ட 4m நீட்டம் கொண்ட எளிமைதாங்கி மரவிட்டம் ஒன்று, முழுநீட்டத்திலும் சீர்பரவு சுமை 150 kN/m தாங்க வேண்டு மெனில், அதன் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பினை நிறுவுக.

தீர்வு:

(கடந்த இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் தகைவு ஆய்வு, வலிமை ஆய்வுகள் செய் தோம். மூன்றாவதாய் வடிவமைப்பு எடுத்துக்காட்டு ஒன்று காண்கிறோம்.)

விட்டத்தின் நீட்டம் $L = 4$ m

விட்டத்தின் மீது சுமைச் செறிவு $q = 150$ kN/m

எனவே, உச்ச வளைதிருப்புமை $\frac{qL^2}{8} = \frac{150 \times 4^2}{8} = 300$ kN.m

$= 300 \times 1000 \times 1000$ N.mm

$= 3 \times 10^8$ N.mm

விட்டப் பொருளின் காப்புவலிமை $= 12\ N/mm^2$

எனவே, தேவையாய வெட்டுமுகக்கெழு $Z = \frac{3 \times 10^8}{12} = 2.5 \times 10^7\ mm^3$

குறுக்குப் பரப்புச் செவ்வகம் எனக் கொண்டு, அதன் குறுக்களவுகள், அகலம் = b உயரம் = h எனக் கொள்ளின்,

$$Z = \frac{b\,h^2}{6} = 2.5 \times 10^7 \text{ mm}^3$$

அல்லது $= bh^2 = 1.5\times 10^8 \text{ mm}^3$

(இந்த கட்டம்வரை எல்லோர்க்கும் ஒரே விடைதான் வரவேண்டும். ஆனால், அகலம் எவ்வளவு இருக்கும்வேண்டும்? உயரம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்? என முடிவு செய்வதில் வெவ்வேறு பல விடைகள் பெற முடியும். அதனால்தான் ஒரே விதமான சூழ்நிலைக்கு வெவ்வேறு பொறியாளர் வெவ்வேறுவிதமாய வடிவமைப்புகளை நல்குதலைக் காணலாம். வடிவமைப்பின் கோட்பாடுகளைக் கட்டுமானப் பொறியியல் நூல்களில் விரிவாய்க் காணலாம். இங்குச் சாரமான அடிப்படைகளை மட்டுமே நோக்குகிறோம்).

அகலம் உயரத்தில் பாதி எனக் கொண்டு குறுக்களவுகளைக் கணக்கிடுவோம்.

அப்போது $= \frac{h}{2} \times h^2 = 1.5 \times 10^8$

இதிலிருந்து, $h = \sqrt[3]{2 \times 1.5 \times 10^8}$

$= 669.4\text{mm}$

$b = \frac{669.4}{2} = 334.7\text{mm}$

அஃதாவது 670mm உயரமும் 335mm அகலமும் கொண்ட குறுக்குப் பரப்பினை அமைக்கலாம்.

மாறாய் $b = \frac{h}{3}$ எனக் கொண்டால்,

$h = 766.3\text{mm}, b = 255.5\text{mm}$ என்னும் குறுக்களவுகளை விடையாய்ப் பெறுவோம்.

வெட்டுமுகங்கள் செவ்வக வடிவிலேயே இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை. சொல்லப் போனால் வேறுபல வடிவங்கள் (I (போன்றவை) மிகுதியாய உறழ்திருப்புமை கொண்டு விளங்குவதை அறிவோம். இவ் வடிவங்களைப் பயன்படுத்தி வடிவமைப்புச் செய்யும் எடுத்துக்காட்டு ஒன்றனைக் காண்போம்.

எ.கா 6.4

எடுத்துக்காட்டு 6.3 இல் கொடுக்கப்பட்ட விட்டத்தினை 140 N/mm^2 காப்பு வலிமை கொண்ட மென்உருக்கு விட்டமாக வடிவமைப்போம்.

தீர்வு:

விட்டத்தின்மீது வளைதிருப்புமை = 3×10^8 N.mm

மென்உருக்கின் காப்புவலிமை = 140 N/mm^2

ஃ தேவையான வெட்டுமுகக் கெழு = $\frac{3 \times 10^8}{140}$

= $2.1429 \times 10^6 \ mm^3$

I.S.808-1964 என்னும் செந்தரக் கையேட்டைப் பயன்படுத்தி I வடிவ விட்ட மொன்றனைத் தேர்ந்தெடுப்போம். தேர்ந்தெடுக்கப்படும் விட்டத்தின் வெட்டுமுகக்கெழு, தேவையானவெட்டுமுகக் கெழுவைவிடக் குறைவாயிருக்கக் கூடாது. இவ்வாறு தேடுகையில்,

ISLB 600 எனும் உருட்டு விட்டத்தின் வெட்டுமுகக் கெழு = $2.43 \times 10^6 \ mm^3$

ISMB 550 எனும் உருட்டு விட்டத்தின் வெட்டுமுகக் கெழு = $2.36 \times 10^6 \ mm^3$

இவை இரண்டுமே தேவைக்குகந்தன. எனவே, இவற்றுள் எடை குறைவாயுள்ள விட்டத்தினைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

ISLB 600 இன் அலகுநீளஎடை = 99.5 kg/m

ISMB 550 இன் அலகுநீளஎடை = 104.0 kg/m.

எனவே ISLB 600 ஐயே தேர்ந்தெடுப்பது நன்று.

இங்கு வளைதிருப்புமையினை ஒட்டிய வடிவமைப்பினையே செய்கின்றோமாகலின், பயன்படக்கூடிய இரண்டுவிட்டங்களுள் எடை குறைவானதையே தேர்ந்தெடுத்தோம். ஆனால், பின்னர் நறுக்குத் தகைவுகளையும் ஆயும் முறைகளையும் கற்றபின் எந்த விட்டம் தேவையான நறுக்கு வலிமையையும் கொண்டுள்ளதோ அதனையே தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும் என உணர்வோம். (இவ் எடுத்துக் காட்டிலுள்ள விட்டத்திற்குத் தேவையான நறுக்குவலிமை, இரண்டு உருட்டுவிட்டங்களுக்குமே உண்டென்றால் மட்டுமே எடை குறைவான விட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்).

உருட்டுவிட்டங்களின் பட்டியலை நோக்கும்போது, (வெட்டுமுகக்கெழு, உறழ் திருப்புமை இவற்றின் அளவுகளைக் கொண்டு) மிகுதியான வளைதிருப்புமைகள் செலுத் தப்படும்போது, தனியாய உருட்டுவிட்டங்கள் போதாவெனக் காண்கிறோம். இச் சூழ்நிலை களில் இணைப்புறுப்புகளைப் பயன்படுத்தியே நமது தேவையை நிறைவு செய்ய முடியும்.

எ.கா. 6.5

படம் 7.28 இல் காட்டப்பட்டுள்ள T வடிவ வெட்டுமுகம் கொண்ட எளிமைதாங்கி விட் டமொன்றன் நீட்டம் 1.60 மீ. ஆகவும், மையக் குவிவிசை 0.6 kN ஆகவும் இருப்பின், விட்டத் தில் தகைவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

எ.கா. 7.8 இலிருந்து விட்டத்தின் வேட்டுமுகப் பண்புகளில் தேவையானவற்றை எடுத் துக்கொள்வோம்.

அவை :

உறழ்திருப்புமை $I_{xx} = 4.17705 \times 10^6 mm^4$

தகைவில் அச்சிலிருந்து மேல் விளம்பின் தூரம் $y_c = 43.16mm$

தகைவில் அச்சிலிருந்து கீழ் விளிம்பின் தூரம் $y_t = 91.84$ mm

விட்டத்தில் உச்சவளை திருப்புமை $\frac{P.L}{4} = \frac{0.6 \times 1000 \times 1600}{4}$

$= 24 \times 10^4$ N.mm.

உச்ச இழுதகைவு $= \frac{M}{I} y_t$ * $= \frac{24 \times 10^4 \times 91.84}{4.17705 \times 10^6}$

$= 52.77 \text{ N/mm}^2$

உச்ச இறுக்கத்தகைவு $\frac{M.y_c}{I}$ * $= \frac{24 \times 10^4 \times 43.16}{4.17705 \times 10^6}$

$= 24.8 \text{ N/mm}^2$

* எளிமை தாங்கி விட்டத்தில் மேல்விளிம்பில் இறுக்கத்தகைவும் (Compressive stress) கீழ்விளிம்பில் இழுதகைவும் (Tensile Stress) இருக்குமாகவின் இவ் விளிம்புகளின் தூரங்கள் y_c , y_t எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இதுவே தருத்துவிட்டமாயிருப்பின், $y_c = 91.84$ mm, $y_t = 43.16$ mm எனக் கொள் ள வேண் டும்

எ.கா. 6.6

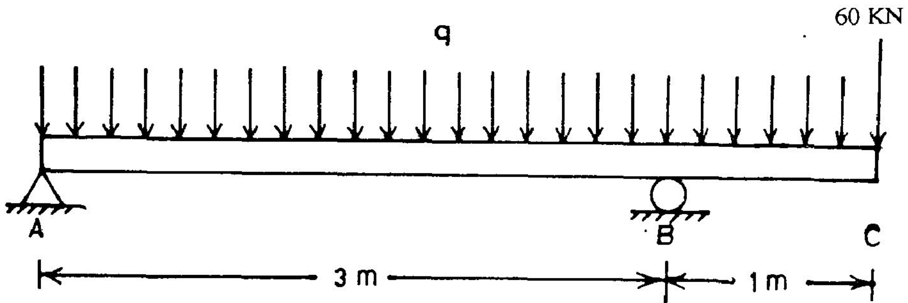
படம் 6.6 இல் காட்டப்பட்டுள்ள முனைதொங்கு விட்டத்திற்கு, படம் 7.42இல் காட்டப்பட்டுள்ள இணைப்புறுப்புப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. உருக்கின் காப்பு வலிமைகள், இறுக்கத்தில் 120 N/mm^2 நீள்தகைவில் 140 N/mm^2 எனில் விட்டத்தின் முழுநீளத்திலும் செலுத் தப்படும் சீர்பரவுசுமை q அதிக பட்சம் எவ்வளவு இருக்கலாம்?

இதுவரை நாம் கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளைவிட மிக விரிவாய் ஆராய வேண்டிய சூழல் இவ் எடுத்துக்காட்டில் தரப்பட்டுள்ளது. அதனால் முதலில் இங்கு ஆய வேண்டுவன யாவை என்பதனை வரிசைப்படுத்துவோம்.

1. விட்டத்தில் நேர், எதிர்மறை வளைதிருப்புமைகள் இரண்டும் செயல்படுமாதலின், விட்டம் தாங்கக் கூடிய உச்ச நேர்மறை வளைதிருப்புமையும் உச்ச எதிர்மறை வளை திருப்புமையும் காணப்பட வேண்டும்.

2. விட்டப் பொருள் இறுக்கத்திலும், நீட்சியிலும் வெவ்வேறு அளவு வலிமைகள் கொண்டி ருப்பதையும் கவனத்திற்கொள்ள வேண்டும்.

3. விட்டத்தினை ஆய்ந்து, அதில் பெறும் உச்ச நேர் வளைதிருப்புமை, உச்ச எதிர் வளை திருப்புமை இரண்டும் அவ்வவ் வளைதிருப்புமை தாங்கு வலிமைகளுக்கு மிகாம லிருக்குமாறு q இன் மதிப்பினை கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.



படம் 6.6

1. விட்டத்தின் வளைவலிமைகள் :

எடுத்துக்காட்டு 7.16 இலிருந்து விட்டத்தின் வெட்டுமுகப் பண்புகளை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

உறழ்திருப்புமை $I_{xx} = 1.492313 \times 10^8 \ mm^4$

தகைவில் அச்சிலிருந்து மேல்விளிம்பின் தூரம் = 69.6mm.

தகைவில் அச்சிலிருந்து கீழ்விளிம்பின் தூரம் = 142.4mm.

நேர்வளைதிருப்புமை செலுத்தப்படும்போது கீழ்விளிம்பில் இழுதகைவும் மேல்விளிம்பில் இறுக்கத் தகைவும் இருக்கும்; இங்கு y_t = 142.4mm y_c = 69.4mm. எனவே,

இறுக்க வெட்டுமுகக் கெழு, $z_c = \dfrac{1.492313 \times 10^8}{69.6} = 2.14413 \times 10^6 mm^3$

நீட்சிவெட்டுமுகக் கெழு, $z_t = \dfrac{1.492313 \times 10^8}{142.4} = 1.04797 \times 10^6 mm^3$

பொருளின் காப்பு வலிமைகள் இறுக்கத்தில் σ_{ac} எனவும், நீட்சியில் σ_{at} எனவும் கொண்டால், $z_c.\sigma_{ac}$, $z_t.\sigma_{at}$ ஆகிய இரண்டில் குறைவான வளைதிருப்புமையே விட்டத்தின் வளைவலிமையாகும்.

$z_c.\sigma_{ac}^{*} = 2.14413 \times 10^6 \times 120 = 2.573 \times 108$

$= 257.30$ kN.m.

$z_t . \sigma_{at}^{*} = 1.04797 \times 10^6 \times 140 = 1.4672 \times 10^8$ Nmm.

$= 146.72$ kN.m.

எனவே விட்டத்தின் நேர்வளைவலிமை = 146.72 kN.m.

எதிர்மறை வளைதிலில், மேல்விளிம்பில் விகுவும்,
கீழ்விளிம்பில் இறுக்கமும் தோன்றுமாதலின், $z_c = 1.04797 \times 10^6 mm^3$

$z_c.\sigma_{ac} = 1.04797 \times 10^6 \times 120 = 1.2577 \times 10^8$ Nmm.

$= 125.77$ kN.m.

$z_t . \sigma_{at} = 2.14413 \times 10^6 \times 140 = 3.002 \times 10^8$ Nmm.

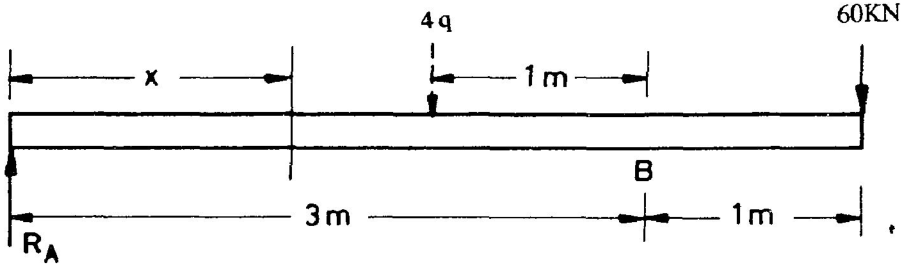
$= 300.20$ kN.m.

விட்டம் தாங்கக் கூடிய உச்ச நேர்வளைதிருப்புமை = 146.72 kN.m.

விட்டம் தாங்கக் கூடிய உச்ச எதிர்வளைதிருப்புமை = 125.77 kN.m.

---

* Allowable stress in tension (σ_{at}) Allowable stress in compression (σ_{ac}) எனும் தொடர்களின் கிரேக்க ஆங்கிலக் குறுக்கங்கள்.)



படம் 6.7

இனி விட்டத்தின் வளைதிருப்புமைகளை ஆய்வோம் (படம் 6.7) தாங்கி Bஇல் திருப்புமை சமனிலைச் சமன்பாடு

$$-3 \times R_A + 4_q \times 1 - 60 \times 1 = 0$$

எனவே $$R_A = \left(\frac{4}{3}q - 20\right) \text{kN.}$$

$$R_B = 4q + 60 - R_A$$

$$= \left(\frac{8}{3}q + 80\right) \text{kN}$$

உச்ச எதிர்வளைதிருப்பு தாங்க B இல் இருக்கும்.

$$M_b = -60 \times 1 - q \times 1 \times .5 = -(60 + .5q)$$

எதிர்வளைவலிமை $$= -125.77 \text{ kN.m} = -80 - .5q.$$

$$q = \frac{(125.77 - 60)}{0.5} = 131.54 \text{ kN/m.}$$

A யிலிருந்து x தொலைவிலுள்ள வெட்டுமுகத்தில் வளைதிருப்புமை,

$$M_x = R_A . x - \frac{q x^2}{2}$$

$$= \left(\frac{4}{3}q - 20\right)x - \frac{qx^2}{2}$$

முதலில் உச்ச வளைதிருப்புமை எங்கு இருக்குமெனக் காண்போம். அதற்குரிய நிபந்தனை,

$$\frac{dM_x}{dx} = 0$$

அஃதாவது, $\frac{4}{3}q - 20 - qx = 0$

எனில், $x = \frac{4}{3} - \frac{20}{q}$

x- இன் இம் மதிப்பினை M_x க்குரிய கோவையிற் பயன்படுத்த,

$$M_{max} = \left(\frac{4}{3}q - 20\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{20}{q}\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{20}{q}\right)^2$$

$$= q\frac{q}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{20}{q}\right)^2 - \frac{q}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{20}{q}\right)^2$$

$$= \frac{q}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{20}{q}\right)^2$$

இதனை நேர்வளை வலிமைக்குச் சமனாக்க,

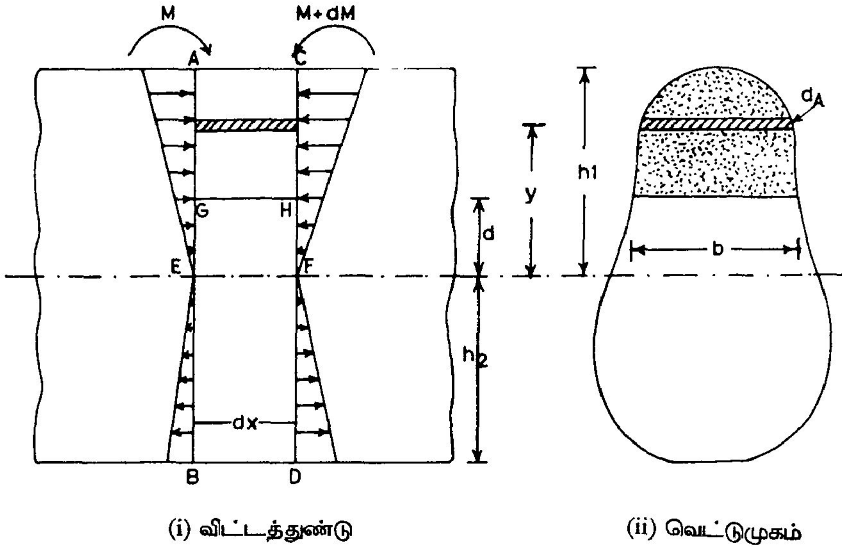
$$\frac{q}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{20}{q}\right)^2 = 146.72$$

சமன்பாட்டைத் தீர்க்க q = 173.76 kN/m, 1.3 kN/m.,

எனும் இருவிடைகள் கிடைக்கும். q = 173.76 kN/m என்பது உச்சநேர் வளைதிருப்புமையும் q = 1.3 kN/m என்பது மிகக் குறைந்த வளைதிருப்புமை (-ve)யும் தோற்றுவிக்கும் என்பதைக் கணக்கிட்டறியலாம். இதனால், விட்டத்தின்மீது எதிர்வளைதிருப்புமை, எதிர்வளை வலிமையைவிஞ்சாமலிக்க,q இன் உச்ச மதிப்பு 131.54 kN/m என்றும், நேர்வளைதிருப்புமை, விட்டத்தின் நேர்வளை வலிமையை விஞ்சாமலிருக்க q இன் உச்ச மதிப்பு 173.76 kN/m என்றும் அறிகிறோம். இரண்டு நிபந்தனைகளுமே நிறைவு செய்யப்படவேண்டுமாதலின் விட்டம் தாங்கக் கூடிய உச்சச் சீர்பரவு சுமை =131.54 kN/m.

6.3 விட்டங்களில் நறுக்குத் தகைவுகள் (Shear Stresses in Beams)

கட்டுரை 6.1 இல் விளக்கப்பட்ட எளிய வளைதல் கோட்பாடு, விட்டங்களில் வளைதிருப்புமைகள் விளைவிக்கும் தகைவுகளைக் கணக்கிடப் பயன்படுவதாகும். இனி விட்டங்களில் செயல்படும் விசைக் கூறுகளுள், அடுத்த முக்கியக் கூறான நறுக்குவிசை விளைக்கும் தகைவுகளை ஆராய்வோம். நறுக்குவிசை, வளைதிருப்புமை இரண்டும் செயல்படும் விட்டப்பகுதி ஒன்று படம் 6.8 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. விட்டத்தின்மீது



(i) விட்டத்துண்டு (ii) வெட்டுமுகம்

படம் 6.8

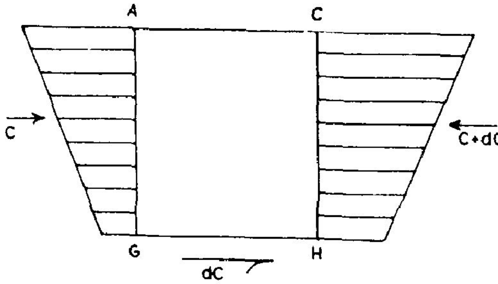
நறுக்குவிசைகளும் செயல்படுவதால் வளைதிருப்புமை நிலையாய் இராது. ஒவ்வொரு வெட்டுமுகத்திலும் வெவ்வேறு அளவில் வளைதிருப்புமைகள் செலுத்தப்படும். படத்தில் AB எனும் வெட்டுமுகத்தின் மீது செயல்படும் வளைதிருப்புமை M எனவும் அதிலிருந்து dx தொலைவில் உள்ள CD எனும் வெட்டுமுகத்தில் செயல்படும் வளைதிருப்புமையை M+dM என்றும் கொண்டு தகைவுகளை ஆய்வோம். தகைவில் அச்சு EF எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. தகைவில் அச்சிலிருந்து d அளவு தொலைவிலுள்ள GH என்னும் தளத்தின்மீது செயல்படும் தகைவுகளை ஆராய்வோம். விட்ட வெட்டுமுகத்தின் உறழ்திருப்புமை I என்றும் கொள்வோம்.

AGEB, CHFD ஆகிய வெட்டுமுகங்களின்மீது செயல்படும் தகைவுகள் படம் 6.8 (i) இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. வெட்டுமுகம் AGEB யில், தகைவில் அச்சிலிருந்து y தூரத்தில் உள்ள

தொரு புள்ளியில் வளைதகைவு $\sigma = \frac{M.y}{I}$. இதே தொலைவில் CGFD யிலுள்ள புள்ளியில் தகைவு $\sigma = \frac{(M + dM)}{I}.y$

இங்கு AG என்ற தளத்தில் dA அளவுப் பரப்புத் துணுக்கின்மீது செயல்படும் விசை $= \frac{M.y}{I} \times dA$

CH என்னும் தளத்தில் இதே பரப்பின்மீது செயல்படும் விசை $= \frac{(M + dM)}{I} \cdot y\,dA.$



படம் 6.9

இங்கு விசைகளின் செயல்பாடு AGHC என்னும் துண்டின் சமநிலையை எவ்வாறு பாதிக்கிறது என்பதனைத் தனியே படம் வரைந்து ஆராய்வோம். (படம் 6.9)

AG, CH என்னும் பரப்புகளின்மீது செயல்படும் மொத்த இறுக்கு விசைகளை முறையே C, − (C + dC) எனக் குறிப்பிட்டுள்ளோம். இவ்விரு விசைகளும் சமனிலையில் இல்லாமையால் C யின் திசையில் dC க்குச் சமமான விசை செலுத்தப்பட வேண்டும். இது தளத்துக்கு இணையாய திசையில் செயல்படுவதனால் இதனை நறுக்குவிசையென இனங் காணலாம்.

முதலில் dC யின் அளவினைக் கணக் கிடுவோம்.

$$C = \int_d^{h_1} \frac{M.y}{I} dA = \frac{M}{I} \int_d^{h_1} ydA$$

அவ்வாறே,

$$C + dC = \frac{(M + dM)}{I} \int_d^{h_1} y.dA$$

எனவே,
$$dC = \frac{dM}{I} \int_d^{h_1} ydA \qquad 6.9$$

சமன்பாடு 6.9 இல் இடம்பெறும் தொகையம், $\int_{d}^{h_1} ydA$ என்பது எதனைக் குறிக்கிறது என்பதில் தெளிவு தேவை. இது படம் 6.8 இல் காட்டப்பட்டுள்ள பரப்பிற்குத் தகைவில் அச்சினை மையமாய்க் கொண்ட திருப்புமை. இப் பரப்பு நாம் எம் மட்டத்தில் நறுக்குத் தகைவு காண விரும்புகிறோமோ (இங்கு GH) அம் மட்டத்திற்கப்பால் விளிம்பு வரையுள்ள வெட்டு முகப் பரப்பாகும். இப் பரப்பிற்குத் தகைவில் அச்சினை மையமாய் கொண்ட திருப்புமை யாதலின் (அஃதாவது $\int_{d}^{h_1} ydA$) $A\bar{y}$ என்னும் குறியீட்டால் வழங்கப்படுகிறது. அதனால், GH என்னும் தளத்தின் மீது செயல்படும் மொத்த நறுக்குவிசை

$$dC = \frac{dM}{I}.A\bar{y} \qquad 6.10$$

இனி இந் நறுக்குவிசை செயல்படும் தளத்தின் பரப்பினைக் காண்போம். இந் நறுக்குவிசை செயல்படும் தளத்தின் நீளவாட்டு அளவு dx என எடுத்துக் கொண்டோம். இதன் அகலம் வெட்டுமுகத்தில் b எனப் படம் 6.8 (ii) இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

எனவே,

$$\text{நறுக்குத் தகைவு} = \frac{\text{நறுக்குவிசை}}{\text{செயல்படுமபரப்பு}}$$

$$\tau_{GH} = \frac{dC}{dx.b} \quad \text{எனலாம்}$$

செலுத்தப்படும் வளைதிருப்புமை நேர்மறையாயிருக்குமெனில் படம் 6.9 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விசைகள் எதிர்மறையாயிருத்தல் வேண்டும். (இறுக்கத்தைக் குறிக்கும் Compression என்னும் சொல்லின் சுருக்கமாகவே C, C + dC முதலிய குறியீடுகள் பயன்படுத்தப் பட்டன). ஆகையால்,

$$\text{நறுக்குத் தகைவு}, \ \tau = \frac{-dC}{dx.b} \quad \text{எனலாம்}$$

$$\text{அஃதாவது} \ \tau_{GH} = -\frac{dM}{I}.\frac{A\bar{y}}{dx.b}$$

$$= -\frac{dM}{dx}.\frac{A\bar{y}}{Ib}$$

இங்கு $-\dfrac{dM}{dx} =$ Q (நறுக்குவிசை) என்னும் உறவினைப் பயன்படுத்த,

$$\tau_{GH} = \frac{Q.A\bar{y}}{Ib}$$ எனப் பெறுகிறோம்.

τ_{GH} எனும் குறியை GHஎனும் தளத்தின்மீது செயல்படும்நறுக்குவிசை என்னும் பொருளிலேயே GH என்பதனைக் கீழடையாய்ப் பயன்படுத்தினோம். தளம், தகைவுகளின் திசைகளைக் கருத, இது y தளத்தின்மீது (அதாவது y அச்சிற்குச் செங்குத்தாய தளத்தின்மீது x திசையில் செயல்படும் தகைவு, அஃதாவது τ_{yx} ஆகும்.

$$\therefore \quad \tau_{yx} = \frac{Q.A\bar{y}}{Ib} \qquad 6.11$$

இணை நறுக்குத் தகைவுகளின் (Complementary Shear Stresses) உறவினைப் பயன்படுத்தி,

$$\tau_{xy} = -\frac{Q.A\bar{y}}{I.b} \qquad 6.12$$

எனப் பெறலாம்.

τ_{xy} . b என்னும் அளவீடு, அஃதாவது $\frac{Q.A\bar{y}}{I}$ என்பது, நறுக்கு வீச்சு அல்லது நறுக்கு ஓட்டம் (Shear Flow) என அழைக்கப்படுகிறது. சமன் பாடு 6.12ஐப் பயன்படுத்தி விட்டங் களில் நறுக்குவிசைப் பரவலை (Shear stress Distribution) ஆராய்வோம்.

எ.கா. 6.7

குறுக்களவுகள், அகலம் b, உயரம் h(செவ்வகம்) கொண்ட தொரு விட்டத்தின் வெட்டு முகம் ஒன்றனில் செலுத்தப்படும் நறுக்கு விசை Q எனில் விட்டத்தின் வெட்டு முகத்தில் நறுக்குத் தகைவுகளின் பரவலை ஆய்க.

தீர்வு:

படம் 6.10 இல் காட்டப்பட்டுள்ள செவ்வக வெட்டு முகத்தில், தகைவில் அச்சிலிருந்து y தொலைவில் உள்ள EF என்னும் தளத்தில் நறுக்குத் தகைவினைக் காண ஒரு கோவையை உருவாக்குவோம்.

சமன்பாடு 6.11 ஐ இங்குப் பொருத்த, தளம் EF க்கு அப்பா லுள்ள பரப்பு = $b \times \left(\frac{h}{2} - y\right)$ இப் பரப்பின் ஈர்ப்பு மையத்தூரம் தளம் AB யிலிருந்து $\frac{\left(\frac{h}{2} - y\right)}{2}$ தகைவில் அச்சிலிருந்து பரப்பின் ஈர்ப்பு மையம்

$$= \frac{h}{2} - \frac{(h/2 - y)}{2} = \frac{(h/2 + y)}{2}$$

எனவே

$$A\bar{y} = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{(h/2 + y)}{2}$$

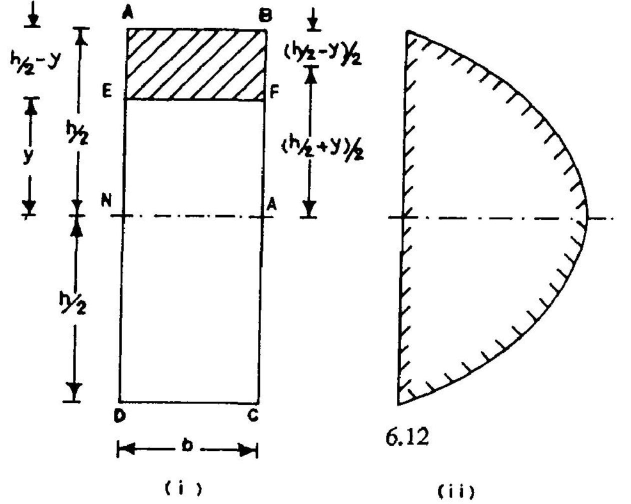
$$= \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)I$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3$$

எனவே, தளம் EF இல்

$$\text{நறுக்குத் தகைவு} = \frac{Q.\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{1}{12}\ b h^3 \times b}$$

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$



படம் 6.10

சமன்பாடு 6.12 ஒருபரவளையத்தின் சமன்பாடு என்பதை நோக்கலாம். இதன் பரவல் படம் 6.10 (ii)-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன் உச்சமதிப்பு y = 0 ஆக இருக்கும் தளத்தில், (அஃதாவது, தகைவில் தளத்தில் இருக்கும் என்பது சமன்பாடு (6.12) ஐ நோக்கப் புலப்படும்.)

நறுக்குத் தகைவின் உச்ச மதிப்பு $\tau_{max} = \frac{6Qh^2}{4bh^3} = \frac{1.5\,Q}{bh}$ இங்கு $\frac{Q}{bh}$ என்பது சராசரி நறுக்குத் தகைவு. இதனை τ_{av} என்னும் குறியீட்டால் உரைக்க, $\tau_{max} = 1.5 \cdot \tau_{av}$ எனக் காண்கிறோம்.

எ.கா. **6.8**

படம் 6.11 (i) இல் காட்டப்பட்டுள்ள I வடிவ வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டத்தில், நறுக்குவிசை Q = 106.16kN எனில், வெட்டுமுகத்தில் நறுக்குத் தகைவின் பரவலைக் காண்க.

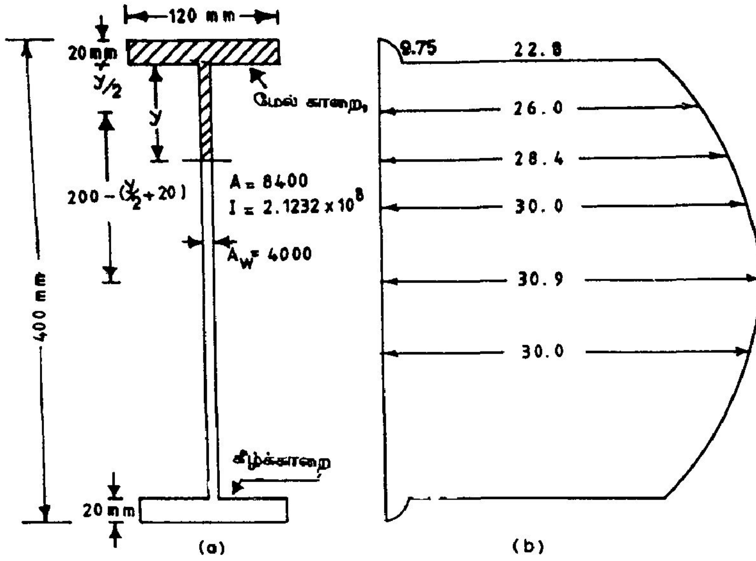
தீர்வு:

வெட்டுமுகப் பரப்பு $= 2 \times 120 \times 20 + 360 \times 10 = 8400\ mm^2$

வெட்டுமுக உறழ்திருப்புமை $= \frac{1}{12}\,(120 \times 400^3 - 110 \times 360^3)$

$= 2.1232 \times 10^8\ mm^4$

முதலில் மேல்காரையில் தகைவுகளைக் கணக்கிடுவோம்:



படம் 6.11

மேல்விளிம்பிலிருந்துy தொலைவிலுள்ள தொடுதளத்தில்

$$A = 120 \times y$$

$$\bar{y} = 200 - \frac{y}{2}$$

$$\therefore \quad A\bar{y} = 120y\left(200 - \frac{y}{2}\right) = 60y\,(400 - y)$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{F\,A\bar{y}}{Ib} = \frac{106160}{2.1932 \times 10^{8}} \times \frac{60\,y}{10}\,(400 - y)$$

$$= .0025 \times y(400-y) \qquad 6.13$$

மேல்விளிம்பில், (y = 0), $\tau = 0$

மேல்காறை முடியும் தளத்தில், y = 20

$$\tau = .00025 \times 20 \times (400-20) = 1.9 \text{ N/mm}^2$$

மேல்காறையில் இடைப்பட்ட தளங்களில் நறுக்குத் தகைவில் மாறுபாடுகள், பரவளையத் தன்மை கொண்டு விளங்குதலைச் சமன்பாடு (6.13) சுட்டுகிறது.

இனி அகடு (Web) பகுதியில் தகைவுகளைக் கணக்கிடுவோம். மேல்விளிம்பிலிருந்து y+20mm (அகட்டுப் பகுதியின் உச்சியிலிருந்து y mm) தொலைவிலுள்ளதொரு தளத்தில் தகைவுகளை நோக்குவோம்.

இங்கு,

$$A = 120 \times 20 \times + y \times 10$$

$$A\bar{y} = 120 \times 20 \times (200\text{-}10) + y \times \left(200 - \left(\frac{y}{2} + 2\right)\right)$$

$$= 456000 + y\left(180 - \frac{y}{2}\right)$$

எனவே,

$$\tau = \frac{106160}{2.1232 \times 10^8 \times 10} (45600 + y\ (180 - \frac{y}{2}))$$

$$\tau = 0.00025\ (91200 + y\ (360 - y)$$

பல்வேறு தளங்களிலும் நறுக்குத் தகைவுகள், கீழ்வரும் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன.

y mm	0	40	80	120	160	180	200	240	280	320	360
τ N/mm^2	22.8	26.0	28.4	30.0	30.8	30.9	30.8	30.0	28.4	26.0	22.8

y = 180 என்பது தகைவில் தளத்தைச் சுட்டுகிறது. இத் தளத்தில் நறுக்குத் தகைவு உச்ச மதிப்புப் பெற்றிருத்தலையும், நறுக்குத் தகைவு வரைவு தகைவில் அச்சிற்கு இருபுறமும் சீர்மை கொண்டு விளங்குவதையும் நோக்கலாம். வரைவு படம் 6.11 (b) இல் தரப்பட்டுள்ளது. காறை யும் அகடும் சந்திக்கும் இடங்களில் திடீரென அகலம் மாறுவதால் காறைப் பகுதியிலும், அகடுப் பகுதிதயிலும் வெவ்வேறு அளவில் நறுக்குத் தகைவு தோன்றுதலை நோக்குக.

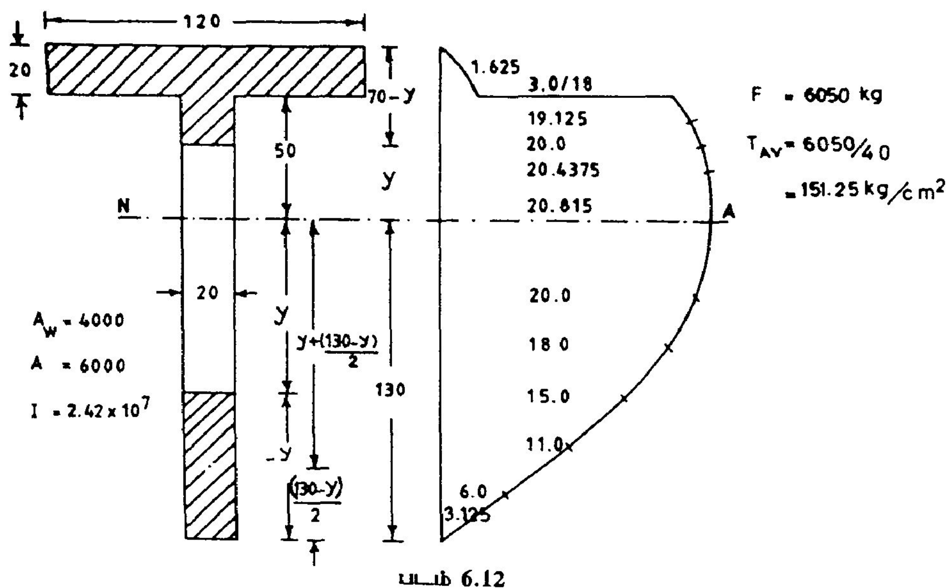
எ.கா. **6.9**

படம் 6.12 இல் காட்டப்பட்டுள்ள T வடிவ வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டத்தின்மீது செயல்படும் நறுக்குவிசை 60.5 kN எனில் விட்டத்தில் நறுக்குத் தகைவுப் பரவலை வரைக.

தீர்வு:

வெட்டுமுகத்தினை, காறை, அகடு என இரண்டு தனித் தனி செவ்வகங்களின் இணைப் பாகக் கருதி வடிவப் பண்புகளைக் கணக்கிடுவோம். y அச்சிற்கு இருபுறமும் வடிவச் சீர்மை விளங்குவதால்,

$\bar{y}$ காண, அகட்டின் (Web) அடிவிளிம்பு ஒட்டிய திறன்களைக் கருதுவோம்.



படம் 6.12

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{120 \times 20 \times 190 + 180 \times 20 \times 90}{120 \times 20 + 180 \times 20} = 130\text{mm.}$$

$$I = \frac{1}{12} \times 120 \times 20^3 + 2400 \times 60^2 + \frac{1}{12} \times 20 \times 180^3 + 3600 \times 40^2$$

$$= 2.420 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{F}{I}\,\frac{A\bar{y}}{b} = \frac{60500}{2.420} \times \frac{1}{10}\,A\bar{y} = .0025\,\frac{A\bar{y}}{b}$$

தகைவில் அச்சிலிருந்து மேற்பகுதியில் y தொலைவில் உள்ள தளத்தில் நறுக்குத் தகைவு காண,

(1) தளம் காறைப் பகுதியிலிருப்பின்,

$$b = 120 \text{ mm}$$

$$A = (70 - y) \times 120$$

$$\bar{y} = 70 - \frac{(70-y)}{2} = \frac{70+y}{2}$$

$$A\bar{y} = (70 - y)\ 120 \times \frac{(70+y)}{2} = 60\ (70^2 - y^2)$$

எனவே நறுக்குத் தகைவு,

$$\tau = .0025 \times 60\ \frac{(4900 - y^2)}{120} = .00125\ (4900 - y^2)$$

$$\tau_{y=0} = 0$$

$$\tau_{y=60} = .00125\ (4900 - 60^2) = 1.625\ N/mm^2$$

$$\tau_{y=50} = .00125\ (4900 - 50^2) = 3.0\ N/mm^2$$

இனி, தகைவு கணக்கிட வேண்டிய தளம் அகடுபகுதியில் இருக்குமெனின், கீழ் விளிம்பிலிருந்து குறிப்பிட்ட தளம் வரையுள்ள பரப்பின்திருப்புமை கணக்கிட்டும் பெறலாம். இத் தளம் தகைவில் தளத்துக்குக் கீழே y தொலைவில் இருக்குமெனில்,

$$b = 20mm$$

$$A = (130 - y)\ 20\ mm^2$$

$$\bar{y} = y + \frac{(130-y)}{2} = \frac{(130+y)}{2}\ mm$$

எனவே, தகைவு $= .0025 \times 2\ \frac{(130 - y)}{2}\ \frac{(130 + y)}{2}$

$$\tau = .00125\ (130^2 - y^2)$$

தகைவில் தளத்துக்கு மேலேயுள்ள தளங்களில் தகைவுகளைக் கணக்கிடச் சமன்பாடு 6.12 இல் y இன் மதிப்பு – ve ஆகக் கொள்ளலாம்; எனினும், y^2 இன் மதிப்பு மாறாது. பல்வேறு தளங்களில் தகைவுகள் பட்டியலாய்க் கீழே தரப்படுதலொடு படம் 6.12 (b) இல் வரைபடமாகவும் தரப்படுகின்றன.

y mm	130	110	90	70	50	30	20	0
$\tau\ N/mm^2$	0	6.0	11.0	15.0	18.0	20.0	20.625	21.125

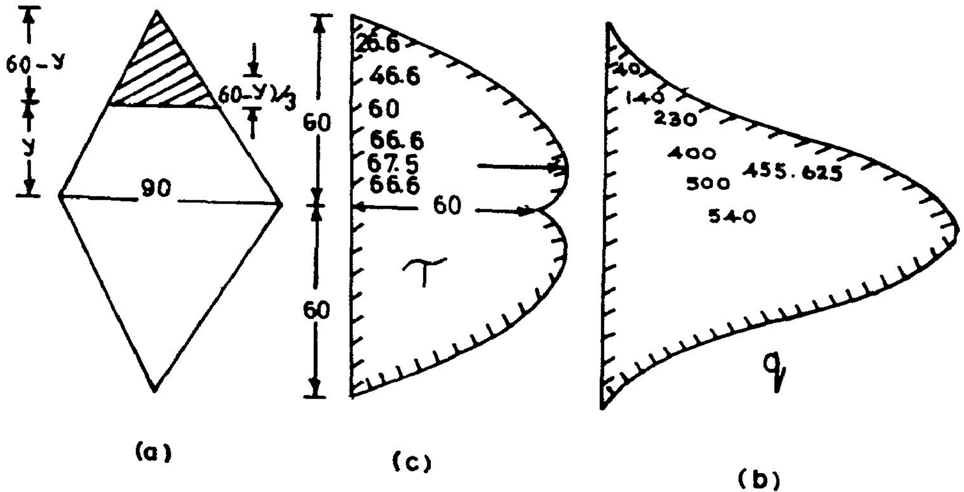
y mm	– 20	– 30	– 50	– 50	– 60	– 70
$\tau\ N/mm^2$	20.625	20.0	18.0	3.0	1.625	0

கடந்த எடுத்துக்காட்டுகள் அனைத்திலும் சீரான அகலமுள்ள அகடு (Web) கொண்ட வெட்டுமுகங்களை ஆய்ந்தோம். இவ் வெட்டுமுகங்களில் உச்ச நறுக்குத் தகைவு தகைவில் அச்சில் தோற்றுவிக்கப்படலை கண்டோம். ஒரு குறிப்பிட்ட தளத்தின் $A\bar{y}$ கண்டுபிடிக்க அத் தளத்திற்கு மேலுள்ள பரப்பு அல்லது கீழுள்ள பரப்பு இரண்டில் எதனை எடுத்துக் கொண்டாலும் ஒரே மதிப்புதான் கிட்டும் என்பதையும் காணமுடியும். தகைவில் தளத்திலேயே $A\bar{y}$ க்கு உச்ச மதிப்பு இருக்கக் காணலாம். Q, I இரண்டும் மாறிலிகள் ஆகலின், $\frac{Q}{I} A\bar{y}$ அஃதாவது நறுக்கோட்டம் q தகைவில் தளத்திலேயே உச்ச மதிப்பு கொண்டு விளங்கக் காண்கிறோம். அதனால் அகலம் b சீராக இருக்கும் வெட்டுமுகங்களில், நறுக்குத் தகைவு தகை வில் தளத்திலேயே உச்சமாயிருப்பதைக் காணலாம்.

மாறாய், அகலம் சீராயில்லாத வெட்டுமுகங்களில் நறுக்குத் தகைவு எவ்வாறு தோற்றுவிக்கப்படுகிறதென்பதனை இனிக் காண்போம்.

எ.கா 6.10

படம் 6.13 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வெட்டுமுகங்கொண்ட விட்டத்தின் மீது 48.6 kN நறுக்குவிசை செலுத்தப்பட்டால் தோற்றுவிக்கப்படும் நறுக்குத் தகைவு பரவலைக் காண்க.



படம் 6.13

தகைவில் அச்சிலிருந்து y mm தொலைவில் உள்ளதொரு தளத்தினைக் கருதுவோம். இதன் அகலம் b எனில்

$$\frac{b}{90} = \frac{60-y}{60}$$ என்னும் முக்கோணப் பண்பினைப் பயன்படுத்த

$$b = \frac{90(60-y)}{60} = 1.5\ (60-y)$$

$$A = b \times (60-y)/2 = 1.5\ (60-y)\ (60-y)/2 = 0.75\ (60-y)^2$$

$$\bar{y} = \frac{(60-y)}{3} + y = \frac{(60+2y)}{3}$$

$$I = 2 \times \frac{1}{12} \times 90 \times 60^3 = 3.24 \times 10^6\ mm^4$$

$$Q = 48.6kN = 48600\ N$$

நறுக்கோட்டம் , $$q = \frac{QA\bar{y}}{I} = \frac{48600}{3.24 \times 10^6}\ \frac{0.75(60-y)^2\ (60+2y)}{3}$$

$$= 0.00375\ (60-y)^2\ (60+2y)$$

நறுக்குத் தகைவு $$\sigma = \frac{q}{b} = \frac{.00375\ (60-y)^2\ (60+2y)}{1.5\ (60-y)}$$

$$= 0.0025\ (60-y)\ (60+2y)$$

$$\tau = 2.5 \times 10^{-3}\ (60-y)\ (60+2y)$$

இவ் விடைகளைப் பட்டியலாய் எழுதுவோம்.

y mm	60	50	40	30	20	10	0	15
q N/m	0	60	210	405	600	750	810	683.44
τ N/mm^2	0	4	7	9	10	10	9	10.125

சமச்சீர்மை காரணமாக y = –10, –20, ... ஆகிய தளங்களில் நறுக்கொட்டமும் நறுக்கு விசையும் y – 10, 20, . . . ஆகிய தளங்களின் மதிப்பெண்களையே பெறும்)

நறுக்குத் தகைவு உச்சமாயுள்ள தளத்தைக் காண,

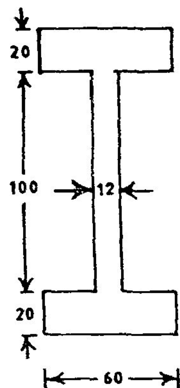
$$\frac{d\tau}{dy} = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,y = 15 என்ற தளத்தில் நறுக்குத் தகைவு உச்சமாயிருக்குமென்பதைக் காணலாம்.

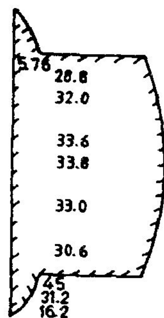
$$\tau_{y=15} = 10.125$$

பயிற்சிகள்:

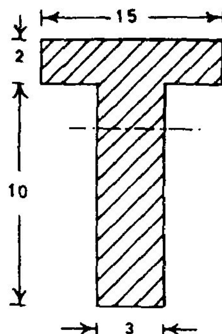
6.1. படம் 6.14இல் காட்டப்பட்டுள்ள வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டமொன்றன்மீது உச்ச நறுக்குவிசை Q = 38.88kN செயல்படும் வெட்டுமுகத்தில நறுக்குத் தகைவு பரவலைக் காண்க. (விடை படம் 6.15)



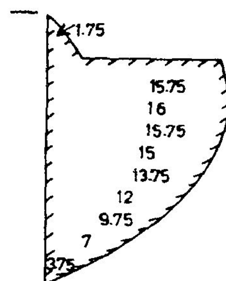
படம் 6.14



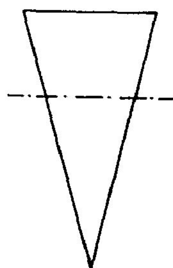
படம் 6.17



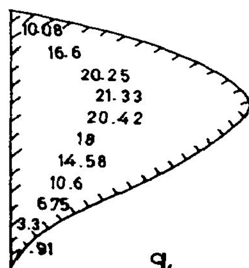
படம் 6.15

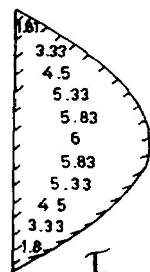


படம் 6.18



படம் 6.16





படம் 6.19

6.2. படம் 6.16 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டத்தில் நறுக்குவிசை Q = 400 kN செயல்படும் வெட்டுமுகத்தில் நறுக்குத் தகைவின் பரவலைக் காண்க. (விடை படம் 6.17)

6.3. படம் 6.18 இல் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு முக்கோண வடிவ வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டத்தின் ஒருவெட்டுமுகத்தின்மீது செயல்படும் நறுக்குவிசை, Q = 144 kN எனில், அவ் வெட்டுமுகத்தில், நறுக்குத் தகைவுகள், நறுக்கோட்டங்கள் இவற்றின் பரவலைக் காண்க. (விடை : படம் 6.19)

எ.கா. 6.11

படம் 5.30 இல் காட்டப்பட்டு விட்டமொன்றனை வளைவலிமை $12N/mm^2$, நறுக்குவலிமை, $3.5\ N/mm^2$ கொண்டதொரு மரத்தினால் செவ்வக வடிவில் அமைக்க வேண்டு மெனில் தேவைப்படும் வெட்டுமுக அளவீடுகளைக் கணக்கீடுக.

தீர்வு:

விட்டத்தில் உச்ச வளைதிருப்புமை = 7.5 kNm

$= 7.5 \times 10^6$ Nmm

விட்டப் பொருளின் வளைவலிமை = $120\ N/mm^2$

தேவையான வெட்டுமுகக் கெழுZ $= \dfrac{7.5 \times 10^6}{12}$

$= 6.25 \times 10^5\ mm^3$

$\dfrac{bd^2}{6} = 6.25 \times 10^5\ mm^3$

$\therefore\ bd.d = 3.75 \times 10^6\ mm^3$

உச்ச நறுக்குவிசை = 9kN = 9000N

நறுக்கு வலிமை = $3.5\ N/mm^2$

உச்ச நறுக்குத் தகைவு $= \dfrac{9000}{bd} \times 1.5 = 3.5$

$\therefore\ bd = \dfrac{9000 \times 1.5}{3.5} = 3867\ mm^2$

$\therefore\ d = \dfrac{bd.d}{bd} = \dfrac{3.75 \times 10^6}{3867} = 967.7mm$

$b = \dfrac{3867}{967.7} = 3.9856\ mm$

அகலம் 4 mm, உரயம் 970 mm கொண்ட செவ்வக வடிவ விட்டம் என்பது விடை ஆனால், விட்டத்தின் அகல உயர விகிதங்கள் ஏற்றனவாயில்லாமையால் இவ் விடையை விடுத்து அகலத்தை உயரத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட பின்னமாகக்கொண்டு வளைவலிமை முழுமையாகப் பயன்படுமாறு வடிவமைப்புச் செய்து நறுக்குத் தகைவு நறுக்கு வலிமையை விஞ்சா மலிருக்கிறதா என்பதனைமட்டும் கணக்கிட்டுப் பார்த்துக் கொண்டாற்போதும். இம் முறையில்,

b = 0.3 d எனக் கொண்டு மாற்று வடிவமைப்புச் செய்வோம்.

$$Z = \frac{1}{6} bd^2 = \frac{1}{6} \times 0.3\,d^3 = 6.25 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

$$d = \sqrt[3]{6.25 \times 10^5 \times \frac{6}{0.3}} = 232 \text{ mm}$$

$$b = 0.3 \times 232 = 69.6 \text{ mm}$$

70mm× 235 mm அளவில் விட்டத்தினைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்

$$\text{நறுக்குத் தகைவு} = \frac{9000 \times 1.5}{235 \times 70} = 0.8206 \text{ N / mm}^2$$

பயிற்சி

b = 0.4 d எனக் கொண்டு மாற்று வடிவமைப்புச் செய்து உச்ச நறுக்குத் தகைவினைக் கணக்கிடுக.

(விடை: b = 85mm, d = 211mm, τ_{max} = 0.753 N/mm^2)

விட்டங்களின் வடிவமைப்பில் போதிய பயிற்சி பெற்றார்க்கு வடிவமைப்பிற்கு முதன்மையாய கூறு பெரும்பாலும் வளைவலிமையே என்பது விளங்கும். எனவே வளைவலிமையின் அடிப்படையில் வெட்டுமுகம் ஒன்றினைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டு, நறுக்கு வலிமைக்குக் குறைவாக உச்ச நறுக்குத் தகைவு உள்ளதா என்பதனைச் சோதித்தலே நடைமுறையாயிருக்கிறது. மேலும், நறுக்குத் தகைவின் சரியான பரவலை ஆய்வதைவிட, சராசரி நறுக்குத் தகைவினைக் கணக்கிடுதல் எளிது. அதனால், உச்ச நறுக்கு வலிமைக்கு மாற்றாய்ச் சராசரி நறுக்குவலிமை (இஃது உச்ச நறுக்கு விசையில் ஒரு பின்னமே) யையே வடிவமைப்பிற்கு அடிப்படையாய்க் கொள்ளலும் வடிவமைப்பு மரபுகளில் ஒன்றாகும். மேலும் ஒருமரபு, உருட்டுவிட்டங்களில் காறை (Flange) களின் அகலத்தையும், அகட்டின் அகலத் துக்குச் சமமாகவே கொண்டு நறுக்குத் தகைவினைக் கணக்கிடலாகும்.

எ.கா. **6.12**

படம் 5.40 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்திற்கு வளைவலிமை 150 N/mm^2 சராசரி நறுக்குவலிமை 94 N/mm^2 கொண்ட உருட்டு உருக்குவிட்டம் ISLB 350 பயன்படுத்தப் பட்டால் தகைவுகள் வலிமையை மிகாதுள்ளனவா என்பதனைக் காண்க. (உருட்டு விட்டத்தின் எடை புறக்கணிக்கப்படலாம்).

தீர்வு :

விட்டத்தில் உச்ச வளைதிருப்புமை = 98.73kN.m.

= 9.873×10^7 N.mm

உச்ச நறுக்குவிசை = 40 kN = 40000 N

செந்தரப் பட்டியலிலிருந்து ISLB 350 இன் வெட்டுமுகப் பண்புகளைப் பெறலாம்.

வெட்டுமுகத்தின் உயரம் h = 350mm

அகட்டின் அகலம் t_w = 7.4 mm

வெட்டுமுகக் கெழு Z_{xx} = 7.519×10^5 mm^3

இவற்றிலிருந்து,

வளை தகைவு $\sigma_b = \frac{M}{z} = \frac{9.873 \times 10^7}{7.519 \times 10^5}$

$= 131.31\ N/mm^2 < 150\ N/mm^2$

சராசரி நறுக்குத் தகைவு $= \frac{Q}{h.t_f} = \frac{40000}{350 \times 7.4}$

$= 15.44\ N/mm^2 < 94\ N/mm^2$

தகைவுகள் வலிமையை விஞ்சவில்லை என்பதனைக் காண்கிறோம். அதனால், ISLB350 பயன்படுத்தப்படலாம்.

பயிற்சிகள்:

6.4 அகலம் 120mm, உயரம் 200mm கொண்ட இருபக்க முக்கோண வெட்டுமுகம் கொண்ட மரவிட்டமொன்று படம் 5.33இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்திற்குப்

பயன்படுத்தப்பட்டால், தோற்று விக்கப்படும் உச்ச வளைதகைவுகள், நறுக்குத் தகைவுகள் இவற்றைக் கணக்கிடுக.

6.5 படம் 5.36இல் காட்டப்பட்டுள்ள எளிமை தாங்கி விட்டத்திற்கு வளைவலிமை $12N/mm^2$ கொண்ட மரமொன்றால் வட்ட வடிவ வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டம் தேவைப்படும் எனில், இதற்குரிய வடிவமைப்பினைச் (Design) செய்து, விட்டத்தில் உச்ச நறுக்குத் தகைவினைக் கணக்கிடுக.

6.6 பயிற்சி 6.5இல் தரப்பட்டுள்ள விட்டத்தினை அரைவட்ட வடிவில் வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டமாய் வடிவமைப்புச் செய்து, முந்தைய வடிவமைப்புடன் ஒப்பிடுக.

6.7 படம் 5.39இல் காட்டப்பட்டுள்ள ஒருமுனை தொங்குவிட்டத்திற்கு உருட்டு உருக்கு ISMB 500 விட்டம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. உருக்கின் வளைவலிமை $150N/mm^2$, சராசரி நறுக்கு வலிமை $94.5\ N/mm^2$ எனில், படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள சுமைகள், விட்டத்தின் தன்னெடை இவை தவிர, விட்டத்தின்மீது மேலும் எவ்வளவு சீர்பரவுசுமை செலுத்த முடியும்?

6.8 வெளிவிட்டம் 250 mm, உள்விட்டம் 240 mm கொண்டதொரு இரும்புக் குழாய், 6m தொலைவிலுள்ள இரண்டு எளிய தாங்கிகள் மீது பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இரும்பின் தன்னெடை $77\ kN/m^2$ வளைவலிமை $120N/mm^2$ எனில், விட்டத்தின்மீது, ஒரு தாங்கியிலிருந்து 2.4m தொலைவிலுள்ள வெட்டுமுகத்திற் செலுத்தப்படக் கூடிய குவிசுமையின் உச்சமதிப்பினைக் கணக்கிடுக.

6.9 படங்கள் 5.45, 5.46, 5.48, 5.50 ஆகியவற்றில் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டங்களை உருட்டுஉருக்கால் வடிவமைப்புச் செய்க. வளைவலிமை $150N/mm^2$, சராசரி நறுக்கு வலிமை $94\ N/mm^2$ எனக் கொள்க.

6.4 சீராய வலிமை கொண்ட விட்டங்கள்

இதுவரை எடுத்துக்காட்டுகளிலும், பயிற்சிகளிலும் கண்ட வடிவமைப்புகளில் நாம் நோக்க வேண்டிய கூறு ஒன்று உண்டு. அஃதாவது, விட்டத்திற்கு வேண்டிய வெட்டு முகத்தினை நாம் விட்டத்தில் தோற்றுவிக்கப்படும் உச்ச வளைதிருப்புமை, உச்ச நறுக்கு விசை ஆகியவற்றைத் தாங்கக் கூடிய விதத்தில் அமைக்கிறோம். பல வடிவமைப்புகளில் இவ் வெட்டுமுகத்தையே சீராக விட்டத்தின் முழு நீளத்திலும் அமைக்கிறோம். இது தேவைதானா? எடுத்துக்காட்டு 6.11இல் நாம் வடிவமைத்த விட்டத்தினை நோக்குவோம். இதில் E என்னும் வெட்டுமுகத்தில் செயல்படும் வளைதிருப்புமை, 7.5 kNm ஐத் தாங்குதற்குரிய விட்டத்தினை வடிவமைத்துள்ளோம். ஆனால், மற்ற வெட்டுமுகங்களிலெல்லாம் இதற்கும் குறைவான வளைதிருப்புமையே இருக்கக் காண்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக C என்னும் வெட்டுமுகத்தில் வளைதிருப்புமை 6 kNm தான், D என்னும் வெட்டுமுகத்திலோ வளைதிறன் 0 தான். இங்கெல் லாம்கூட 70mm × 230mm அளவுகள் கொண்ட செவ்வக வெட்டுமுகத்தையே பயன்படுத்தல் பொருள் விரயமன்றோ? (நறுக்கு விசையும் அவ்வாறே பெரும்பாலான வெட்டு முகங்களில்

உச்ச மதிப்புக் குறைவாகவே இருப்பது கண்கூடு; எனினும், நறுக்குவிசை உச்சமாயிருக்கும் வெட்டுமுகங்களிலும்கூட நறுக்கு வலிமையைவிட மிகக் குறைவான நறுக்குத் தகைவே தோற்றுவிக்கப்படுதலைக் காணலாம். ஆனால், வடிவமைப்புகள் செய்வதில் வளைதிருப்பு மையே தலைமைக் கூறாயிருத்தலின் நறுக்குவிசைகளைப்பற்றி இப்போது கவனம் தேவையில்லை).

சிறிய வடிவமைப்புகளில், பொருள் விரயத்தைப் பாராமல், சீராய வெட்டுமுகங்கொண்ட விட்டங்களை அமைப்பது வழக்கம். சில சூழ்நிலைகளில் இதனைத் தவிர்க்கவும் முடியாது. ஆனால், பெரிய வடிவமைப்புகளில் முடிந்தவரை சிக்கனம் தேவையன்றோ? இத்தகு சூழ்நிலைகளில், பொருள் மிச்சம் செய்வதில் கையாளப்படும் உத்திக்கு ஓர் எடுத்துக் காட்டினைக் காண்போம்.

எ.கா 6.13

படம் 5.46இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்திற்கு உருட்டு உருக்கால் விட்டம் வடி வமைக்க முற்படுவோம். அனுமதிக்கப்படும் வளைவலிமை 145 N/mm^2 எனக் கொள்வோம்.

உச்ச வளைதிருப்புமை $= 416.453$ kN.m. $= 4.1645 \times 10^6$ N.mm.

வளைவலிமை $= 145 \times N/mm^2$

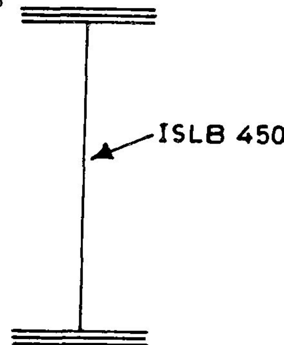
எனவே, தேவைப்படும்

வெட்டுமுகக்கெழு $Z = \dfrac{4.16453 \times 10^6}{145}$

$= 2.9123 \times 10^6 \ mm^3$

IS செந்தரப் பட்டியலில் தேடும்போது, Z = $3060cm^2$ கொண்டு விளங்கும் உருட்டு விட்டம் ISMB 600 இதற்குப் பொருத்தமாயிருக்குமெனக் காண்கிறோம். ஆனால், இதனையே விட்டத்தின் முழுநீளத்திற்கும் பயன்படுத்துதல் தேவையற்ற பொருள்விரயம் அல்லவா? அதனால் மாற்று வடி வமைப்பு ஒன்று காண்போம்.

படம் 6.20a இல் காட்டியுள்ளவாறு ISLB 450 உருட்டு விட்டத்துடன், இரு காறைகளிலும் 200mm × 10mm தகடுகள் இரண்டிரண்டு பற்ற வைக்கப்பட்டுள்ள கூட்டு வெட்டுமுகத்தை நோக்குவோம்.



படம் 6.20 (a)

கூட்டு வெட்டுகத்தின் உறழ்திருப்புமை,

$$I_{xx} = 7.1742 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

வெட்டுமுகக்கெழு $Z_{xx} = 2.9283 \times 10^6 \text{ mm}^3$

இவ் வெட்டுமுகமும் பயன்படுத்ததற்கு ஏற்றதே. மேலும் ISMB 600 ஐப் போலன்றி, இவ் வெட்டுமுகத்தைப் பயன்படுத்தலின் மற்றொரு நன்மையும் உண்டு. அஃதாவது, உருட்டு விட்டத்தின்மீது பற்றவைக்கப்படும் கூடுதல் தகடுகள் . விட்டத்தின் முழுநீளத்திற்கும் தேவையில்லை. அதனால், தேவையற்ற இடங்களில் இவை இரண்டையுமோ ஒன்றை மட்டுமோ வெட்டி விடலாம். எங்கு வெட்டுவது என்பதுபற்றிக் கீழ்க் காணும் கணக்கீடுகள் விளக்கம் தரும்.

இருபுறமும் ஒவ்வொரு தகடு மட்டுமே கொண்டு வெட்டுமுகத்தின் உறழ்திருப்புமை $= 4.86994 \times 10^8 \text{ mm}^4$

இருபுறமும் ஒவ்வொரு தகடு மட்டுமே கொண்ட வெட்டுமுகத்தின் வெட்டுமுகக் கெழு $Z_{xx} = 2.0723 \times 10^6 \text{ mm}^3$

இவ்வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டத்தின் வளை வலிமை (Resisting Moment) $M_r = 2.0723 \times 10^6 \times 145 \times 10^{-6}$

$= 296.34$ kN.m.

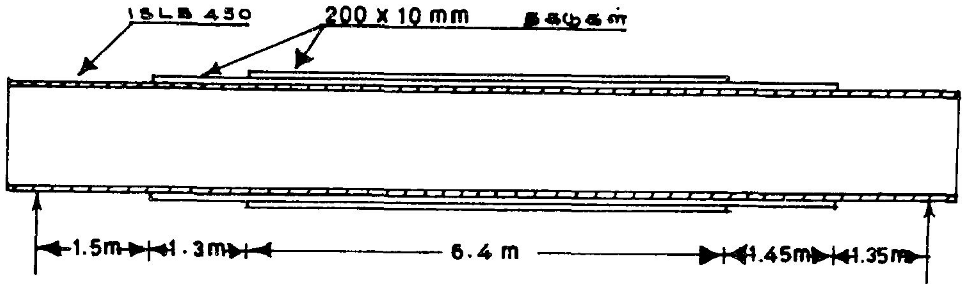
தனி உருட்டுவிட்டத்தின் வளை வலிமை $= 1.2238 \times 10^6 \times 145$

$= 177.45$ kNm

எனவே, விட்டத்தில் வளைதிருப்புமை 296.34 kN.m க்கும் அதிகமாயுள்ள இடங்களில் மட்டும் முழுக்கூட்டுவிட்டத்தை அமைத்து, வளைதிருப்புமை 177.45 kNm க்கும், 296.34 kN.m க்கும் இடையிலுள்ள பகுதிகளில் காறைக்கு (Flange) ஒருதகடுமட்டுமே பற்ற வைக்கப்படும் கூட்டு விட்டத்தையும் வளைதிருப்புமை 177.45 kNm க்கும் குறைவாயுள்ள பகுதிகளில் வெறும் ISLB 450 விட்டம் மட்டுமேயுள்ள அமைத்தாற்போதும். இவ்வாறு அமைக்கப்படும் விட்டத்தின் நீளவாட்டுத் தோற்றம் படம் 6.20.b இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இவ் எடுத்தக்காட்டில், தேவையில்லாத இடங்களில், வெட்டு முகத்தின் ஒருபகுதியைக் குறைத்து எவ்வாறு பொருட் சிக்கனம் செய்ய முடியும் எனக் கண்டோம். ஆனால், இதில்

முழுமையாய சிக்கனம் எய்தவில்லை. முழுமையாய சிக்கனத்தை அடையவேண்டுமெனில், ஒவ்வொரு வெட்டுமுகத்திலும் எவ்வளவு வெட்டுமுகக்கெழு தேவைப்படுகிறதோ, சரியாய் அதே அளவில் மட்டும் இருக்குமாறு அமைப்பின் முழுமையாய சிக்கனம் கிட்டும். இவ்வாறு அமைக்கப்படும் விட்டங்களையே, **சீரான வலிமை கொண்ட விட்டங்கள்** (Beams of Uniform strength) என அழைக்கிறோம். உரைத்தற்கு எளிதாயினும் நடைமுறையில் இவ் வகையில் விட்டங்களை அமைப்பது மிகக் கடினம். ஆயிலும், சீரான வலிமை கொண்ட விட்டத்திற்குரிய அளவீடுகளை அறிந்து கொள்ளல், ஓரளவிற்குத் தோராயமாய்ச் சிக்கன அளவீடுகளைப் பெற உதவியாயிருக்கும் என்பதில் ஐயமில்லை. சில எளிய எடுத்துக்காட்டுகளை நோக்குவோம்.



படம் 6.20.b. கூட்டு விட்டம்

எ.கா. 6.14

4m நீட்டம் கொண்ட துருத்துவிட்டம் ஒன்றன்மீது 6kN/m சீர்பரவு சுமை செலுத்தப் படுகிறது. வளைவலிமை 8 N/mm^2 கொண்டதொரு மரத்தினால் சீரான வலிமை கொண்ட விட்டமாய் வடிவமைக்க.

தீர்வு:

விட்டத்தில் சுமை 6 kN/m = 6,000 N/m

விட்டத்தில் வளைதிருப்புமை $M_x = \dfrac{wx^2}{2}$

$= \dfrac{6}{2}x^2 = 3x^2$

விட்டப் பொருளின் வளைவலிமை $= 8\ N/mm^2$

எனவே தொங்குமுனையிலிருந்து
x தொலைவில் தேவைப்படும்
வெட்டுமுகக்கெழு $Z_x = 3x^2/8$

$$= 0.375\,x^2$$

அஃதாவது, $\left(\frac{bd^2}{6}\right) = 0.375\,x^2$

இங்கு விட்டத்தின் அகலம் b_x எனவும் உயரம் d_x எனவும் கொள்ள, $b_x d_x^{\,2} = 2.250\ x^2$ என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது. இத் தீர்வுச் சமன்பாட்டுக்கு எண்ணற்ற பல விடைகள் இருக்க முடியும். ஆனால், நாம் ஏதாவதொருவகையில் அளவீடுகளைத் தேர்ந்தெடுத்து, அகலத்தை மாறாமல் வைத்துக்கொண்டு, உயரத்தைத் தேவைப்படும் வெட்டுமுகக் கெழுவிற்கு ஏற்ற வகையில் மாறச் செய்யலாம். அதனால்,

$$b\,d_x^{\,2} = 2.25\,x^2$$

b இன் அளவினை முடிவுசெய்யப்பட்ட அதிகபட்ச உயரத்தில் மூன்றிலொரு பங்கு என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$b.d^2_{max} = \frac{d^3_{max}}{3} = 2.25 \times 4000^{\,2}$$

எனவே, அதிகபட்ச உயரம் $d_{max} = \sqrt[3]{2.250 \times 4000^2 \times 3}$

$$= 476\ mm$$

அகலம் $b = \frac{476}{3} = 158.7\ mm$

$= 160mm$ எனக் கொள்வோம்.

எனவே,

$$160\,d_x^2 = 2.25\,x^2$$

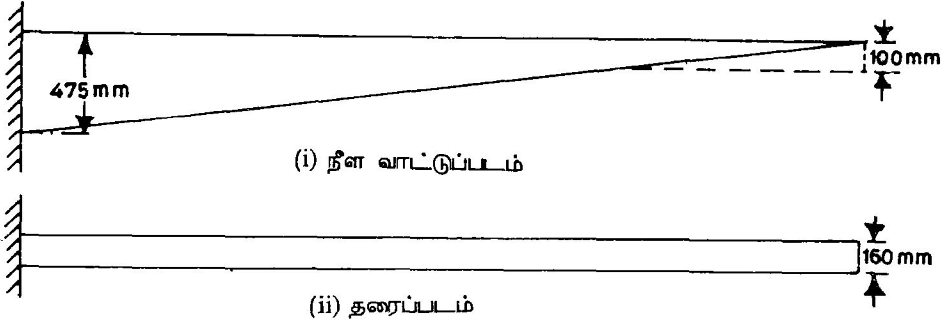
$$d_x = \sqrt{\frac{2.25}{160}x^2} = 0.1186\ x$$

தாங்கியில் விட்ட உயரம் $= 0.1186 \times 4000 = 475mm$

விட்டத்தின் வடிவமைப்பினைப் படம் 6.21 இல் நோக்குக.

சீரான வலிமை கொண்டவிட்டத்திற்குரிய அளவீடுகளைக் கணக்கிட்டுக் கொண்டபின் குறைந்தபட்ச உயரம் ஏதாவது இருக்க வேண்டும் எனக் கருதினால் தேவைக்குமேல்

வேண்டியவற்றை சேர்த்துக்கொள்ளலாம். இங்குத் தரப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில் குறைந்த பட்ச உயரம் 100 mm இருப்பதற்குத் தேவையான கூடுதல் பகுதியும், படம் 6.21 (i) இல் இடை விட்ட கோடுகளால் (discontinuous lines) காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 6.21 சீரான வலிமை கொண்ட விட்டம்

பயிற்சிகள்:

6.10 எ.கா. 6.14 இல், உயரம் சீராய் 400 mm உம் அகலம், 100mm க்குக் குறையாமலும் இருக்குமாறு, சீராய வலிமை கொண்ட விட்டம் வடிவமைக்க.

6.11 எ.கா. 6.11 இல் தரப்பட்டுள்ள விட்டத்தின்மீது தொங்கு முனையில் 10kN விசையும் கூடுதலாகச் செயல்படுமெனில் (i) சீராய உயரம் 500mm, குறைந்த அகலம் 120mm கொண்ட சீராய வலிமை கொண்ட விட்டம் வடிவமைக்கவும்.
(ii) சீராய அகலம் 200mm, குறைந்தபட்ச உயரம் 200mm கொண்ட சீரான வலிமை கொண்ட விட்டம் வடிவமைக்கவும்.

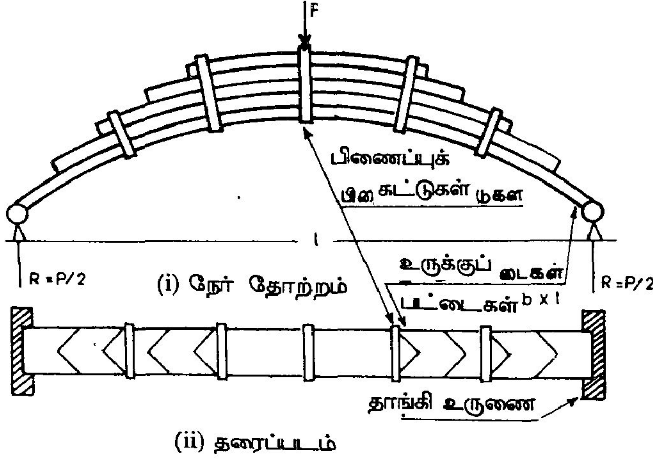
6.12 பயிற்சி6.11 இல் நீவிர் மேற்கொண்ட வடிவமைப்புகளில், எவ்வகையில் குறைவான மரம் தேவை எனக் காண்க.

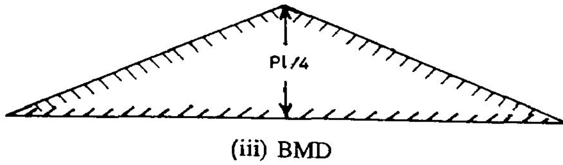
6.13 படம் 5.39 இல் காணப்படும் விட்டத்திற்கு வளைவலிமை 12 N/mm^2 கொண்ட மரத்தனால் சீரான அகலம் 200 mm கொண்டு சீரான வலிமை கொண்ட விட்டம் வடிவமைக்க.

6.14 படம் 5.52 இல் காணும் விட்டத்திற்கு, வளைவலிமை 18 N/mm^2 கொண்ட பொருளால், சீராய உயரம் 600 mm கொண்டு சீராய வலிமை கொண்ட விட்டம் வடிவமைக்க.

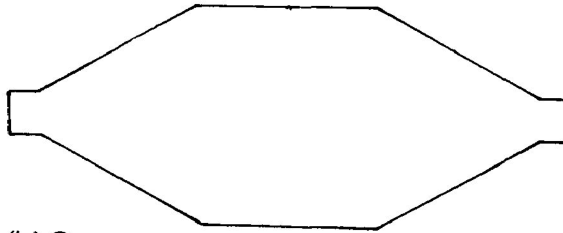
6.5 வண்டிச் சக்கர வில் (Carriage Spring)

கடந்த பகுதியில் மேற்கொண்ட பயிற்சிகள் ஓருண்மையைப் புலப்படுத்தும். அஃதாவது, உயரத்தைச் சீராய் வைத்துக்கொண்டு, தேவைப்படும் வெட்டுமுகக் கெழுவிற்கேற்றாற்போல்





(iii) BMD

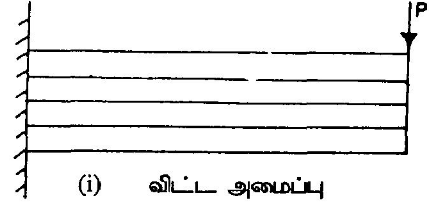


(iv) இடான விட்டத்தின் தரைப்படம் (1 சீரானது)
(1 சீரானது)

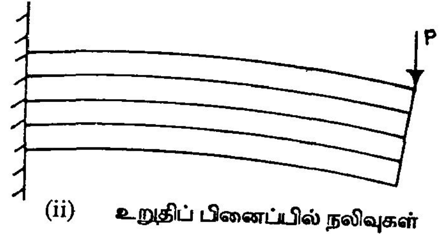
படம் 6.22 வண்டிச் சக்கரவில்

அகலத்தை அமைத்துக்கொள்வதில் மிக்க பொருட் சிக்கனம் எய்த முடியும். வளை திருப்புமையின் அளவுக்கேற்ப வெட்டுமுகக்கெழு அமையுமாறு பல்வேறு விதமாய வடிவமைப்புகளை நடைமுறையில் நோக்கலாம். அவற்றுள் ஒன்று வண்டிச் சக்கர வில். வண்டிச் சக்கர வில்லின் கட்டமைப்பைப் படம் 6.22 காட்டுகிறது.

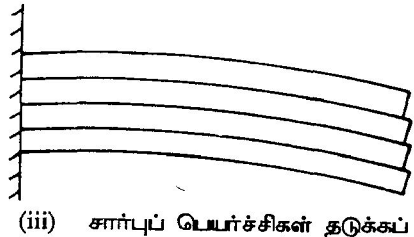
தோற்றத்தில் அகலம் சீராயும் உயரம் படிப்படியாய் மாறியும் அமைந்திருப்பதுபோல் இருப்பினும், வடிவமைப்பில் எந்த ஒருவெட்டு முகத்திலும் தனித்த ஒரு பட்டையின் தடிப்பே விட்டத்தின் உயரமாயும், அவ் வெட்டுமுகத்திலுள்ள பட்டைகள் அனைத்தின் அகலங்களின் கூட்டுத் தொகையே விட்டத்தின் அகலமாயும் கருதப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக AA என்ற வெட்டுமுகத்தில் நான்குபட்டைகள் இருக்கின்றன. ஒவ்வொரு பட்டையின் தடிப்பும் t எனவும், அகலம் b எனவும் கொண்டால் வெட்டுமுகம் AA இல் விட்டத்தின் உயரம், t, அகலம் 4b எனக் கொண்டு மற்றைய ஆய்வுகளை செய்தல் சாலும்.



(i) விட்ட அமைப்பு



(ii) உறுதிப் பிணைப்பில் நலிவுகள்



(iii) சார்புப் பெயர்ச்சிகள் தடுக்கப் படாத பிணைப்பில் நலிவுகள்

படம் 6.23 பட்டையிணைப்பு விட்டங்களின் நலிவுகள்

இவ்வாறு ஏன் கருத வேண்டும்? (படம் 6.20 இல் காணப்படும் விட்டத்தில் பட்டைகள் விட்டத்தின் உயரத்தைக் கூட்டுவதாய்க் கருதப்பட்டே வடிவமைக் கப்படுகின்றன என்பதையும் ஒப்பிட்டு நோக்குக). படம் 6.23 இல் பல தனிப்பட்டைகளைக் கொண்டு இணைக்கப்பட்ட விட்டம் ஒன்றின் இருவிதமான நலிவுகள் காட்டப்பட்டுள்ளன.

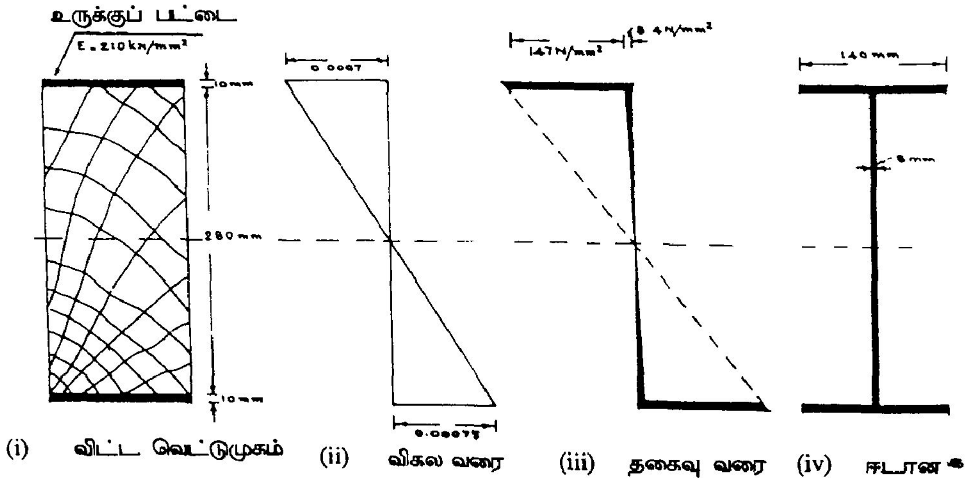
முதல் வகையில் பட்டைகள் உறுதியாயிணைக்கப்பட்டு, இணையும் தளங்களில் சார்புப் பெயர்ச்சிகள் (Relative displacements) முற்றுமாகத் தடுக்கப் படுவதால் இவ் வகையிணைப்பில் மொத்தப் பட்டைகள் யாவும் ஒன்றிணைந்த ஒரே விட்டமாகச் செயல்படுகின்றன. அதனால் உயரம், $h = n.t$ எனவும் அகலம் b எனவும் கொள்ளலாம். ஆனால், மற்றவகை இணைப்பில் ஒன்றன் மேலொன்றாக அடுக்கப் பட்டிருக்கும் பட்டைகளுக்கிடையே பிணைப்பு (உராய்வு தவிர) ஏதும்

இல்லாமையால் பட்டைகள் ஒவ்வொன்றும் தனித் தனி விட்டங்களைப் போன்றே செயல் படுகின்றன. அதனால், இவ்வமைப்பை உயரம் = t, அகலம் = n.b கொண்ட விட்டமாகக் கருதி ஆய்தலே பாதுகாப்பாய முறையாகும். வண்டிச் சக்கரவில்லில் சிற்சில இடங்களில் பிணைப்புக் கட்டுகள் இருந்தாலும் அவை பட்டைகளை அவற்றின் இடத்தில் நிறுத்துவே பயன்படுகின்றனவேயன்றி, இணையும் தளங்களில் சார்பு பெயர்ச்சிகளை புறக்கணிக்கத் தக்க சிறுஅளவிலேயே தடுக்கின்றன. அதனால்தான் வண்டிச் சக்கரவில் உயரம் = t, அகலம் = nb யும் கொண்ட விட்டமாகக் கருதி வடிவமைக்கப்படுகிறது.

6.6 பல்பொருள் விட்டங்கள்

ஒரே பொருளால் ஆய விட்டங்களில் தகைவுகளை ஆயும் முறைகளைக் கண்டோம். இனி, வெவ்வேறு மீள்பண்புகள் கொண்ட பொருள்களாலாய விட்டங்களை ஆயும் முறைகளுக்கு ஓர்எடுத்துக்காட்டுடன், அடிப்படைக் கோட்பாடுகளை நோக்குவோம்.

படம் 6.24 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்ட வெட்டுமுகம் மரம், உருக்குப் பட்டைகள் ஆகியவற்றின் உறுதியான இணைப்புக் கொண்டு விளங்குகிறது. இங்கு, நாம் பயன்படுத்த வேண்டிய அடிப்படைக் கோட்பாடு, மரமும் உருக்கும் இணையும் தளங்களில் இரு பொருள்களிலும் விகலங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும்; தகைவுகள் அவ்வப் பொருள்களின் நீள்மைக் கெழுவிற்கேற்ப இருக்கும் என்பதே. இக் கருத்தினைப் படத்தின் துணைகொண்டு மேலும் சிறிது விளக்கமாய்க் காண்போம். வெட்டுமுகத்தில், மரமும் உருக்குப் பட்டையும் இணையும் தளமான CD இல் விகலம் ε எனக் கருதுவோம். (எடுத்துக்காட்டுக்கு) இதனை, 0.009 என வைத்துக்கொள்ளலாம். இத் தளத்தில்,



(i) விட்ட வெட்டுமுகம் (ii) விகல வரை (iii) தகைவு வரை (iv) ஈடான உருக்கு விட்டம்

படம் 6.24. உருக்கு-மர இணைப்பு விட்டம்

மரத்தில் தகைவு $\sigma = \varepsilon \,.\, E_{tm} = 0.0007 \times 12000$

$$= 8.4 \text{ N/mm}^2$$

உருக்கில் தகைவு $\sigma_{st} = \varepsilon \,.\, E_{st} = 0.0007 \times 210000$

$$= 147 \text{ N/mm}^2$$

அதாவது, உருக்கில் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவு, அதே மட்டத்திலுள்ள மரத்தில் தோற்று விக்கப்படும் தகைவைப் போல் 17.5 மடங்கு $\left(\frac{E_{st}}{E_{tm}}\right)$ மடங்கு உள்ளது. இவ்வாறே பல்வேறு மட்டங்களிலும் விகலப் படம் தொடர்ச்சியாய் (நேர்க்கோடாகவே இருக்கும்) வரைந்து கொண்டு அவ்வம் மட்டங்களிலுள்ள பொருளின் நீள்மைக்கெழு (E) விற்கேற்பத் தகைவுப் படம் வரையலாம். இவற்றைப் படங்கள் 6.24 (ii), (iii) விளக்குகின்றன.

இனி விட்டத்தின் வளைவெதிர் திருப்புமையைக் (Resisting Moment) காண,

$$\text{R.M} = \int_A \sigma \; y \, dA$$

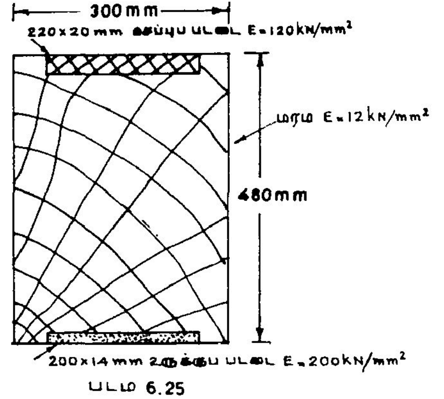
என்ற வாய்பாட்டை

$$\int_A \varepsilon . E \;\; y . b . dy$$

என உரைத்து, மரம் வரும் பகுதிகளில்

$$E_{tm}\, b = E_{st} \cdot \frac{E_{tm}}{E_{st}}\, b$$

$$= E_{st} \cdot \frac{b}{17.5}$$



படம் 6.25

எனக் கொண்டு, முழுவெட்டுமுகத்தையும் உருக்குக் கொண்டு, (ஆனால், மரம் உள்ள பகுதி களில் அகலம் $\frac{b}{(E_{tm}/E_{st})}$ எனக் கொண்டு,) ஆய்வு செய்யலாம். இவ்வாறு கொள்ளப்படும் உருக்கு விட்டத்தினையே ஈடான உருக்கு விட்டம் (Equivalent Steel Beam) என அழைக்கிறோம். மாறாய்,

$$E_{st} \cdot b = \left(\frac{E_{st}}{E_{tm}}\right) E_{tm} \cdot b$$

என உரைக்க, ஈடாய மரவிட்டத்தின் (Equivalent Timber Beam) அளவீடுகளைப் பெறலாம். இதன் பின்னர் ஈடாய விட்டத்தைக்கொண்டே எல்லாவித ஆய்வுகளையும் மேற்கொள்ள இயலும்.

பயிற்சி 6.15

படம் 6.25 இல் காட்டப்பட்டுள்ள உருக்கு மர இணைப்பு விட்டத்தின், ஈடான மர அல்லது உருக்கு விட்டத்தினை நிறுவி, 120 kN.m வளைதிருப்புமை செலுத்தப்படும் வெட்டு முகத்தில் CD, EF தளங்களில் உருக்கு, மரப்பகுதிகளில் தகைவுகளைக் கணக்கிடுக.

6.7 முடிவுரை :

இவ் அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்தில் எளிய வளைதல் கோட்பாட்டில் நாம் மேற்கொள்ளும் கற்பிதங்களையும், அவை எவ்வாறு இக் கோட்பாட்டின் பயனை வரம்பு செய்கின்றன என்பதையும், பெரும்பாலான சூழ்நிலைகளுக்கு இக் கோட்பாடே போதுமென் பதையும் கண்டோம். இக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்த இயலாத சூழ்நிலைகளைத் தெளிவாகப் பிரித்து அறிய முடிந்தால் தான், இக் கோட்பாட்டினைப் பாதுகாப்பாய்ப் பய்ன்படுத்த முடியும்.

கோட்பாட்டின் மூன்றாம் கற்பிதம், விட்டத்தின்மீது செயல்படும் சுமைகள் (எனவே நறுக்கு விசைகள்), வெட்டுமுகத்தின் வடிவச் சீர் அச்சின் வழிச் செலுத்தப்பட வேண்டும் என்பது. அவ்வாறு செலுத்தப்படும்போது விட்டத்தின்மீது செலுத்தப்படும் நறுக்கு விசையும், அதனைச் சமனிலையில் இருத்தும் அகநறுக்குத் தகைவுகளில் பயனிலையும் (Resultant of Shear Stresses) ஒரே கோட்டில் எதிரெதிர் திசைகளில் செயல்பட்டு சமனிலையை உறுதி செய்யும். இல்லாவிடில் இவையிரண்டும் விசையிணை (Couple) ஆகச் செயல்பட்டு விட்டத்தில் முறுக்குத் திருப்புமையைத் (Twisting Moment) தோற்றுவிக்கும். இது தவிர்க்கப்பட வேண்டும்; அல்லது இம் முறுக்கத் திருப்புமை தோற்றுவிக்கும் விளைவுகளையும் ஏற்கும் வகையில் வடிவமைப்பினை அமைக்க வேண்டும். அகநறுக்குத் தகைவுகளின் பயனிலை சமச்சீர் அச்சு (இருப்பின்) வழிச் செல்லும் என்பதை நமது பகுத்தறிவே உணர்த்தும். பொதுவாக, அகநறுக்குத் தகைவுகளின் பயனிலைகள் (திசைகள் சுமைகளையொட்டி மாறினாலும்) ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் வழியாகவே செயல்படும் எனக் காணலாம். இப் புள்ளியையே வெட்டுமுகத்தில் நறுக்கு மையம் (Shear Centre) என அழைக்கின்றோம். எவ்வித வெட்டுமுகமாயினும், புறச் சுமைகள் நறுக்கு மையம் வழியாகவே செலுத்தப்படல் நல்லது. இல்லாவிடின் இப் புள்ளியை ஒட்டிய முறுக்கத் திறனைக் கணக்கில் கொள்ள வேண்டும். வடிவச் சீர்மை இல்லாத வெட்டுமுகங்களின் நறுக்கு மையத்தைக் கண்டறிதல் ஒருமுக்கிய ஆய்வுக் கூறாகும். பரிசோதனைகள் அல்லது கணக்கீடுகள் வாயிலாய் நறுக்கு மையத்தைக் காணும் முறைகளைப் பொருள் வலிமை இயல் உயர்நிலை நூல்களில் காணலாம்.

அடுத்து, வெட்டுமுகம் வடிவச் சீர்மை கொண்டிருந்து சுமைகள் வடிவச் சீர் அச்சின் வழியே செலுத்தப்படும்போதுதான், வளைமை சுமைகள் செலுத்தப்படும் தளத்திலேயே தோற்றுவிக்கப்படும். இல்லையேல், வளைமை குறிப்பிட்டதொரு தளத்துடன் அமையாது; வளைந்த விட்டத்தின் அச்சு ஒரு முக்கண வரையாய் (Three Dimensional Curve) விளங்கும். இந் நிகழ்ச்சி சமச்சீரற்ற வளைதல் (Unsymmetrical Bending) என அழைக்கப்படுகிறது. இதுபற்றியும் விரிவான ஆய்வுகளைப் பொருள் வலிமை இயல் உயர்நிலை நூல்களில் விரிவாய்க் காணலாம்.

7. வெட்டுமுகப் பண்புகள்
(Cross Sectional Properties)

7.1 முன்னுரை

விட்டங்கள் போன்ற கட்டுமான உறுப்புகளின் வலிமைப் பண்புகள் இரண்டு கூறுகளால் அமைவன. விட்டத்தின் மூலப் பொருள் (Material Content), வடிவமைப்பு (Ceometrical Form) அக்கூறுகள். பல்வகை கட்டமைப்புகளில் இவ்விரு கூறுகளும் எவ்வெவ்வாறு வலிமையை வரையறுக்கின்றன என்பதே பொருள்வலிமை இயலின் கருப்பொருள் எனில் மிகையாகாது. ஏற்கனவே, வளைதல் சமன்பாட்டில் (சமன் 6.7) பொருட் பண்பு E, வடிவக் கூறு I என்பன இடம்பெறும் தன்மையைக் கண்டோம். பொருளின் அடிப்படை வலிமைப் பண்புகளைச் சோதனைகள் வாயிலாகவே நிறுவுகிறோம். வடிவப் பண்புகளை (கணித வாயிலாக) நிறுவும் முறைகளை ஈண்டுக் காண்போம்.

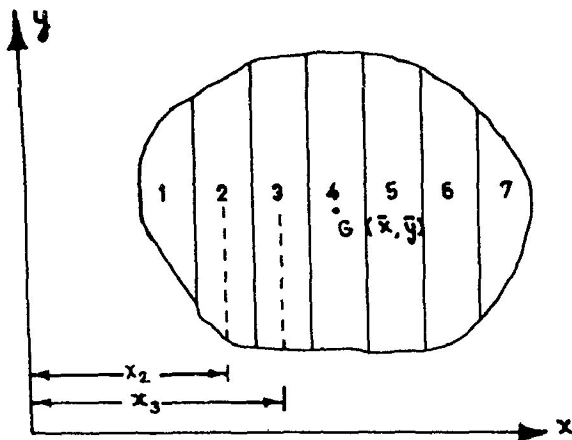
7.2 ஈர்ப்பு மையம் (Centroid)

வெட்டுமுகங்களின் தகைவில் அச்சுகள் அவற்றின் ஈர்ப்பு மையங்களின் வழியாய் (விசைகளின் திசைக்குச் செங்குத்தாய்) செல்கின்றன என்பதைச் சமன்பாடு 6.3 உணர்த்துகிறது. அன்றியும், வெட்டுமுகத்தின் மற்றைய பண்புகளான உறழ்திருப்புமை, வெட்டுமுகக் கெழு ஆகியனவும் தகைவில் அச்சினையே சார்ந்துள்ளனவாதலின், வடிவப் பண்புகள் காண முதற்படி, ஈர்ப்பு மையத்தை வரையறுத்தலேயாகும்.

படம் 7.1 இல் காட்டியவாறு ஒருபொதுவாய வடிவப் பரப்பின் ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண முற்படுவோம். இதன் பொருட்டு நமக்கு வசதியானதொரு ஆயத் திட்டத்தை (Coordinate System) அமைத்துக் கொண்டு வடிவின் ஈர்ப்பு மையம் G இன் ஆயங்களைக் ($\bar{x}$, $\bar{y}$) கார்ட்டீசிய முறையில் கணக்கிடுவோம்.

கொடுத்துள்ள வடிவப் பரப்பினை நமக்கு வசதியான அளவு எளிய சிறு வடிவங்களாய்ப் பிரித்துக் கொள்வோம். (இப் பகுதிகள் படத்தில 1, 2, 3 . . . எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன). பிரிவுகள் மிகச் சிறியவெனின், இவற்றைச் செவ்வகங்களாகக் கருதல் பிழையன்று. ஒவ்வொரு பிரிவின் பரப்புகளையும் A_1, A_2, A_3 . . . . A_n எனவும், பிரிவுகளின் ஈர்ப்பு மையங்களின் x திசை ஆயத் தொலைவுகளை x_1, x_2, x_3 எனவும் கருதுவோம்.

Y அச்சின்பால் பரப்பின் திருப்புமையை $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + ...$ என்றும் கூட்டுத்தொகையாய்க் கணக்கிடலாம். மாறாய், மொத்தப் பரப்பு A ஐ அதன் ஈர்ப்பு



படம் 7.1

மையத்தின் x ஆயமாய $\bar{x}$ ஆல் பெருக்கி, A $\bar{x}$ எனவும் கணக்கிட முடியும். இவ்விரண்டு திருப்புமை களும் சமமாகத்தான் இருக்க வேண் டும். எனவே,

$$A\,\bar{x} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \ldots$$

$$\doteq \Sigma\, A_i\, x_i$$

இங்கு மொத்தப் பரப்பு

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \ldots$$

$$= \Sigma\, A_i$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma\, A_i\, x_i}{\Sigma A_i} \qquad (7.1)$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\, A_i\, y_i}{\Sigma\, A_i}$$

A_1, A_2 முதலிய பிரிவுகள் மிகச் சிறியனவாகக் கொள்ளப் படின், இவற்றை

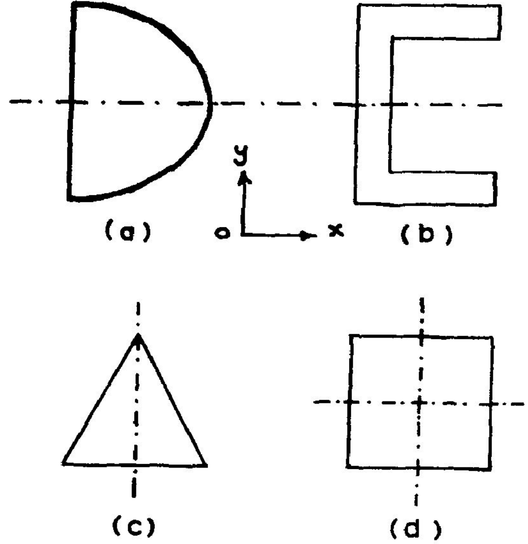
$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_A dA \,.\, x}{\int_A dA} \qquad (7.2)$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A dA \,.\, y}{\int_A dA}$$

என்னும் தொகையங்களால் (Integrals) வரையறுக்கலாம்.

சமன்பாடு 7.2 இல் காணப்படும் dA என்பது மிகச் சிறியதொரு பிரிவின் பரப்பளவாகும். இத்தகு பிரிவுகளை இனிப் பரப்புத் துணுக்குகள் (Elemental Areas) எனக் குறிப்பிடுவோம். சமன்பாடுகள் 7.1, 7.2 இவற்றின் பயன்பாட்டினைச் சில எடுத்துக் காட்டுகள் மூலம் காண்போம்.

முதலில் தெளிவான, எளிதில் நிறுவக் கூடியதொரு உண்மையை உரைத்துவிடுவோம். அஃதாவது, ஒரு வெட்டு முகத்திற்கு வடிவச் சீர்மை அச்சுகள் இருப்பின், ஈர்ப்பு மையம், இவ் அச்சுகளின் மீது தான் அமைந்திருக்க வேண்டும்.



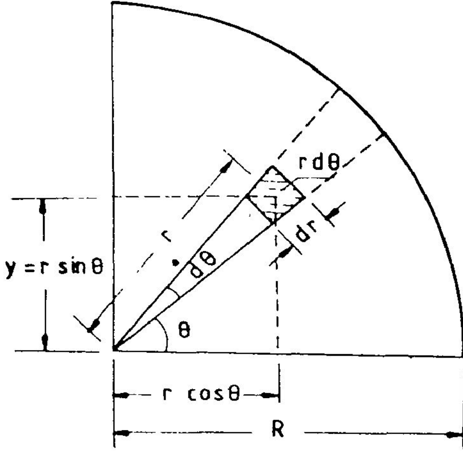
படம் 7.2

இக் கருத்தின் விளக்கத்திற்குப் படங்கள் 7.2 இனை நோக்குவோம். படங்கள் 7.2 (a), (b) ஆகிய வடிவங்களின் வடிவச் சீர்மை அச்சுகள் x திசையில் உள்ளன. இவற்றின் ஈர்ப்பு மையங்கள் இவ் அச்சுகளின் மீதுதான் இருக்க வேண்டும் என்பதால் ஈர்ப்பு மையங்களின் y ஆயங்கள் தாமாகவே வரையறுக்கப்பட்டு விடுகின்றன. இவற்றின் x ஆயங்களை சமன்பாடு 7.2 இன் துணைகொண்டு நிறுவ வேண்டும். படம் 7.2 (c) இல் உள்ள வடிவத்தின் சீர்மை அச்சு, y திசையில் இருப்பதால் (இச் சீர்மை அச்சையே y அச்சாகக் கொள்ளல் மிக எளிய உத்தியாகும்), இதன் x ஆயம் வரையறுக்கப்பட்டுவிடுகிறது. படம் 7.2 (d) இல் காணும் வடிவம் x, y இருதிசைகளிலும் சீர்மை அச்சுகள் கொண்டிருப்பதால் ஈர்ப்பு மையம் இவ்விரு அச்சுகளின் வெட்டுப் புள்ளியில் இருப்பதை உணரலாம். இங்குச் சில அடிப்படையாய வடிவங்களின் ஈர்ப்பு மையங்களைக் காண்போம். பின்னர் மற்ற வடிவங்களுக்குரிய தீர்வுகளைத் தொகுத்தளிப்போம்.

ஒரு கால்வட்டத்தின் ஈர்ப்பு மையம்

ஆரம் R கொண்டதொரு கால் வட்டத்தின் (படம் 7.3) ஈர்ப்பு மையத்தின் $\bar{x}$ ஆயத்தைக் காணச் சமன்பாடு 7.2 ஐப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\bar{x} = \frac{\int_A x \, dA}{\int_A dA}$$



படம் 7.3

இங்குச் சிறுபரப்பு dA வின் அளவினை அதன் தோராயமான பக்கங்களாகிய dθ, dr இவற்றினைக் கொண்டு

dA = r dθ, dr என உரைக்கலாம்.

மற்றும்

x = r cos θ எனக் கொள்ள,

$$\bar{x} = \frac{\int_A r\cos\theta \,.\, r\,d\theta\,dr}{\int_A r\,d\theta \,.\, dr}$$

$$= \frac{\int_0^R r^2\,dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta \;\; d\theta}{\int_0^R r\,dr \int_0^{\pi/2} d\theta} \qquad (7.6)$$

சமன்பாடு 7.6 இன் வலப்புறத் தொகையங்களைக் கணக்கிட

$$\bar{x} \quad = \quad \frac{\int_0^R r\,dr\;[\sin\theta]_0^{\pi/2}}{\int_0^R r\,dr\;\;[\theta]_0^{\pi/2}} \quad = \quad \frac{\int_0^R r^2\,dr}{\int_0^R \frac{\pi}{2}\,r\,dr}$$

$$= \quad \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi}{4}\,R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

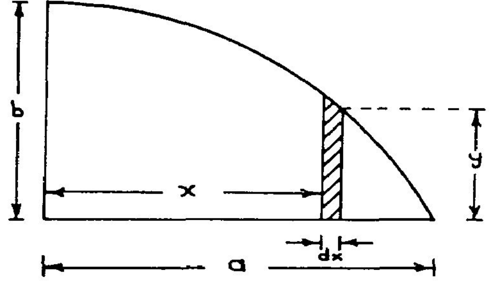
உருவத்தின் சமச்சீர்மையைப் பயன்படுத்தி $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$ என உரைக்கலாம்.

அரைவட்டத்தின் ஈர்ப்பு மையம்

அரை வட்டத்தின் விட்டத்தினை x திசையோடு பொருத்த சீர்மை அச்சாக y அச்சு விளங்கும். அதனால், $\bar{x} = 0$ எனவும் $\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$ எனவும் உய்த்துணரலாம்.

கால்பகுதி நீள்வட்டத்தின் ஈர்ப்பு மையம்

அச்சு நீளங்கள் 2a, 2b கொண்டதொரு நீள் வட்டத்தின் கால்பகுதிப் படம் 7.5 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இங்குச் சிறு பரப்பாக dx அகலமுள்ளதொரு துண்டினைக் காண் போம்.



படம் 7.4

இதன் பரப்பு $dA = ydx$

இப் பரப்பின் ஆயத் தூரம் = x

எனவே, $$\bar{x} = \frac{\int y\,dx\,.\,x}{y\,dx}$$

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என அறிவோம்.

எனவே, $$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

அல்லது $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ எனலாம்

ஆகவே $$\bar{x} = \frac{\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx}{\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx} \qquad (7.7)$$

$$= \frac{\frac{b}{a}\left[-\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}^{\,3}}{3}\right]_0^a}{\pi\,ab}$$

அஃதாவது $\bar{x} = \dfrac{4a}{3\pi}$

இவ்வாறே $\bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$ எனக் காணலாம்.

பரவளையத்தின் ஈர்ப்பு மையம்

$y = \dfrac{bx}{a^2}(2a - x)$ என்னும் சமன்பாடு கொண்டதொரு பரவளையப் பரப்பின், $x = a$, $y = b$ என்ற வரம்புகளுக்குள் அடங்கிய பகுதியின் ஈர்ப்பு மையம் காண முற்படுவோம்.

$$dA = ydx = \frac{b}{a^2} \times (2a - x)\, dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \frac{y}{2}\, dA}{\int_A dA}$$

படம் 7.5

$$\bar{x} = \frac{\frac{b}{a^2}\int_0^a x^2 (2a - x)\, dx}{\frac{b}{a^2}\int_0^a x (2a - x)\, dx} = \frac{\frac{b}{a^2}\left[2a\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\frac{b}{a^2}\left[2a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a}$$

$$= \frac{\frac{b}{a^2}\,\frac{1}{12}\left[8a^4 - 3a^4\right]}{\frac{b}{a^2}\,\frac{1}{6}\left[6a^3 - 2a^3\right]} = \frac{\frac{5}{12}\, ba^2}{\frac{2}{3}\, ab}$$

$$= \frac{5}{8}\, a$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \frac{y}{2}\, dA}{\frac{2}{3}\, ab} = \frac{3}{4ab} \int_0^a y^2\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4ab} \int_0^a \frac{b^2 x^2}{a^4} (2a - x)^2\, dA$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{b}{a^5} \int_0^a (4a^2 x^2 - 4ax^2 + x^4)\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\, \frac{b}{a^5} \quad a^5 \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{5} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{5}\, b$$

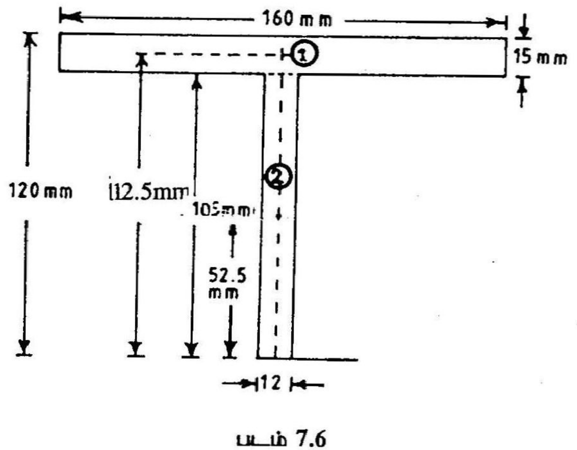
$\therefore$ ஈர்ப்பு மையம், $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{5}{8} a, \frac{2}{5} b \right)$

இவ்வாறே, தெளிவாக எளிதில் வரையறுக்கக் கூடிய உருவங்களின் ஈர்ப்பு மையங்களைக் கண்டுபிடிப் பதில் தொகைக் கலனத்தைப் பயன் படுத்தலாம்.

இனிச் சமன்பாடுகள் (7.2), (7.4) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்திச் சில கூட்டுருவப் பரப்புகளுக்கு ஈர்ப்பு மையம் காணும் எடுத்துக்காடுகள் சில வற்றை நோக்குவோம்.

எ.கா. 7.1:

படம் 7.6 இல் காட்டியுள்ள T வடிவப் பரப்பின் ஈர்ப்பு மையம் காண்க. கொடுக்கப்பட்டுள்ள உரு வத்தை இருசெவ்வகங்களின் கூட்டா கக் கருதலாம்.



படம் 7.6

$A_1 = 160 \times 15 = 2400 \text{ mm}^2$; $A_2 = 105 \times 12 = 1260 \text{ mm}^2$

$x_1 = x_2 = 0 \quad y_1 = 112.5$ mm ; $y_2 = 52.5$ mm.

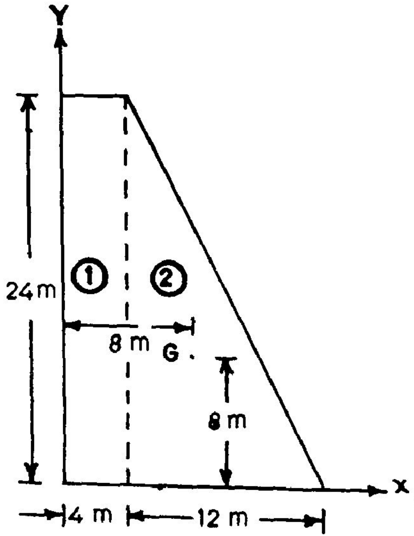
எனவே $\bar{x} = 0$

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_1}{A_1 + A_2} = \frac{2400 \times 112.5 + 1260 \times 52.5}{2400 + 1260}$$

$$= 91.84 \text{ mm}$$

எ.கா . 7.2:

படம் 7.7 இல் காட்டப்பட்டுள்ள பரப்பின் ஈர்ப்பு மையம் காண்க. பரப்பின் உட்பிரிவுகள் படத்தில் நோக்குக.



படம் 7.7

$A_1 = 24 \times 4 = 96 \text{ m}^2$

$x_1 = 2\text{m} ; y_1 = 12 \text{ m}$

$A_2 = \frac{24 \times 12}{2} = 144 \text{ m}^2$

$x_2 = 4 + \frac{12}{3} = 8 \text{ m},$

$y_2 = \frac{24}{3} = 8 \text{ m}$

எனவே

$$\bar{x} = \frac{(96 \times 2) + (144 \times 8)}{(96 + 144)} = 5.6 \text{ m.}$$

$$\bar{y} = \frac{96 \times 12 + 144 \times 8}{96 + 144} = 9.6 \text{ m.}$$

எ.கா. 7.3:

படம் 7.8 இல் காணும் பரப்பின் ஈர்ப்பு மையம் காண்க. உருவப் பரப்பு 3 சிறுபகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

$A_1 = 80 \times 20 = 1600 \text{ mm}^2$

$x_1 = 40$ mm ; $y_1 = 90$ mm

$A_2 = 60 \times 20 = 1200$ mm^2

$x_2 = 10$ mm ; $y_2 = 50$ mm

$A_3 = 60 \times 20 = 1200$ mm^2

$x_3 = 30$ mm ; $y_3 = 10$ mm

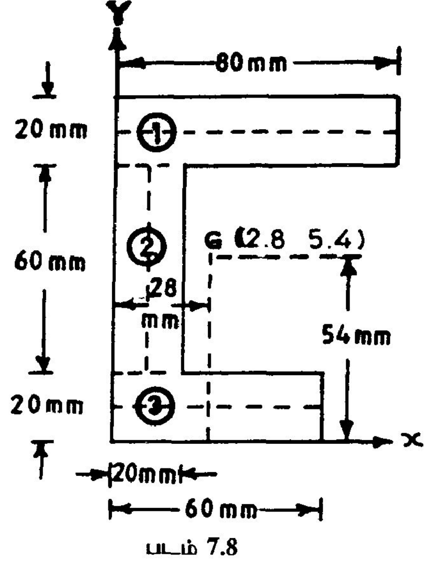
இவற்றிலிருந்து

$$\bar{x} = \frac{1600 \times 40 + 1200 \times 10 + 1200 \times 30}{1600 + 1200 + 1200}$$

$= 28$mm

$$\bar{y} = \frac{1600 \times 90 + 1200 \times 50 + 1200 \times 10}{1600 + 1200 + 1200}$$

$= 54$mm



படம் 7.8

எ.கா. 7.4

படம் 7.9 இல் தரப்பட்டுள்ள உருப் பரப்பினை ஓர் அரைவட்டம், செவ்வகம், முக்கோணம் கொண்ட பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். புள்ளி A ஐ ஆய மையமாகக் கொள்ள,

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \times 6^2}{2} = 56.55 \text{ m}^2$$

$$x_1 = -\frac{4R}{3\pi} = -\frac{4 \times 6}{3 \times \pi} = -2.54648 \text{ m}$$

$$y_1 = 6 \text{ m}$$

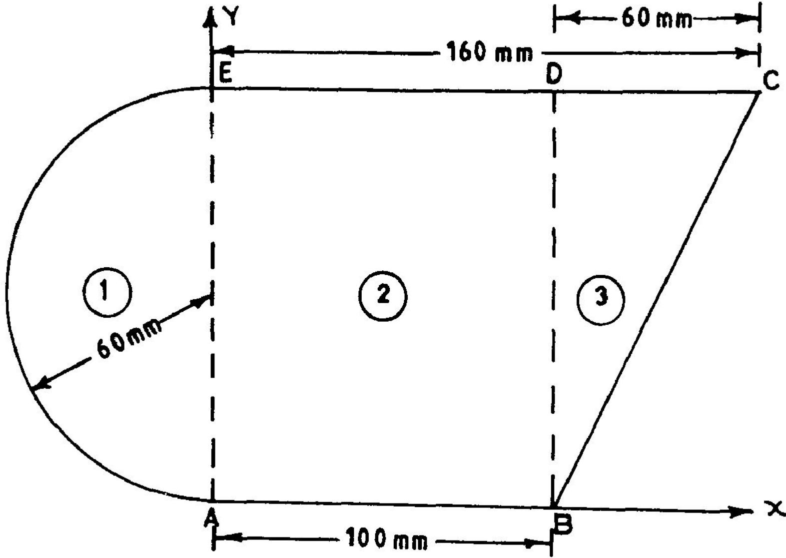
$$A_2 = 12 \times 10 = 120 \text{ m}^2$$

$$x_2 = 5 \text{ cm} ; \quad y_2 = 6 \text{ m}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 = 36 \text{ m}^2$$

$$x_3 = 10 + \frac{6}{3} = 12 \text{ m}$$

$$y_3 = \frac{2}{3} \times 12 = 8 \text{ m}$$



படம் 7.9

இவற்றிலிருந்து,

$$\bar{x} = \frac{56.55 \times (-2.54648) + 120 \times 5 + 36 \times 12}{56.55 + 120 \times 36}$$

$$= 4.1778 \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{56.55 \times 6 + 120 \times 6 + 36 \times 8}{56.55 + 120 \ 36}$$

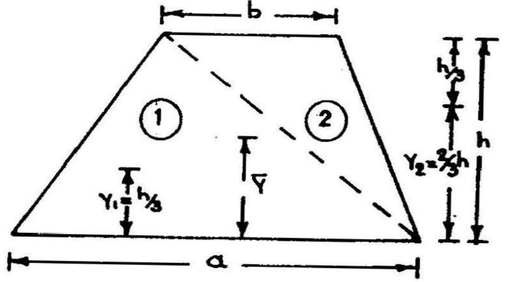
$$= 6.3387 \text{ m.}$$

இனிச் சரிவகம் ஒன்றன் ஈர்ப்புப் மையம் அதன் அடிப்பக்கத்திலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது? என்பதைக் காணப் பொது வாய்ப்பாட்டினைப் பெறுவோம்.

பொதுவானதொரு சரிவகத்தின் அமைப்பு படம் 7.10 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதனை இரு முக்கோணப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். கொடுத்துள்ள அளவீடுகளைக் கொண்டு $\bar{x}$ காண இயலாது. $\bar{y}$ காணப் பொது வாய்ப் பாட்டை நிறுவுவோம்.

$$A_1 = \frac{ah}{2} \quad ; \quad y_1 = \frac{h}{3}$$

$$A_2 = \frac{bh}{2} \quad ; \quad y_2 = \frac{2}{3}h$$



படம் 7.10

எனவே

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{\frac{ah}{2}\cdot\frac{h}{3} + \frac{bh}{2}\cdot\frac{2}{3}h}{\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}}$$

$$= \frac{\frac{h^2}{6}\times(a+2b)}{\frac{h}{2}(a+b)} = \frac{h}{3}\frac{(a+2b)}{(a+b)}$$

$$\bar{y} = \frac{h}{3}\frac{(a+2b)}{(a+b)} \qquad (7.7)$$

எ. கா. 7.5

படம் 7.11 இல் காட்டப்பட்டுள்ள உருவப் பரப்பினை 4 செவ்வகங்களின் கூட்டாகக் கருதுவதைவிட, ABCD என்னும் செவ்வகத்திலிருந்து EFGH என்னும் செவ்வகம் வெட்டியெடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கருதல் எளிமை தரும்.

பரப்பு (1) ABCD

பரப்பு (2) EFGH

$A_1 = 15 \times 20 = 300 \text{ m}^2$

$x_1 = 7.5\text{m} \quad y_1 = 10 \text{ m}$

$A_2 = -(6 \times 10) = -60 \text{ m}^2$

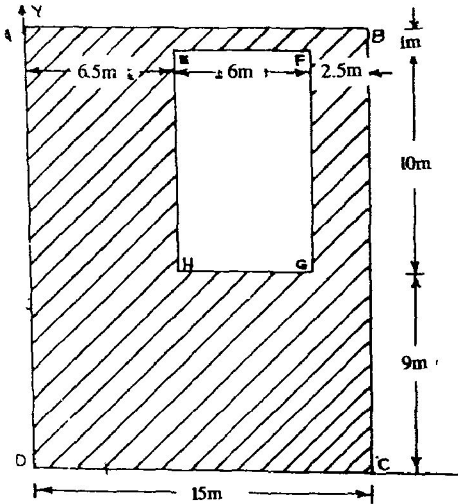
$x_2 = 6.5 + 5 = 9.5 \text{ m}$

$y_2 = 9 + 5 = 14 \text{ m}$

இவற்றிலிருந்து

$$\bar{x} = \frac{300 \times 7.5 - 60 \times 9.5}{300 - 60} = 7m$$

$$\bar{y} = \frac{300 \times 10 - 60 \times 14}{300 - 60} = 9\ m$$



படம் 7.11

பயிற்சி 7.1

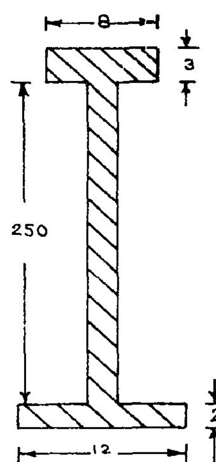
1. படங்கள் 7.12 முதல் 7.22 முடியக் காட்டியுள்ள உருவப் பரப்புகளின் பரப்புகளின் ஈர்ப்பு மையங்களைக் கண்டுபிடிக்க.

2. $y = 0.3\ x^2$ என்னும் பரவளையத்தையும், $x = 5.0$, $y = 0$ எனும் நேர்க்கோடுகளையும் எல்லைகளாகக் கொண்ட உருவப் பரப்பின் ஈர்ப்பு மையம் காண்க.

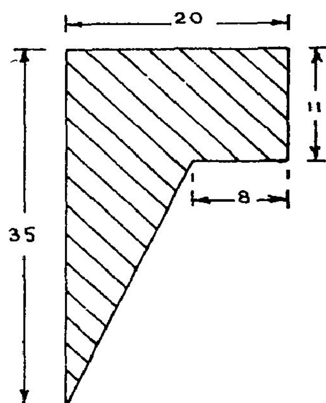
3. $y = 2.5\ \sqrt{x}$ என்னும் பரவளையத்தையும் $x = 9$, $y = 0$ எனும் நேர்க்கோடுகளையும் எல்லைகளாகக் கொண்ட உருவப் பரப்பின் ஈர்ப்பு மையம் காண்க.

4. 1.5m அகலமும், 2.5m நீளமும் கொண்டதொரு செவ்வகத் தகட்டின் ஒருமுனை யில் 0.3m ஆரம் கொண்டதொரு கால்வட்டத் துண்டும், அதன் எதிர்முனையில் 0.5m ஆரம் கொண்டதொரு கால் வட்டத் துண்டும், வெட்டி யெடுக்கப்படுகின்றன; மீதித் தகட்டின் ஈர்ப்பு மையம் காண்க.

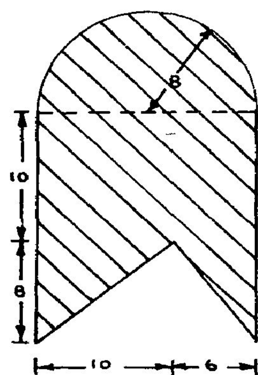
5. வெளிஆரம் 500mm, உள்ஆரம் 300mm கொண்டதொரு உள்ளீடற்ற சிலிண்டர் நீளவாட் டில் இருசமபாகங்களாக வெட்டப் படுகிறது. வெட்டப்பட்ட பகுதிகளின் ஈர்ப்பு மையத்தைக் கணக்கிடுக.



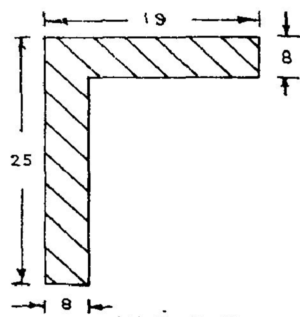
படம் 7.12



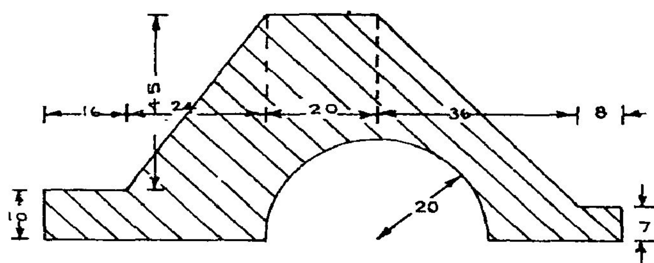
படம் 7.13



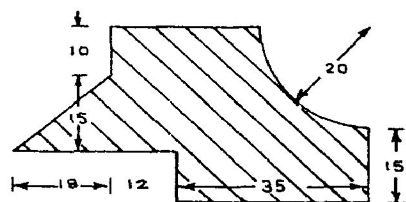
படம் 7.14



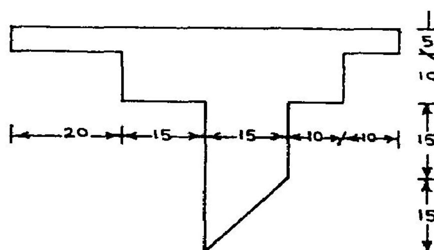
படம் 7.15



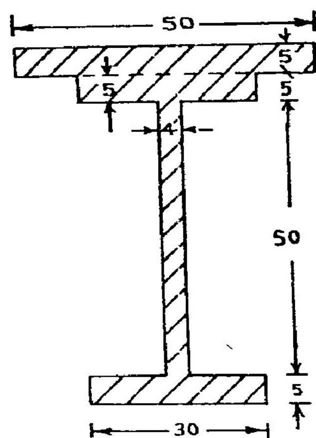
படம் 7.16



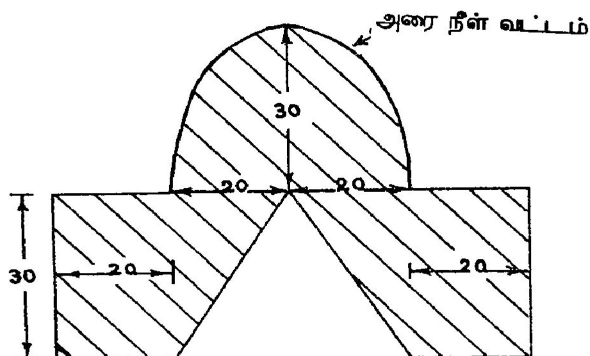
படம் 7.17



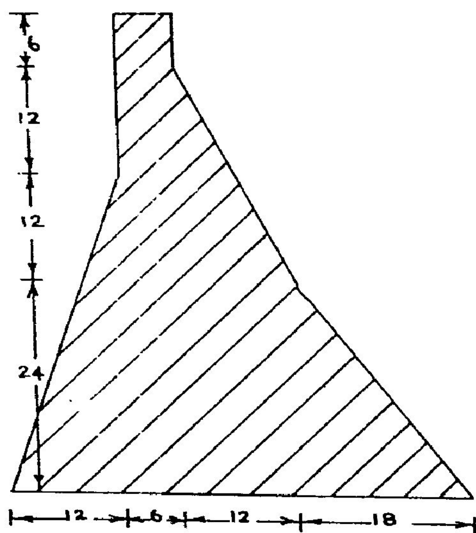
படம் 7.18



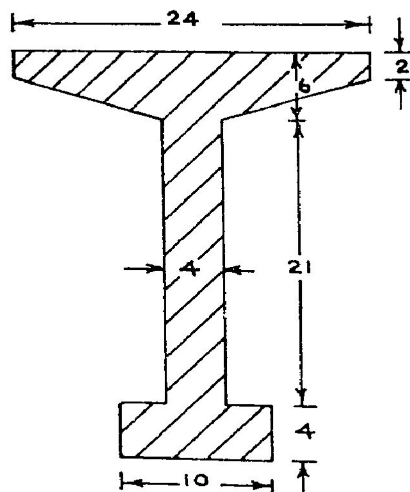
படம் 7.19



படம் 7.20



படம் 7.21



படம் 7.22

ஈர்ப்பு மையம் என்ற சொல் முன்னர் நீங்கள் இயற்பியில் கற்ற பொருளிலிருந்து மாறுபட்ட பொருளில் இங்கு பயன்படுத்தப்பட்டிருப்பதாக உங்களுக்கு தோன்றலாம். மாறுபட்ட பொருளில் அல்லாது, ஒரு குறுகிய பொருளிலேயே இச்சொல் திண்ம விசையியலில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. பொதுவானதொரு தட்டின் ஈர்ப்புமையம் காணச் சரியான கோவைகள் யாவையெனக் கண்டு சமன்பாடுகள் (7.2) உடன் தொடர்படுத்துவோம். படம் 7.24 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வடிவம் கொண்ட தட்டு ஒன்றின் தடிப்பு t (x, y) எனவும், அடர்த்தி ρ (x, y) எனவும் ஆயத்தூரங்களின் சார்பலனாக உரைக்கப்படலாம். இத்தட்டில் ஆயங்கள் (x, y) கொண்ட புள்ளியை அண்மிய துணுக்கு ஒன்றின் பரப்பு dA எனக் கொள்வோம். இனி இயற்பியலில் கற்ற பொதுவான பொருளில் இத்தட்டின் ஈர்ப்பு மையத்தை நிறுவ முனைவோம்.

பரப்புத் துணுக்கின் பொருண்மை dm = கன அளவு × அடர்த்தி

= பரப்பு × தடிப்பு × அடர்த்தி

$$= dA \times t\,(x, y) \times \rho\,(x, y)$$

y அச்சில்ல dm இன் திருப்புமை $= dm\,.\,x$

$$= dA.t\,(x, y)\,.\,\rho\,(x, y).x$$

தட்டின் மொத்தப் பொருண்மை m $= \int dm$

$$m = \int_A t\,(x\,,\,y)\,.\,\rho\,(x\,,\,y)\,.\,dA \qquad \text{(a)}$$

ஈர்ப்பு தட்டின் மையத்தின் கிடை ஆயம் $\bar{x}$ எனில்

தட்டின் பொருண்மைக்கு y அச்சில் திருப்புமை, $m\,\bar{x} = \int_A t\,(x\,,\,y)\,.\,\rho\,(x\,,\,y)\,.\,x\,.\,dA$ (b)

சமன்பாடுகள் (a), (b) இரண்டிலுமிருந்து

$$\bar{x} = \frac{\int_A t\,(x\,,\,y)\,.\,\rho\,(x\,,y)\,.\,x\,dA}{\int_A t\,(x\,,\,y)\,\text{.rh}\,\;(x\,,\,y)\,dA} \qquad \text{(c)}$$

அடர்த்தி ρ, தடிப்பு t இரண்டும் மாறிலிகள் எனில், சமன்பாடு (c) சமன்பாடு 7.2 இல் முதல் பகுதியாகச் சுருங்குவதைக் காணலாம். இதே முறையில் $\bar{y}$ ஐயும் நிறுவலாம்.

எனவே, இங்கு நாம் நிறுவிய ஈர்ப்பு மையங்கள் சீரான அடர்த்தியும், படத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில்ல சீரான தடிப்பும் கொண்ட திண்மங்களின் ஈர்ப்புமையங்களே என்பதையுணரலாம்.

7.3 உறழ்திருப்புமை (Moment of Inertia)

விட்டங்களின் தகைவுகளைக் கணக்கிட முற்படும்போது $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ என்னும் சமன்பாட்டினை நிறுவினோம். இச் சமன்பாட்டில் இடம்பெறும் அளவீடுகளில் ஒன்றான I என்பது உறழ்திருப்புமை என அழைக்கப்படுகிறது. உறழ்திருப்புமையின் அளவினை

$$I = \int_A y^2 \, dA$$

என்னும் பரப்புத் தொகையம் (Area Integral) மூலம் கணக்கிட முடியும் என்பதனையும் நிறுவியுள்ளோம். இந்த உறழ்திருப்புமை என்னும் அளவு வெட்டுமுகப் பண்புகளில் முக்கியமானதோர் அளவாகும். வளைதகைவே (Bending Stress) யன்றியும், நறுக்குத் தகைவு கணக்கிடவும், விலக்கங்களின் (Deflections) கணக்கீடுகளிலும் நெளிதன்மைகளை (Buckling Characteristics) ஆய்தலிலும் இப் பண்பு தேவைப்படுகிறது. அதனால், இப் பகுதியில் உறழ்திறனைத் தெளிவாக வரையறுப்பதுடன், பல்வகை வடிவப் பரப்புகளுக்கும் உறழ்திறனைக் கணக்கிடும் முறைகளையும் விளக்குவோம்.

ஒரு பரப்பின் உறழ்திறனை வரையறுப்பதில் இன்றியமையாதவொரு கூறு அச்சு (Axis) என்பது. அஃதாவது கொடுக்கப்பட்டதொரு வடிவத்தின் பல்வேறு பரப்புத் துணுக்குகளும், வரையறுக்கப்பட்ட அச்சிலிருந்து அவற்றுக்கு இடையேயுள்ள (செங்குத்துத்) தூரத்தின் இருபடி (Square) யால் பெருக்கி இப் பெருக்கத் தொகைகளின் கூட்டு மொத்தமே உறழ்திருப்புமை (Moment of Inertia) என அழைக்கப்படுகிறது. இதனையே திருப்புமையின் திருப்புமை (Moment of Moment) இரண்டாம் திருப்புமை (Second Moment) என்னும் மாற்றுப் பெயர்களாலும் அழைக்கின்றனர். வரையறையின் கருத்தினை ஒருபடத்தினால் விளக்குவோம்.

படம் 7.23 இல் ஒருவடிவப் பரப்புக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதனுடன் aa, bb, cc என்னும் மூன்று அச்சுகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒருபரப்புத் துணுக்கு (அதன் பரப்பளவு dA) aa அச்சிலிருந்து r அளவு செங்குத்துத் தொலைவில் இருப்பதாய்க் கொள்வோம்.

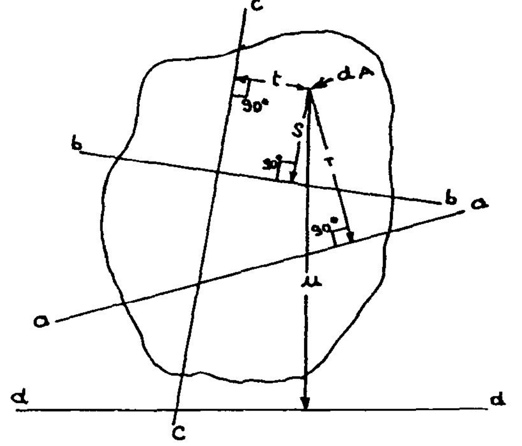
இத் துணுக்கின் aa மையம் கொண்ட உறழ்திருப்புமை $= r^2 dA$

எனவே மொத்தப் பரப்பின் aa மையம் கொண்ட உறழ்திருப்புமை $= \int_A r^2 \, dA$

மேற்கண்ட தொகையத்தில் r என்பது பல்வேறு பரப்புத் துணுக்குகளுக்கும், aa அச்சிற்குமிடையேயுள்ள செங்குத்துத் தூரம் என்பது உள்ளிடை. இத் தொகையத்தினை I_{aa} அல்லது I_a என்னும் குறியீடு கொண்டு குறிப்பிடலாம். இவ்வாறே bb, cc, dd முதலாய பல்வேறு அச்சுகளை மையமாகக் கொண்ட உறழ் திருப்புமைகளைக் கணக்கீட்டால் வரையறுக்க

முடியும். ஆனால், எந்த அச்சு மையங் கொண்ட உறழ்திருப்புமை நமக்குத் தேவை என்பதை ஆய்வு சூழலைக் கொண்டுதான் முடிவு செய்ய வேண்டும். இவற்றின் அளவுகள் வேறுபடுமென்பதில் ஐயமில்லை. இவற்றுள் அடிப்படையானவை, பரப்பின் ஈர்ப்பு மையம் வழியே செல்லும் அச்சுகளை மையமாகக் கொண்ட உறழ்திருப்புமைகளாகும்.

படம் 7.24 இல் கொடுத்துள்ள வடிவப் பரப்பின் ஈர்ப்பு மையமான, G இன் வழியே செல்லும் xx, yy, uu, vv, ww பல்வேறு அச்சுகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவற்றுள்ளும் எவ்வச்சினை மையமாகக் கொண்ட உறழ்திருப்புமை தேவை என்பதையும் ஆய்வு சூழலை ஒட்டித் தான் முடிவு செய்ய வேண்டும். அதனால் எத்திசைச் செல்லும் அச்சினையும் மையமாகக் கொண்ட உறழ்திருப்புமையைக் கணக்கிடும் பொதுவான முறைகளை ஆய்வோம்.



படம் 7.23

குறிப்பாய் ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு அச்சுகளை (படம் 7.24 இல் xx, yy அச்சுகள்) எடுத்துக்கொள்வோம்.

வரையறைப்படி

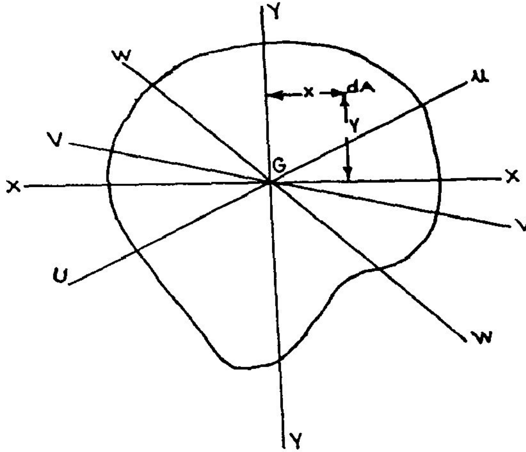
xx அச்சு மையம் கொண்ட உறழ்திருப்புமை $I_{xx} = \int y^2 \, dA$*
(Moment of Inertia about xx axis)

yy அச்சு மையம் கொண்ட உறழ்திருப்புமை $I_{yy} = \int x^2 \, dA$*

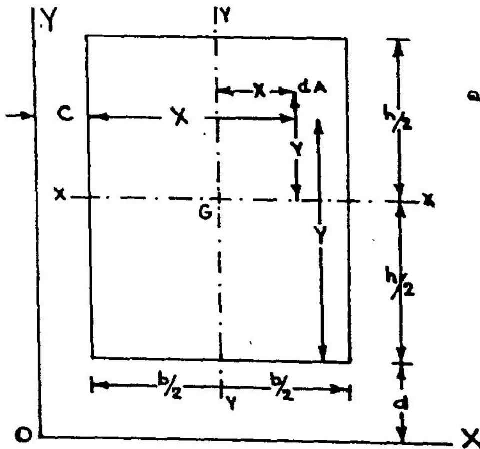
என உரைக்கலாம். இவற்றின் கணக்கீட்டினை எடுத்துக்காட்டுகளால் காண்போம்.

---

* இத்தொகையீடுகளை நேரடியாய்க் கணக்கிடல், ஒருசில, தெளிவாய் வரையறுக்கக் கூடிய உருவகங்களுக்கே இயலும். மற்ற உருவகங்களுக்கு, மறைமுகமான/தோராயமான முறைகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.



படம் 7.24



படம் 7.25

உறழ்பெருக்கம் (Product of Inertia):

$\int_A xy\, dA$ என்றதொரு தொகையத்தையும் உறழ்பெருக்கம் (Product of Inertia) என்னும் அளவாக வரையறுக்கின்றனர். இதன் பயனைப் பின்னர்க் காண்போம்.

எ.கா. 7.6

படம் 7.25 இல் அகலம் b, உயரம் h கொண்டதொரு செவ்வகமும், அதன் ஈர்ப்பு மையம் G இன் வழியே செல்லும் x, y அச்சுகளும் காட்டப்பட்டுள்ளன. அன்றியும், செவ்வகத்தின் அடிப்பக்கத்திற்குக் கீழே d தொலைவில் X அச்சும், இடப்பக்கத்திற்கு c தொலைவில் Y அச்சும் காட்டப்பட்டுள்ளன. (x, y) ஆயப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட பரப்புத் துணுக்கு dA உம் காட்டப் பட்டுள்ளது. இதனை dx அகலமும் dy உயரமும் கொண்டதொரு செவ்வகமாய்க் கருதி, dA = dx.dy எனக் கொள்வோம்.

வரையறைகளின்படி ,

$$= \int_A y^2\, dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\, dx\, .\, dy$$

அதாவது $I_{xx} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\, dy$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \cdot \frac{h^3}{12} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{xx} = \frac{b\,h^3}{12}$$

அவ்வாறே,

$$I_{yy} = \frac{b^3\,h}{12}$$

மேலும் $I_{xy} = \int xy\, dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} xy\, dx\, dy$

$$= \int_{-b/2}^{+b/2} x\, dx \int_{-b/2}^{+b/2} y\, dy = 0$$

x,y இரண்டு அச்சுகளில் ஏதாவது ஒன்றேனும் சமச்சீர் அச்சாக இருந்தாலே $I_{xy} = 0$ என்பதைக் கோவையின் அமைப்பிலிருந்தே உணரலாம்.

இனி, ஈர்ப்பு மையத்தின்வழிச் செல்லாத X,Y என்னும் அச்சுகளை மையங்கொண்ட உறழ்திருப்புமைகள் I_{XX}, I_{YY}, I_{XY} இவற்றினைக் காண முற்படுவோம்.

$$I_{XX} = \int_A y^2\, dA \text{ , எனில்}$$

$$Y = \left[y + \frac{h}{2} + d \right] \text{ எனக் கொள்ள,}$$

$$I_{XX} = \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-h/2}^{+h/2} \left(y + \frac{h}{2} + d \right)^2 dy \text{ எனலாம்.*}$$

$$\therefore \quad I_{XX} = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[y^2 + 2y \left(\frac{h}{2} + d \right) + \left(\frac{h}{2} + d \right)^2 \right] dy$$

$$= \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(y^2\, dy + 2y \left(\frac{h}{2} + d \right) dy + \left(\frac{h}{2} + d \right)^2 dy \right)$$

$$= \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \left[\frac{h^3}{12} + h \left(\frac{h}{2} + d \right)^2 \right]$$

$$I_{XX} = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} + d \right)^2$$

அவ்வாறே, $I_{YY} = \dfrac{b^3 h}{12} + b\,h \left(\dfrac{b}{2} + c \right)^2$ ஆகும்.

இங்குக் குறிப்பானதொரு விடையைக் காண $c = d = 0$ எனக் கொள்ளின்,

$$I_{XX} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3} \text{ எனவும்}$$

$$I_{YY} = \frac{b^3 h}{3} \text{ எனவும் பெறலாம்**.}$$

* இத் தொகையத்தில் குறிப்பாய்க் கவனிக்கவேண்டிய கருத்து: X அச்சிலிருந்து பரப்புத் துணுக்கு dA இன் செங்குத்துத் தூரம் Y தான் மாறுபடுகிறதேயன்றி, வடிவப் பரப்பை வரையறுக்கும் வரம்புகளாய $x = \pm b/2$; $y = \pm h/2$ மாறுபடுவதில்லை என்பதைத் தெளிவாக உணர வேண்டும்.

** உறழ்திருப்புமையின் (உறழ் பெருக்கத்தின்) களம் L^4 என்பதையும், அளவினை m^4, mm^4 போன்ற வசதியாய அலகுகளால் உரைக்கலாம் என்பதையும், உறழ்திருப்புமைக்காய் கோவைகளை ஊன்றி நோக்கி உணரலாம்.

இனி x, y அச்சுகள் மையமாகக்கொண்ட உறழ் பெருக்கத்தினைக் காண முற்படுவோம்.

$$I_{XY} = \int_{-b/2}^{b/2} \left(x + \frac{b}{2} + c\right) dx \int_{-h/2}^{+h/2} \left(y + \frac{h}{2} + d\right) dy$$

எனவே $$I_{XY} = \int_{-b/2}^{+b/2} \left(x + \frac{b}{2} + c\right) dx \int_{-h/2}^{+h/2} \left(y + d + \frac{h}{2}\right) dy$$

இத் தொகையத்தினைக் கணிக்க,

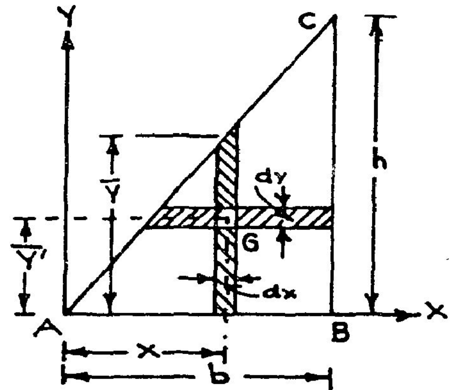
$$I_{XY} = bh\left(\frac{b}{2} + c\right)\left(\frac{h}{2} + d\right)$$ எனப் பெறலாம்.

$c = d = 0$ எனில்

$$I_{XY} = \frac{b^2 h^2}{4}$$

எ.கா. 7.7

பீடம் b உயரம் h கொண்டதொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் வடிவப் பண்புகளைக் காண முற்படுவோம். (படம் 7.26) செங்குத்துப் பக்கம் வலப்புறமாகக் கொண்ட இம் முக்கோணத்தின் ஆயமையத்தை இடமுனை (A) யில் கொள்ள ஈர்ப்பு மையத்தின் ஆயங்களை G (2/3 b, h/3) என வரையறுக்கலாம்.



படம் 7.26

$$I_{xx} = \int y^2 \, dA$$

$$\bar{y} = \frac{h}{b} x$$ என்பதைப் பயன்படுத்த

$$I_{xx} = \int_0^b dx \int_0^{\bar{y}} y^2 \, dy$$ எனப் பெறுகிறோம்.

அஃதாவது $$I_{xx} = \int_0^b dx \int_0^{\frac{h}{b}x} y^2 \, dy$$

$$= \int_0^b \frac{dx}{3} \frac{h^3 x}{b^3} x^3$$

$$= \frac{h^3}{3b^3} \frac{b^4}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

அவ்வாறே $I_{yy} = \frac{b^3 h}{12}$ எனப் பெறலாம்.

இனி ஈர்ப்புமையம் வழிச் செல்லும் x, y அச்சுகள் மையம் கொண்ட உறழ்திருப்புமைகளை நோக்குவோம். ஈர்ப்பு மையத்தை ஆய மையமாகக் கொண்ட ஆயத்தொலைகள் (x, y) எனின்,

$$x = x - \frac{2}{3} b$$

$$y = y - \frac{h}{3}$$ என்பதை அறியலாம். எனவே

$$I_{xx} = \int_0^b dx \int_0^{h/b \cdot x} \left(y - \frac{h}{3} \right)^2 dy$$

$$= \int_0^b dx \int_0^{\frac{h}{b}x} \left(y^2 - \frac{2}{3} yh + \frac{h^2}{9} \right) dy$$

$$= \int_0^b dx \left[\frac{1}{3} \left(\frac{h}{b} x \right)^3 - \frac{2}{3} \frac{h}{2} \left(\frac{h}{b} x \right)^2 + \frac{h^2}{9} \frac{h}{b} x \right]$$

$$= \int_0^b dx \left[\frac{1}{3} \frac{h^3}{b^3} x^3 - \frac{h^3 x^2}{3b^2} + \frac{h^3}{9b} x \right]$$

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{36}$$

அவ்வாறே

$$I_{yy} = \frac{b^3 h}{36} \qquad (7.9)$$

இனி உறழ்பெருக்கத்தினை

$$I_{xy} = \int_0^b (x - \tfrac{2}{3}b)\,dx \int_0^{\frac{h}{b}x} (y - \tfrac{h}{3})\,dy$$

என உரைக்கலாம்.

அஃதாவது $$I_{xy} = \int_0^b (x - \tfrac{2}{3}\,b) \left(\frac{h^2}{b^3}\,\frac{x^2}{2} - \frac{h}{3}\,\frac{h}{b} \right)$$

$$= \int_0^b \left[\frac{h^2}{2b^2}\,x^3 - x^2 \left(\frac{1}{3}\,\frac{h^2}{b} + \frac{1}{3}\,\frac{h^2}{b} + \frac{2}{9}\,h^2 x \right) \right] dx$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{72} \qquad (7.10)$$

இவ்வாறே பல்வேறு உருவங்களின் வடிவப் பண்புகளையும் அடிப்படை வரையறையிலிருந்தே பெற முடியும். எனினும், இக்கணக்கீட்டை எளிமையாக்கும் **இணை அச்சுத் தேற்றம்** (Parallel Axis Theorem) மிகப் பயனுடையது.

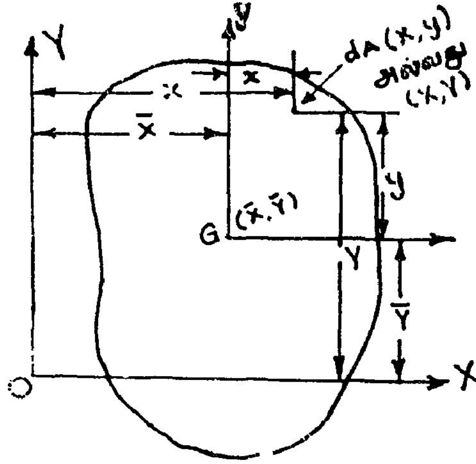
(குறிப்பு: சமன்பாடு 7.9 செங்கோணமுக்கோணங்களுக்கு மட்டுமின்றி எல்லா முக்கோணங்களுக்கும் பொருந்தும். ஆனால் சமன்பாடு 7.10 செங்கோண முக்கோணங்களுக்கு மட்டுமே பொருந்தும்).

7.4 இணை அச்சுத் தேற்றம் (Parallel Axis Theorem)

இத் தோற்றத்தினைத் தருவிக்கப்படம் 7.27 காட்டப்பட்டுள்ள வடிவப் பரப்பிற்கு X, Y அச்சுகளை * மையமாய்கொண்டு வடிவப் பண்புகளைக் காண முற்படுவோம். முதலில் பரப்பின் ஈர்ப்பு மையம் G ($\bar{X}$, $\bar{Y}$) வழியே X, Y திசைகளுக்கு இணையாய்ச் செல்லும் x, y அச்சுகளையும் குறிப்பிடுவோம். (X, Y) அல்லது (X, Y) ஆயங்கள் கொண்ட ஒரு பரப்புத் துணுக்கு dA வை எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம் வரையறைகளிலிருந்து

---

* X, Y (அல்லது x, y) அச்சுகளைப் பெரும்பாலும் கிடை, நெடுந்திசைகளில் (Horizontal and Vertical) கொள்வது வசதிக்காகவேயன்றிக் கட்டாயமில்லை. அவ்விரண்டும் ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தாய் இருக்க வேண்டும்; அவ்வளவே.



படம் 7.27

$$I_{XX} = \int_A Y^2\, dA \;;\quad I_{YY} = \int_A X^2\, dA \;;$$

$$I_{XY} = \int_A XY\, dA$$

எனப் பெறலாம்.

இவற்றுள் $X = x + \bar{x}$; $Y = y + \bar{y}$

என்ற உறவுகளைப் பயன்படுத்த,

$$I_{XX} = \int_A (y + \bar{y})^2\, dA$$

$$= \int_A (y^2 + 2\bar{y}y + \bar{y}^2)\, dA$$

$$= \int_A y^2\, dA + 2\bar{y} \int_A y dA + \bar{y}^2 \int_A dA \qquad (7.11)$$

சமன்பாடு 7.11 இல்

$$\int_A y^2\, dA = I_{xx} \;;\; \int_A y dA = 0,\; \int_A dA = A$$

என அறிவோம். எனவே,

$$I_{XX} = I_{xx} + A\bar{y}^2 \tag{7.12}$$

சமன்பாடு 7.12 தரும் முடிவையே இணை அச்சுத் தேற்றம் (Parallel axis Theorem) என அழைக்கின்றோம். இதனைச் சொற்களால் உரைக்கப்படுகின்,

ஒருவடிவப் பரப்பிற்குக் கொடுக்கப்பட்டதொரு அச்சினை மையமாகக் கொண்ட உறழ்திருப்புமையின் அளவு, அவ்வச்சிற்கு இணையாகப் பரப்பின் ஈர்ப்புமையம்வழியே செல்லும் அச்சினை ம்மையமாய்க் கொண்ட உறழ்திருப்புமையுடன், பரப்பளவு, கொடுக்கப்பட்ட அச்சிலிருந்து ஈர்ப்பு மையத் தூரத்தின் இருபடி இவற்றின் பெருக்கல் தொகையைக் கூட்டுற்குச் சமமாகும்.

இத் தேற்றத்தின் மாற்று வெளிப்பாடுகள்

$$I_{XY} = I_{yy} + A\bar{x}^2 \tag{7.13}$$

$$I_{XY} = I_{xy} + A\bar{X}\,\bar{Y} \tag{7.14}$$

என்பனவாம். இணைஅச்சுத் தேற்றத்தின் பயன்பாட்டைச் சில எடுத்துக்காட்டுகளால் விளக்குவோம்.

எ.கா. **7.8**

படம் 7.6 இல் தரப்பட்டுள்ள வடிவப் பரப்பின் உறழ்திருப்புமை I_{xx} - காண்க. (x, y அச்சுகளை மொத்தப் பரப்பின் ஈர்ப்புமையம் வழியே செல்லும் அச்சுகளாகவே கொள்வோம்).

இவ் உருவின் ஈர்ப்பு மையம் அடியிலிருந்து 91.84 cm உயரத்தில் உள்ளது (எ.கா. 7.1 காண்க). இப் பரப்பினை இரண்டு பகுதிகளாய்ப் பிரித்து அவற்றின் வடிவப் பண்புகளை நோக்க,

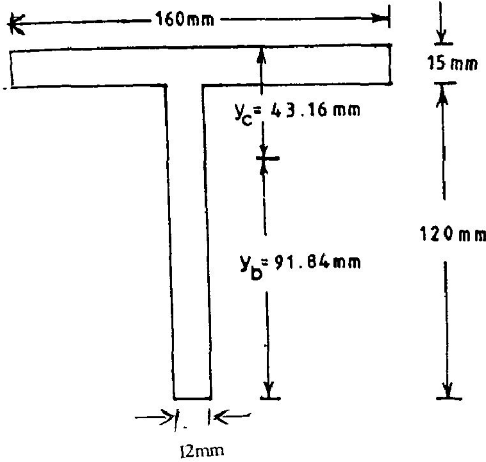
$$A_1 = 160 \times 15 = 2400 \text{ mm}^2$$

$$\bar{x}_1 = 112.5 - 91.84 = 20.66 \text{ mm}$$

$$A_2 = 12 \times 105 = 1260 \text{ mm}^2$$

$$\bar{x}_2 = 52.5 \times 91.84 = 39.34$$

A_1, A_2 ஆகிய பரப்புகளுக்கு அவ்வவற்றின் ஈர்ப்பு மைய அச்சுகளைக் கொண்டு வரையறுக்கப்படும் உறழ்திருப்பு மைகளை I_{x1}, I_{x2}, I_{y1}, I_{y2}, I_{xy1}, I_{xy2} என்னும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவோம்.



படம் 7.28

$$I_{x1} = \frac{1}{12} \times 160 \times 15^3$$

$$= 4.5\ 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{x2} = \frac{1}{12} \times 12 \times 105^3$$

$$= 1.1576 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

எனவே $I_{xx} = 4.5 \times 10^4 + 2400 \times 20.66^2 + 1.1576 \times 10^6 + 1260 \times (39.34)^2$

$$= 4.17705 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

மொத்தப் பரப்பின் y அச்சும் A_1 A_2. ஆகிய பகுதிகளின் y அச்சும் ஒன்றேயாதலின்,

$$I_{yy} = I_{y1} + I_{y2}$$

$$= \frac{1}{12} \times 15 \times 160^3 + \frac{1}{12} \times 105 \times 12^3$$

$$= 5.13512 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Ixy = 0 (y அச்சு சமச்சீர் அச்சாயிருத்தலின்)

எ.கா. 7.9

படம் 7.29 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வடிவப் பரப்பின் வடிவப் பண்புகளைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 3-லிருந்து (இடக்கீழ்முனையை ஆய மையமாய்க் கொண்ட) ஈர்ப்புமையம் (2.8, 54) எனும் புள்ளியே எனக் காணலாம். மொத்தப் பரப்பினையும் மூன்று பிரிவுகளாகக் கருத.

$A_1 = 80 \times 20 = 1600 \text{ mm}^2$

$\bar{x}_1 = 40 - 28 = 12 \text{ mm}$

$\bar{y}_1 = 90 - 54 = 36 \text{ mm}$

$A_2 = 20 \times 60 = 1200 \text{ mm}^2$

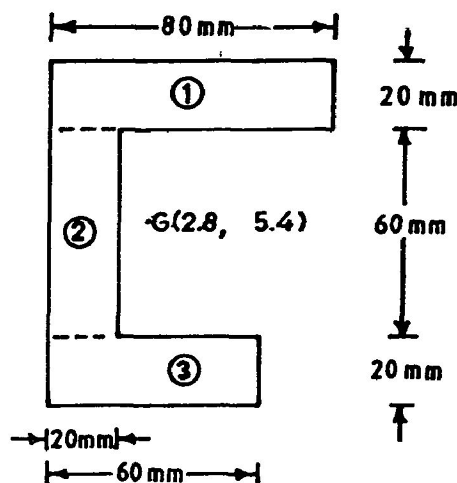
$\bar{x}_2 = 10 - 28 = -18 \text{ mm}$

$\bar{y}_2 = 50 - 54 = -4 \text{ mm}$

$A_3 = 60 \times 20 = 1200 \text{ mm}^2$

$\bar{x}_3 = 30 - 28 = 2 \text{ mm}$

$\bar{y}_3 = 10 - 54 = -44 \text{ mm}$



படம் 7.29

$I_{x1} = \frac{1}{12} \times 80 \times 20^3$

$= 5.333 \times 10^4 \text{ mm}^4$

$I_{y1} = \frac{1}{12} \times 80^3 \times 20$

$= 8.5333 \times 10^5 \text{ m}^4$

$I_{xy1} = 0$

$I_{x2} = \frac{1}{12} \times 20 \times 60^3 = 3.6 \times 10^5 \text{ mm}^4$

$I_{y2} = \frac{1}{12} \times 20^3 \times 60 = 4 \times 10^4 \text{ mm}^4$

$I_{xy2} = 0$

$I_{x3} = \frac{1}{12} \times 60 \times 20^3 = 4 \times 10^4 \text{ mm}^4$

$I_{y3} = \frac{1}{12} \times 60^3 \times 20 = 3.6 \times 10^5 \text{ mm}^4$

$I_{xy3} = 0$

இவற்றிலிருந்து

$$I_{xx} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + A_1 \bar{y}_1^2 + A_2 \bar{y}_2^2 + A_3 \bar{y}_3^2$$

$$= 5.333 \times 10^4 + 3.6 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 1600 \times 36^2$$

$$+ 1200 (-4)^2 + 1200 \times (-44)^2$$

$$= 4.86933 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + A_1 \bar{x}_2^2 + A_2 \bar{x}_2^2 + A_3 \bar{x}_3^2$$

$$= 85333 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 3.6 \times 10^5 + 1600 \times 12^2$$

$$+ 12000 \times (-18)^2 + 1200 \times 2^2$$

$$= 1.87733 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = I_{xy_1} + I_{xy_2} + I_{xy_3} + A_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{x}_2 \bar{y}_2 + A_2 \bar{x}_2 \bar{y}_2 + A_3 \bar{x}_3 \bar{y}_3$$

$$= 0 + 0 + 0 + 1600 \times 12 \times 36 + 1200$$

$$\times (-18) \times (-4) + 1200 \times (-44) \times (2)$$

$$= 6.72 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

7.5 முனை உறழ்திருப்புமை (Polar Moment of Inertia)

உறழ்திருப்புமை என்பது தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதொரு அச்சினை அடிப்படையாகக் கொண்டே வரையறுக்கப்படுகிறது என்பதைக் கண்டோம். படம் 7.23 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அச்சுகள் யாவும் வடிவப் பரப்பின் தளத்திலேயே இருப்பதைக் காணலாம். இவற்றுக்கு மாறாய் ஈர்ப்பு மையத்தின் வழியே வடிவப் பரப்பின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாய திசையில் செல்லும் அச்சினை மையமாய்க் கொண்ட உறழ்திருப்புமையை முனை உறழ்திருப்புமை (Polar Moment of Inertia) என வரையறுக்கின்றோம். இவ் அச்சிலிருந்து பரப்புத்துணுக்கு dA இன் தூரத்தை r எனக் குறிப்பிடில்,

முனைஉறழ்திருப்புமை $I_p = \int_A r^2 \, dA$ (7.14)

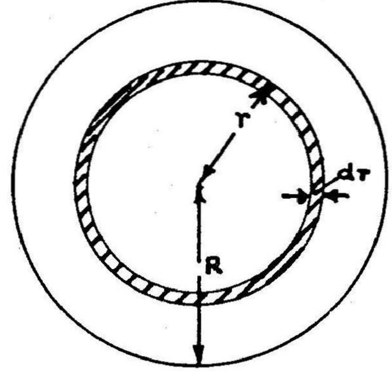
என உரைக்கப்படலாம்.

வடிவ கணிதத்திலிருந்து $r^2 = x^2 + y^2$

எனவே, $$I_p = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int x^2\, dA + \int y^2\, dA$$

அஃதாவது $$I_p = I_{xx} + I_{yy} \qquad (7.15)$$

வட்டப்பரப்பின் உறழ்திருப்புமைகளை நேரடியாய்க் கணக்கிடுதலைவிட முனை உறழ்திருப்பு மையிலிருந்து காண்டல் எளிதாகும். படம் 7.30 இல் காட்டப் பட்டுள்ள வட்டப் பரப்பின் மையத்தி லிருந்து ஆரத் தூரம் r தொலைவில் உள்ளதும், கனம் dr கொண்டதுமான தொரு சிறுவளையத்தைப் பரப்புத் துணுக்காகக் கொண்டால்,



படம் 7.30

$$dA = 2\pi r\, .\, dr$$

முனைஉறழ்திருப்புமை $I_P = \int_A r^2\, dA$

$$= \int_0^R r^2\, .\, 2\pi r\, .\, dr$$

அஃதாவது $$I_P = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \qquad (7.16)$$

இனித் தளத்தின்வழிச் செல்லும் அச்சுகளை மையங்கொண்ட உறழ்திருப்புமைகளைக் காண முற்படுவோம். வட்டப் பரப்பின் மைய வடிவச் சீர்மை (Axi symmetry) காரணமாய், மையத்தின் வழியே (பரப்பின் தளத்தில் செல்லும்) எந்தவொரு அச்சினை மையங்கொண்ட உறழ்திருப்புமைகளாய் இருப்பினும் அவை எல்லாம் ஒரே அளவாய் இருக்க வேண்டும் என்பதை உணரலாம். இதிலிருந்து

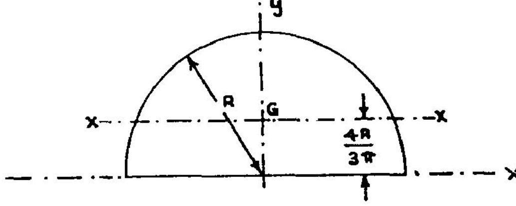
$I_{xx} = I_{yy}$ என்பது தெளிவு

எனவே $I_p = I_{xx} + I_{yy} = 2I_{xx} = 2\, I_{yy}$ ஆகும்.

ஆகவே $$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

எனப் பெறுகிறோம்.

அரைவட்டப் பரப்பின் உறழ்திருப்புமை :



படம் 7.31

ஒரு வட்டத்தினை விட்டம் இரண்டு சமபாகங்களாய்ப் பிரிக்கிறது. அதனால், விட்டத்தை மையங்கொண்ட மொத்தப் பரப்பின் உறழ்திறனில பாதியே அரை வட்டத்தின் (விட்டத்தை மையங்கொண்ட) உறழ் திருப்புமையாகும்

அதனால், அரைவட்டத்தின் $I_{xx} = \frac{\pi R^4}{8}$

இணைஅச்சுத் தோற்றத்தின்படி

$$I_{xx} = I_{xx} + A\bar{y}^2$$

அஃதாவது $\frac{\pi R^4}{8} = I_{xx} + \frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$

எனவே, $I_{xx} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{R^2}{2}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$

$$= R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{16\pi}{18\pi^2}\right)$$

$$I_{xx} = 0.10976\ R^4$$

எ.கா. 7.10

படம் 7.32 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வடிவப் பரப்பின் உறழ்திறன் I_{xx} காண்போம். இதனை மூன்று சிறு பரப்புகளாகப் பிரித்து, AA என்னும் அச்சினைத் தற்காலிக அடிப்படையாய்க் கொள்ள,

$$A_1 = \frac{1}{2} \times 12 \times 9 = 54\ m^2$$

$$\bar{y}_1 = 6 + 15 \times \frac{9}{3} = 24\ m$$

$$A_2 = 12 \times 15 = 180\ m^2$$

$\bar{y}_2 = 6 + \frac{15}{2} = 13.5 \text{ m}$

$A_3 = \frac{\pi \times 6^2}{2} = 56.549 \text{ m}^2$

$\bar{y}_3 = 6 - \frac{4 \times 6}{3\pi} = 3.4535 \text{ m}$

இவற்றிலிருந்து

ஈர்ப்பு மையத்தின் y ஆயம்

$$\bar{y} = \frac{54 \times 24 + 180 \times 13.5 + 56.549 \times 3.4535}{54 + 180 + 56.549}$$

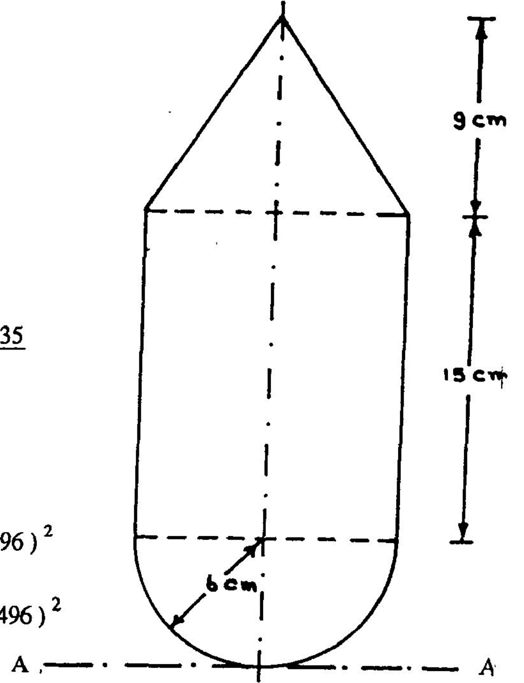
$$= 13.496 \text{ m}$$

எனவே $I_{xx} = \frac{1}{36} \times 12 \times 9^3 + 54\,(24 - 13.496)^2$

$$+ \frac{1}{12} \times 12 \times 15^3 + 180\,(13.5 - 13.496)^2$$

$$+ .10976 \times 6^4 + 56.549\,.(3.4535 - 13.496)^2$$

$$= 15421.36 \text{ m}^4$$



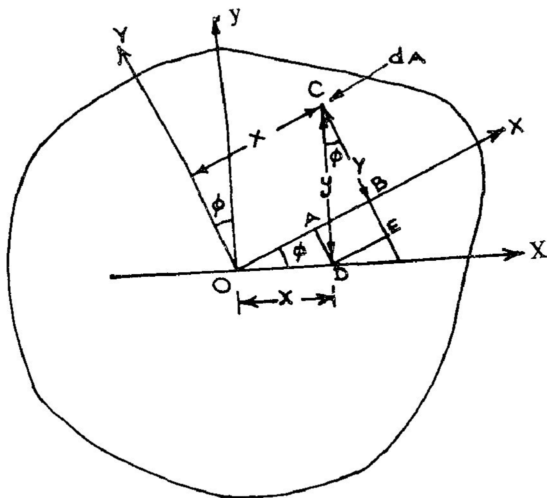
படம் 7.32

பயிற்சி 7.2

படங்கள் 7.12 இலிருந்து 7.22 வரை கொடுக்கப்பட்டுள்ள வடிவப் பரப்புகளுக்கு அவ்வவற்றின் ஈர்ப்பு மையங்களின் வழியே செல்லும் x,y அச்சுகளை மையங் கொண்ட I_{xx}, I_{yy}, I_{xy} எனும் மதிப்புகளைக் காண்க.

7.6 முதனிலை உறழ்திருப்புமைகள் (Principal Moments of Inertia)

பயிற்சி 7.2 இல் ஈர்ப்புமையத்தின் வழியே செல்லும் ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தான இரு அச்சுகளை மையங் கொண்ட உறழ்திருப்புமைகளைக் கணக்கிடுவதில் போதிய தேர்ச்சி கிட்டுகிறது. இவ்விரு அச்சுகளேயன்றியும் ஈர்ப்பு மையத்தின் வழியே எண்ணற்ற பல்வேறு அச்சுகள் செல்ல முடியும். ஒவ்வொரு அச்சினையும் மையங்கொண்டு கணக்கிடப்படும் உறழ்திருப்புமைகளின் அளவுகள் மாறுபடும். இவ் அளவுகளில் உச்ச மதிப்புள்ள உறழ் திருப்புமை, மிகத் தாழ்ந்த மதிப்புள்ள உறழ்திருப்புமை இரண்டும் முதனிலை உறழ்திருப்புமைகள் (Principal Moments of Inertia) என அழைக்கப்படுகின்றன.



படம் 7.33

இவை காணும் முயற்சிக்குத் துணை யாகப் படம் 7.33 ஐ நோக்குவோம். ஒரு பொதுவான பரப்பின் ஈர்ப்புமையம் O வின் வழியே செல்லும் x, y அச்சுகளும் இவ் அச்சு களிலிருந்து φ அளவு கோணம் சுழன்று அமையும் X, Y அச்சுகளும் காட்டப்பட் டுள்ளன. ஒரு பரப்புத் துணுக்கு dA இன் ஈர்ப்பு மையத்தின் ஆயங்கள் (x, y) எனவே, மாற்று ஆயத் திட்டத்தின் கீழ் (X, Y) எனவோ குறிப்பிடப்படுகின்றன. படத்தி லிருந்து

x = OD;   y = DC;   X = OB;   Y = BC

ஆக இருத்தலைக் காண்கிறோம். இருவேறு திட்டங்களின் ஆயங்களுக்கிடையேயான உறவுகளை முதலில் நிறுவுவோம்.

X = OB = OA + AB = OA + DE

அஃதாவது $X = OD \cos\varphi + DC \sin\varphi$

எனவே, $X = x \cos\varphi + y \sin\varphi$

மற்றும், $Y = BC = CE - BE = CE - AD$

அஃதாவது, $Y = DC \cos\varphi - OD \sin\varphi$

எனவே, $Y = y \cos\varphi - x \sin\varphi$ (7.18)

சமன்பாடுகள் (7.17), (7.18) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி,

$$I_{xx} = \int Y^2\, dA = \int (y \cos\varphi - x \sin\varphi)^2\, dA$$

$$= \int y^2 \cos^2\varphi\, dA - \int 2xy \cos\varphi \sin\varphi\, dA + \int x^2 \sin^2\varphi\, dA$$

$$= \cos^2\varphi \int y^2\, dA - 2 \cos\varphi \sin\varphi \int xy\, dA + \sin^2\varphi \int x^2\, dA$$

அஃதாவது,

$$I_{XX} = I_{xx}\cos^2\varphi + I_{yy}\sin^2\varphi - I_{xy}\, 2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$= \frac{I_{xx}}{2}\left[\cos^2\varphi + (1 - \sin^2\varphi)\right] +$$

$$\frac{I_{yy}}{2}\left[\sin^2\varphi + (1 - \cos^2\varphi)\right] - I_{xy}\sin^2\varphi$$

எனவே

$$I_{XX} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi \qquad (7.19)$$

இவ்வாறே,

$$I_{YY} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\cos 2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi \qquad (7.20)^*$$

அல்லது

$$I_{XY} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi \qquad (7.21)$$

எனவும் பெறலாம்.

சமன்பாடு 7.19 ஒரு பொதுவான கோணம் (φ) சுழன்ற அச்சினை மையங்கொண்ட உறழ்திருப்புமைக்கான கோவையைத் தருகிறது. இக்கோவையில் (φ) ஒன்றே மாறி, மற்ற அளவுகள் மாறிலிகளே. அதனால், I_{XX} இன் மிக உச்ச மதிப்பினையோ, மிகத் தாழ்ந்த மதிப்பினையோ பெறுதற்கு, நமது கலன கணித அறிவினால்,

$$\frac{d(I_{XX})}{d\varphi} = 0$$ ஆக இருக்க வேண்டும் என்பதைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\frac{d(I_{xx})}{d\varphi} = -\left[\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right] 2\sin 2\varphi - 2\, I_{xy}\cos 2\varphi$$

---

* சமன்பாடு (7, 20) ஐத் தனியே நிறுவ வேண்டிய அவசியமில்லை. சமன்பாடு (7, 19) இல் சுழல்கோணம் φ க்குப் பதிலாய் ($\varphi + 90°$) பயன்படுத்த சமன்பாடு (7, 20) ஐ நேரடியாய்ப் பெறலாம்.

$$= \quad -2\left[\frac{(I_{xx} - I_{yy})}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi\right]$$

அஃதாவது

$$\frac{d I_{XX}}{d\varphi} = -2 I_{XY} \tag{7.22}$$

எனவே I_{XX} மிக உச்ச மதிப்போ, மிகத் தாழ்ந்த மதிப்போ அடையும் ஆயத் திட்டத்தில் $I_{XY} = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும் என்பதை உணர்கிறோம். இந்நிலை பூர்த்தி செய்யும் ஆய அச்சுகளைக் காண,

$$I_{XY} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$= \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{-I_{xy} \cdot 2}{(I_{xx} - I_{yy})}$$

$$\therefore \quad \tan 2\varphi = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \tag{7.23}$$

கோணக் கணித (Trignometry) உறவுகளைப் பயன்படுத்த ,

$$\text{Cos } 2\varphi = \frac{I_{yy} - I_{xx}}{2\sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{yy})}{2}^{2} + I_{xy}^{2}}} \tag{7.24}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{xy})}{2}^{2} + I_{xy}^{2}}} \tag{7.25}$$

இவற்றைச் சமன்பாடு 7.19இல் பயன்படுத்த

$$(I_{XX})_{max, min} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{yy})^2}{2} + I_{xy}^2} \tag{7.26}$$

சமன்பாடு (7, 23)க்கு இரண்டு தீர்வுகள் உள. அவையாவன,

$$2\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}\right), \ \tan^{-1}\left(\frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xy}}\right) + 180^\circ$$

அஃதாவது, இவ் இரண்டு கோணங்களையும் φ , $\varphi + 90^\circ$ எனக் காண்பதனால் இவை குறிப்பிடும் அச்சுகளும் ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தாயிருக்குமெனக் காண்கிறோம். இவ்வச்சுகளை மையமாய்க் கொண்ட உறழ்திருப்புமைகள் முதனிலை உறழ்திருப்புகளா யிருத்தலின் இவ்வச்சுகள் முதனிலை உறழ் அச்சுகள் (Principal Axes of Inertia) என வரையறுக்கப்படுகின்றன. முதனிலை உறழ் திருப்புமைகளில் மிக உச்ச மதிப்புக் கொண்டதனை மேல்முதனிலை உறழ்திருப்புமை (Major Principal Moment of Inertia) என்றும் மற்றதனைக் கீழ்முதனிலை உறழ்திருப்புமை (Minor Principal Moment of Interia) என்றும் அழைத்து, இவற்றை முறையே I_1, I_2 என்னும் குறியீடுகளால் வழங்குகிறோம். எவ் அச்சினை மையமாகக் கொண்டால் உறழ்திருப்புமை உச்ச அளவினதாய் இருக்கின்றதோ அதனை மேல்முதனிலை உறழ்அச்சு (Major Principal Axis of Inertia) என்றும், மற்றதைக் கீழ் முதனிலை உறழ்அச்சு (Minor Principal Axis of Inertia) என்றும் அழைக்கின்றோம்.

மேல் முதனிலை உறழ்அச்சின் திசை காண,

இரண்டு முதனிலை அச்சுகளில் எது மேல் முதனிலை அச்சு என்பதனைக் காண, இவ் அச்சினை மையம் கொண்ட உறழ்திருப்புமை உச்ச அளவாக இருப்பதற்குரிய கலன கணித உறவான, $\frac{d^2 I_{XY}}{d^2\varphi} < 0$ என்பதினைப் பயன்படுத்தலாம். சமன்பாடு (7.22) இதிலிருந்து,

$$\frac{d^2 I_{XX}}{d^2\varphi} = -2\frac{d I_{XY}}{d\varphi} \qquad (7.27)$$

அஃதாவது $\frac{d^2 I_{xx}}{d\varphi^2}$ நேர்மறையாகவே இருக்க வேண்டும்.

அஃதாவது $\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi\right] > 0$

$$\therefore \left[(I_{xx} - I_{yy})\cos 2\varphi - 2I_{xy}\sin 2\varphi\right] > 0$$

$$(I_{xx} - I_{yy})\cos 2\varphi > 2I_{xy}\sin 2\varphi \qquad (7.28)$$

சமனிலி 7.28 ஐப் பயன்படுத்தி, மேல் முதனிலை அச்சின் திசையைக் கண்டுபிடித்து, மற்றதனைக் கீழ்முதனிலை அச்சாகக் கொள்ளலாம். முதனிலை உறழ்திறன்களை ஆய்வதில் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

எ.கா. 7.11

படம் 7.29 (எ.கா.9) இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள உருவப் பரப்பின் முதனிலை உறழ்திறன்களையும், முதனிலை உறழ்அச்சுக்களையும் காண்க.

எ.கா. 9 இதிலிருந்து

$$I_{xx} = 4.86933 \times 10^6 \text{ mm}^4 ; \quad I_{yy} = 1.87733 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 0.672 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

எனவே,

$$I_1 = 10^6 \left[\frac{4.86933 + 1.87733}{2} + \sqrt{\frac{(4.86933 - 1.87733)^2}{2} + 0.672^2} \right]$$

$$= 10^6 (3.37333 + 1.64) = 5.01333 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = 10^6 (3.37333 - 1.64) = 1.7333 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

முதனிலை உறழ்அச்சுகளின் திசை காண,

$$\tan 2\varphi = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{2 \times .672 \times 10^6}{(1.87733 - 4.86922)\, 10^6} = 0.4492$$

$$2\varphi = -24° \, 11' \, 22'', \; 155° \, 48' \, 38''$$

$$\varphi = -12° \, 5' \, 41'', \; 77° \, 54' 19''$$

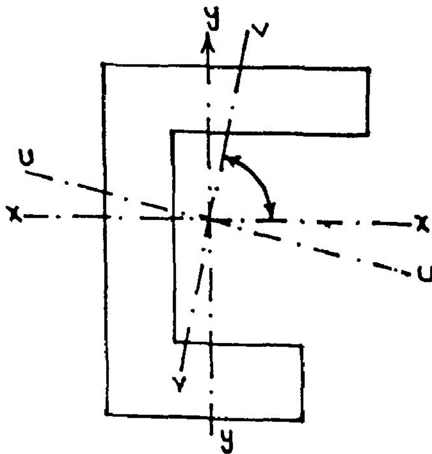
சமனிலி 7.28 இல் $2\varphi = -24° \, 11' \, 44''$ எனக் கொள்ள

$$(I_{xx} - I_{yy}) \cos 2\varphi = 272.91$$

$$2 \, I_{xy} \sin 2\varphi = -55.092$$

எனவே $\varphi = -12° \, 5' \, 41''$ ($\cdot 2111^c$) எனும் அச்சு மேல்முதனிலை உறழ்அச்சாக விளங்கக் காண்கிறோம்.* இவ் அச்சின் சுழல்கோணத்தை φ_1 என்னும் குறியீட்டால் வழங்கலாம். அதன்படி,

$$\varphi_1 = -12° \, 5' \, 41'' \; ; \; \varphi_2 = 77° \, 54' \, 19''$$



படம் 7.34

* $I_{xx} > I_{yy}$; $I_{xy} > 0$ எனில் uu அச்சின் சுழல்கோணம் φ_1 கடிகாரச் சுழல்திசையிலேயே இருக்கும்.

இவ் அச்சுகளை u,v அச்சுகள் என்று குறிப்பிடும் மரபும் உண்டு. uu, vv அச்சுகள் படம் 7.34 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

எ.கா. 7.12

படம் 7.35 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வெட்டுமுகத்தின் முதனிலை உறழ்திருப்பு மைகளையும், முதனிலை அச்சுகளையும் கண்டுபிடிக்க,

பரப்பினைப் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு மூன்று செவ்வகப் பிரிவுகளாகக் கொள்ளின், மொத்தப் பரப்பின் ஈர்ப்புமையம், இரண்டாம் செவ்வகத்தின் ஈர்ப்பு மையத்துடன் ஒன்றுவதை எளிதிற் காணலாம்.

$$A_1 = A_3 = 20 \times 84 = 1680 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 20 \times 240 = 4800 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 4800 + 2 \times 1680 = 8160 \text{ mm}^2$$

$$I_{xx} = \left(\frac{1}{12} \times 84 \times 20^3 + 1680 \times 10^2\right) \times 2 + \frac{1}{12} \times 240^3$$

$$= 6.3808 \times 10^7$$

$$I_{yy} = \left(\frac{1}{12} \times 84^3 \times 20 + 168 \times 52^2\right) \times 2 + \frac{1}{12} \times 20^3 \times 240$$

$$= 1.122112 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = (0 + 1680 \times (-52) \times 110) + 1680\,(0 + 1680 \times 52x\,(-110)$$

$$= -1.92192 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_1\,(I_{uu}) = \frac{6.3808 \times 10^7 + 1.122 \times 10^7}{2}$$

$$+ \left\{ \frac{(6.3808 \times 10^7 - 1.122 \times 10^7)^2}{2} + (-1.92192 \times 10^7)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= 3.7515 \times 10^7 + 1.7943 \times 10^7 = 5.546 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_2\,(I_{vv}) = 3.7515 \times 10^7 - 1.7743 \times 10^7 = 1.957 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

முதனிலை அச்சுகள் காண (சமன்பாடு 7.23 கொண்டு)

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \times (1.9211 \times 10^7)}{1.122 \times 10^7 - 6.3808 \times 10^7} = 0.731$$

$$2\varphi = 36.16°,\ 216.16°$$

அல்லது

$$\varphi = 18.08°,\ 108.08°$$

சமனிலி 7.28 ஐப் பயன்படுத்தி.

$\varphi_1 = 18.08°$; $\varphi_2 = 108.08°$ எனக் காணலாம். uu, vv அச்சுகள் படம் 7.34 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

எ.கா. 7.13

படம் 7.35 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வெட்டுமுகத்திற்கு x அச்சிலிருந்து 30° சுழல்கோணம் கொண்ட ss அச்சை மையங்கொண்ட உறழ்திருப்புமையும், ss அச்சிற்குச் செங்குத் தான tt அச்சினை மையங்கொண்ட உறழ் திருப்புமையும், ss, tt அச்சுகளை மையங் கொண்ட உறழ்பெருக்கமும் காண்க.

படம் 7.35

$$I_{ss} = \frac{6.3808 \times 10^7 + 1.122 \times 10^7}{2}$$

$$+ \frac{6.3808 \times 10^7 - 1.122 \times 10^7}{2} \cos 60°$$

$$+ 1.92192 \times 10^7 \sin 60°$$

$$= 6.7306 \times 10^7\ mm^4$$

$$I_{tt} = \frac{6.3808 \times 10^7 + 1.122 \times 10^7}{2}$$

$$+ \frac{6.3808 \times 10^7 - 1.122 \times 10^7}{2} \cos 240°$$

$$- (1.92192 \times 10^7) \sin 240°$$

$$= 3.4017 \times 10^7\ mm^4$$

$$I_{st} = \frac{6.3808 \times 10^7 - 1.12192 \times 10^7}{2} \sin 60°$$

$$+ (-1.92192 \times 10^7) \cos 60°$$

$$= 1.316 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

எ.கா. 7.14

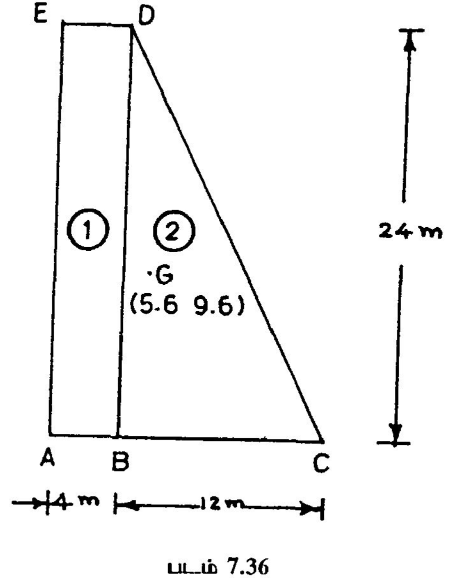
படம் 7.36 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெட்டுமுகத்தின் முதனிலை அச்சுகளையும், முதனிலை உறழ்திருப்புமைகளையும் காண்க.

பரப்பின் இரண்டு பிரிவுகள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. முனை A ஐ ஆயமைய மாகக் கொள்ள,

$A_1 = 4 \times 24 = 96 \text{ m}^2$; $x_1 = 2\text{m}$; $y_1 = 12$ m

$A_2 = ½ \times 12 \times 24 = 144 \text{ m}^2$;

$$x_2 = 4 + \frac{12}{3} = 8 \text{ m} ; \quad y_2 = \frac{24}{3} = 8\text{m}$$



படம் 7.36

இதிலிருந்து

$$\bar{x} = \frac{96 \times 2 + 144 \times 8}{96 + 144} = \frac{192 + 1152}{240}$$

$= 5.6$ m

$$\bar{y} = \frac{96 \times 12 + 144 \times 8}{240} = 9.6 \text{ m}$$

இனி G ஐ ஆயமையமாய்க் கொண்டு புதிய ஆய தூரங்களைக் கணக்கிட,

$x_1 = 2 - 5.6 = -3.6$ m ; $\quad y_1 = 12 - 9.6 = 2.4$ m

$x_2 = 8 - 5.6 = +3.6$ m ; $\quad y_2 = 8 - 9.6 = -1.6$ m

இவற்றிலிருந்து

$$I_{xx} = \left(\frac{1}{12} \times 4 \times 24^3\right) + 96 \times 2.4^2 + \frac{1}{36} \times 12 \times 24^3 + 144 \times (1.6)^2$$

$$= 10137.6 \text{ m}^4$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} \times 4^3 \times 2 + 96 \times 3.6^2 + \frac{1}{36} \times 12^3 \times 24 + 144 \times 2.4^2$$

$$= 3353.6 \ m^4$$

$$I_{xy} = 0 + 96 \times (-3.6) \times 2.4 + \frac{1}{72} \times 12^2 \times 24^2 + 144 \times 2.4(-1.6)$$

$$= -230.4 \ m^4$$

$$I_1 = \frac{10137.6 + 3353.6}{2} + \sqrt{\left(\frac{10137.6 - 3353.6}{2}\right)^2 + (-230.4)^2}$$

$$= 10145.42 \ m^4$$

$$I_2 = \frac{10137.6 + 3353.6}{2} - \sqrt{\left(\frac{10137.6 - 3353.6}{2}\right)^2 + (-230.4)^2}$$

$$= 3345.79 \ m^4$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \times -230.4}{2353.6 - 10137.6} = 0.067$$

$$2\varphi = 3.886^\circ$$

$$\varphi = 1.943^\circ, 91.943^\circ$$

சமனிலி 7.28 ஐப் பயன்படுத்தி $\varphi_1 = 1.943^\circ$ என்பதனைப் பெறலாம்.

எ.கா. 7.15

படம் 7.37 இல் காட்டப்பட்டுள்ள ABCD என்னும் செவ்வகத்தில் AB = 30m, BC = 40m எனில், மூலைவிட்டம் AC ஐ மையங்கொண்ட உறழ்திருப்புமை காண்க.

$$I_{xx} = \frac{1}{12} \times 30 \times 40^3 = 160000 \ m^4$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} \times 30 \times 40 = 90000 \ m^4$$

$$I_{xy} = 0$$

விட்டம் AC யின் சுழல்கோணம் φ எனில்

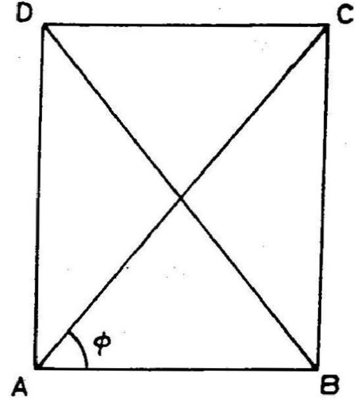
$\cos\varphi = 0.6$; $\sin\varphi = 0.8$;

$\cos 2\varphi = 0.6^2 - .8^2 = -0.28$

$\sin 2\varphi = 2 \times 0.6 \times 0.8 = 0.96$

$$I_{AC} = \frac{160000 + 90000}{2} + \left(\frac{160000 - 90000}{2}\right) \times (0.28)$$

$$= 115200 \text{ m}^4$$



படம் 7.37

7.7 மோர் வட்ட முறை (Mohr's Circle)

ஏதாவது இரண்டு ஆயத்திசைகளையொட்டி, உறழ்திருப்புமைகளும், உறழ்பெருக்கமும் தெரியும் போது, பிற அச்சுகளையொட்டிய உறழ்திருப்புமைகளையும் உறழ்பெருக்கத்தையும் கணக்கிடும் முறைகள் பகுதி 7.6 இல் விளக்கப்பட்டுள்ளன. இவ் ஆய்வுகளை மோர் என்பார் (Mohr) வகுத்த வட்ட முறையைப் பயன்படுத்தி எளிதில் நடத்தலாம்.

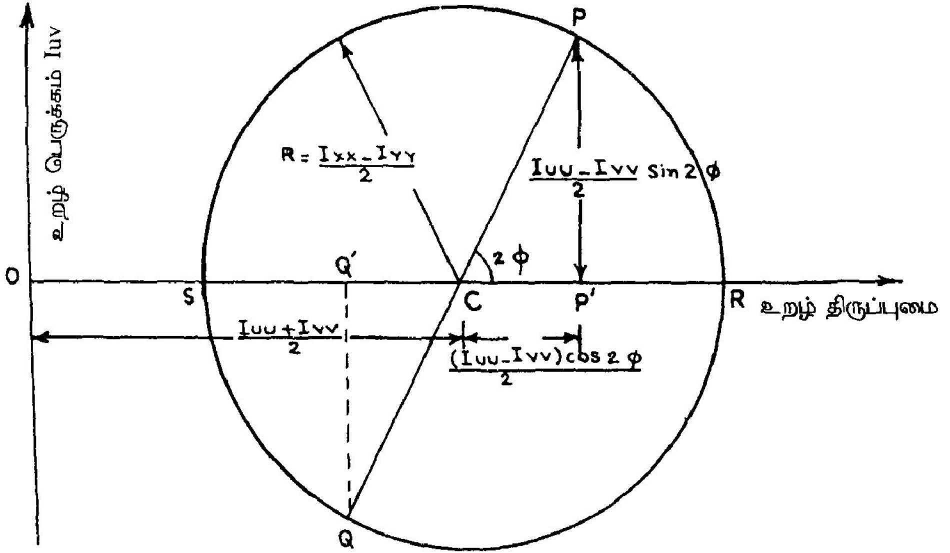
மேல்முதனிலை அச்சினை U அச்சு என்றும், கீழ்முதனிலை அச்சினை V அச்சு என்றும் கொள்ள, $I_{uv} = O$. U அச்சிலிருந்து φ கோணம் சாய்ந்துள்ள x அச்சு, அதற்குச் செங்குத்தாய y அச்சு இவற்றையொட்டி,

$$I_{xx} = \frac{I_{uu} + I_{vv}}{2} + \frac{I_{uu} \quad I_{vv}}{2} \cos 2\varphi$$

$$I_{xy} = \frac{I_{uu} - I_{vv}}{2} \sin 2\varphi$$ என எழுதலாம்.

ஒரு வரைபடத்தில் (படம் 7.38) கிடை அச்சினை உறழ்திருப்புமை அச்சு என்றும், நெட்டச்சினை உறழ்பெருக்க அச்சு என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். ஆய மையத்திலிருந்து உறழ்திருப்புமை அச்சில் $\frac{I_{uu} + I_{vv}}{2}$ ஆயத் தொலைவில் உள்ள C என்னும் புள்ளியை மையமாகவும் $\frac{I_{uu} - I_{uv}}{2}$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைவோம். இவ்வட்டத்தின் மையத்தில் உறழ்திருப்புமை அச்சிலிருந்து கோணம் 2 φ அளவு சாய்ந்துள்ளதொரு ஆரம் (CP)

வரைய, அது பரிதியைத் தொடும் புள்ளி, P யின் ஆயங்கள், (OP', P'P) = $\left[\left(\frac{I_{uu}+I_{vv}}{2}+\frac{I_{uu}-I_{vv}}{2}\cos 2\varphi\right), \frac{I_{uu}-I_{vv}}{2}\sin 2\varphi\right]$ என்பதனைப் படத்திற் காண முடியும்.



படம் 7.38 மோர் வட்டமுறை

அஃதாவது இவ் ஆயங்கள் உறழ்திருப்புமை, I_{xx} உறழ்பெருக்கம் I_{xy} ஆகியவற்றின் அளவாயிருக்கக் காண்கிறோம். இவ் வடிவியல் உறவுகளைப் பயன்படுத்தி, உறழ்திருப்புமை ஆய்வுகளை எளிதிற் செய்யலாம். இப் படத்தில்

OP' = உறழ் திருப்புமை, I_{xx}

P'P = உறழ் பெருக்கம், I_{xy}

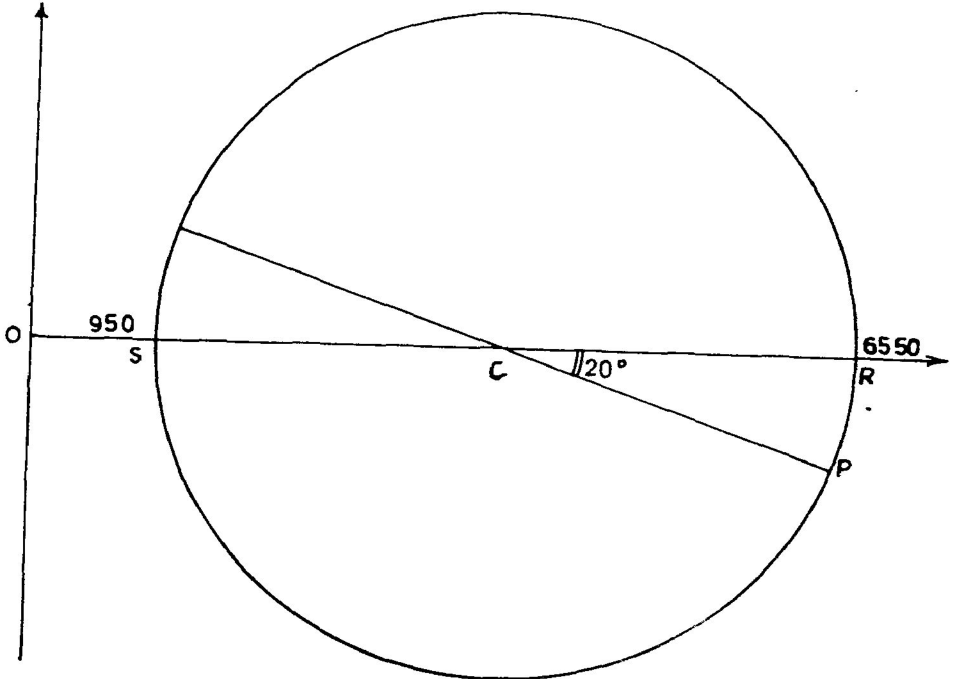
CP க்கு எதிராக ஆரம் CQ வரைந்து, Q இன் வீழல் Q' ஐயும் குறிக்க

OQ' = உறழ்திருப்புமை I_{yy}

| Q' Q | = உறழ்பெருக்கம் I_{xy}

போன்ற வடிவியல் உறவுகளைப் பெற முடிகிறது. (Q′ Q என்பது உறழ்பெருக்கம் $I_{yx} = -I_{xy}$). இனி எடுத்துக்காட்டு 7.12க்கு இவ் உறவுகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்போம்.

I_{uu}, I_{vv} என்பன தெரியாது எனினும், I_{xx}, I_{xy} தெரியுமாதலால் P என்ற புள்ளியையும், I_{yy} I_{yx} ($= I_{x\bar{y}}$) தெரியுமாதலால் Q என்ற புள்ளியையும் குறிக்க முடியும். x, y அச்சுகள் ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தானவை. அதனால் $2\varphi_x$, $2\varphi_y$ இரண்டிற்குமுள்ள வேறுபாடு 180°. அஃதாவது PQ என்பது மோர் வட்டத்திற்கு ஒரு விட்டமாதல் வேண்டும். அதனால் PQஐ விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமே, மோர் வட்டமாகும். இவ்வட்டம் கிடை அச்சினை வெட்டும் இரு புள்ளிகளில் வலப்புறத்தில் உறழ்திருப்புமையின் மதிப்பு உச்சமாகவும், இடப்புறத்தில் இழிபாகவும் இருக்கும். இவையே முதனிலை உறழ்திருப்புமைகள் I_1, I_2 ஆகும். இப் புள்ளிகளை R, S எனக் குறிப்போம். CR, CP இரண்டிற்குமிடையேயுள்ள கோணத்தை யளந்து, இதனை 2φ என்று குறிப்பிடுவோம். அஃதாவது, x அச்சு முதனிலை அச்சிலிருந்து கடிகை எதிர் திசையில் கோணம் φ சாய்ந்துள்ளதெனில், முதனிலை அச்சு, x அச்சிலிருந்து கோணம் $-\varphi$ சாய்ந்துள்ளதென்பது வெளிப்படை.



படம் 7.39

படத்திலிருந்து

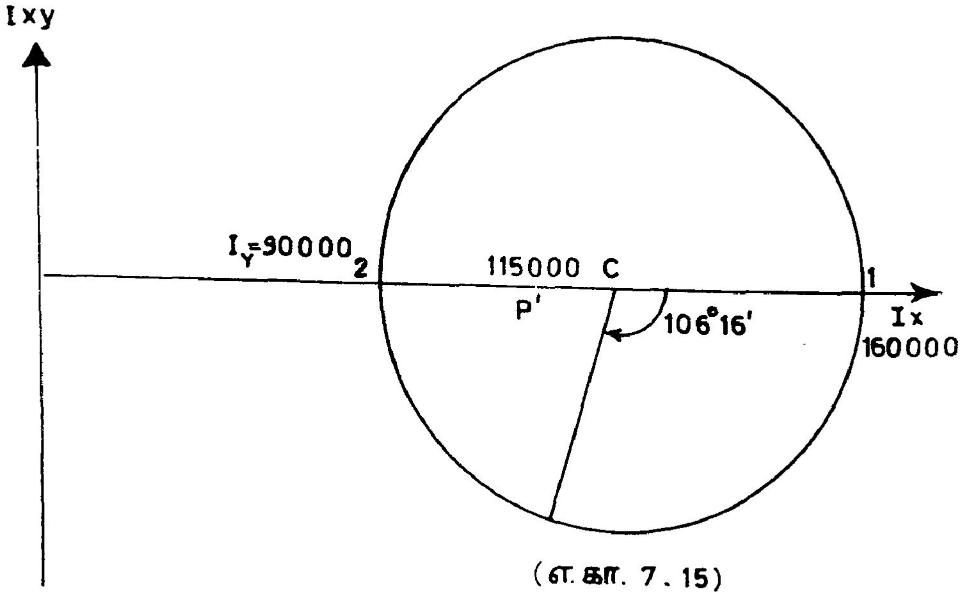
$I_1 = 6550$

$I_2 = 950$

$2\varphi = -20^\circ$; $\varphi = -10^\circ$

இவ் விடைகளை முந்தைய விடைகளுடன் ஒப்பு நோக்குக. மோர்வட்ட முறையில் தீர்வு எளிதாயிருப்பிலும், துல்லிமை (Accuracy) குறைவாயிருப்பதைக் காண்கிறோம். அதனால், கணக்கீட்டு முறைத் தீர்வுகளே நயக்கத்தக்கன; அவற்றையே இயன்றவரை மேற்கொள்ள வேண்டும்.

எ.கா. 7.15 காண மோர்வட்டமுறைத் தீர்வு படம் 7.40 இல் தரப்பட்டுள்ளது.



படம் 7.40

இவ் எடுத்துக்காட்டில் I_{xx}, I_{yy} இரண்டும் முதனிலை உறழ்திருப்புமைகளாய் விளங்குவதால் அவற்றின் அளவுகள் கிடை அச்சின் மீதே 1, 2 எனும் புள்ளிகளால் குறிக்கப்படுகின்றன. 21 ஐ விட்டமாகக் கொண்டு மோர் வட்டம் வரையப்படுகிறது. செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் AC x அச்சிலிருந்து + 53° 08' சாய்ந்துள்ளது. அதனால், ஆரம் CP, C1 இலிருந்து −106° 16' சாய்வில் வரையப்பட வேண்டும். P-இன் வீழல் P' உம் வரையப்பட்டுள்ளது.

படத்திலிருந்து $I_{AC} = OP' = 115000 mm^4$

சரியான விடையுடன் ஒப்பு நோக்க,

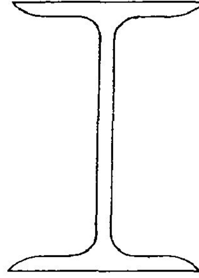
$$\text{பிழை} = \left(\frac{115200 - 115000}{115200}\right) \times 100\,\%$$

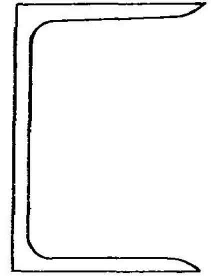
$$= 0.174\,\%$$

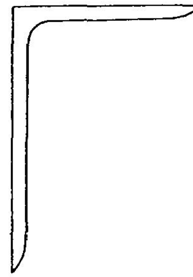
7.8 இணைக்கப்பட்ட வெட்டுமுகங்களின் உறழ்திறன்கள் (Moments of Inertia of Built up Sections)

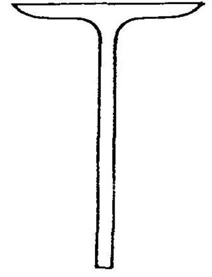
வெட்டுமுகங்கள் எளிய வடிவங்கள், அல்லது எளிய வடிவங்களின் கூட்டாக இருக்கும்வரை அவற்றின் வெட்டுமுகப் பண்புகளை எளிதிற்காண முடியும். ஆனால், நடைமுறையில் பயன்படும் உருட்டு உருக்கு (Rolled Steel) உறுப்புகளின் வெட்டுமுகங்கள் படம் 7.41 இல் காட்டியுள்ளவாறு சிக்கல் கொண்டனவாகவேயிருக்கின்றன. இவற்றின் அளவீடுகளைத் தரமுறைப்படுத்தி (Standarized)யிருப்பதால் இவற்றின் வெட்டுமுகப் பண்புகள் பட்டியல் படுத்தப்பட்டு நேரடியாக நமக்குக் கிடைகின்றன (இத்தகைய பட்டியல்கள் I.S. 808 போன்ற செந்தர நூல்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன).

இத்தகைய உறுப்புகளை இணைத்து உருவாக்கப்பட்ட வெட்டு முகங்கள் சில, படம் 7.42 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. இத்தகைய வெட்டுமுகங்களின் பண்புகளைக் கணக்கிடுவதில் கொள்கையளவில் புதுமை ஏதுமில்லை. இணை அச்சுத் தேற்றத்தினைப் பயன்படுத்தி இக் கணக்கீடுகள் செய்யப்படுகின்றன.


(a) I வடிவம்

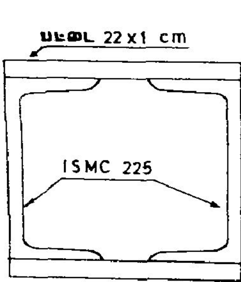

(b) ப வடிவம்


(c) L வடிவம்

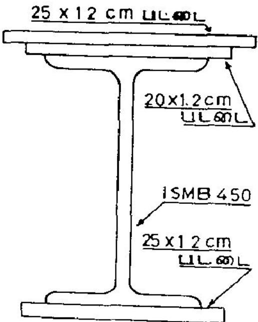

(d) T வடிவம்

உருட்டு உருக்கு வெட்டு முகங்கள்

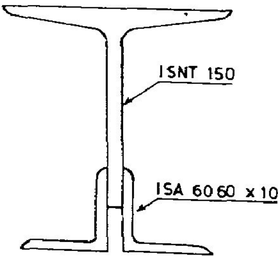
படம் 7.41



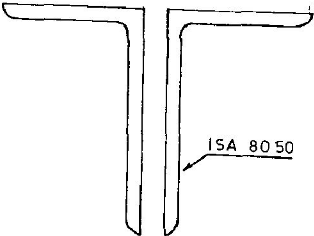
பட்டை 22 x 1 cm
ISMC 225
(i)



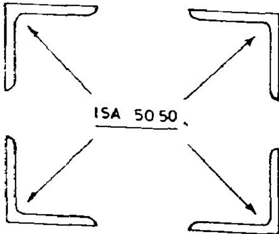
25 x 1 2 cm பட்டை
20x1.2cm
பட்டை
ISMB 450
25 x 1 2 cm
பட்டை
(ii)



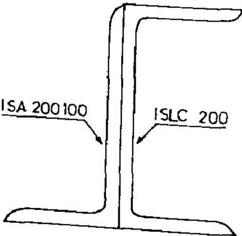
ISNT 150
ISA 6060 x 10
(iii)



ISA 80 50
(iv)



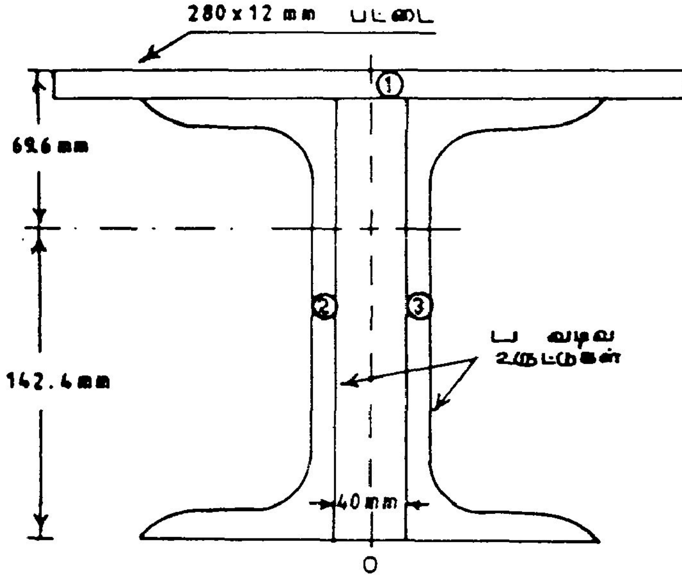
ISA 50 50
(v)

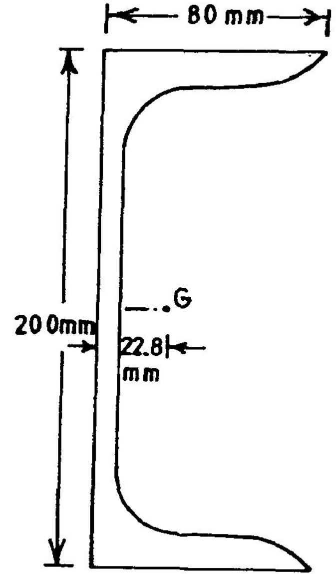


ISA 200100
ISLC 200
(vi)

படம் 7.42

விளக்கத்திற்காகப் படம் 7.43 இல் காட்டப்பட்டுள்ள கூட்டுறுப்பின் வெட்டுமுகப் பண்புகளைப் கணக்கிடுவோம்.





படம் 7.43

படம் 7.44

கூட்டுறுப்பில் மூன்று பகுதிகள் உள்ளன. அவற்றில் வாய்க்கால் வடிவ உருட்டு உருக்குப் பகுதி (Rolled Steel Channel) ஒன்றின் தனிப் பண்புகளைப் படம் 7.44 இல் காட்டுகிறது. (இப் பண்புகள் வரைமுறைப் பட்டியலில் இருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளன).

(1) கூட்டுறுப்பின் ஈர்ப்பு மையம் :

தற்காலிகமாய் O என்னும் புள்ளியை (படம் 7.43) ஆய மையமாகக் கொள்வோம்.

$$\bar{x} = 0$$

மொத்தப் பரப்பு $A = \Sigma A_i = 280 \times 12 + 20 \times 252 = 8400 mm^2$

$$\bar{y} = \frac{280 \times 12 \times 206 + 20 \times 252 \times 100}{8400} = 142.4 \text{ mm}$$

இனி ஈர்ப்பு மையத்தையே புதிய ஆய மையமாகக் கொள்வோம். பகுதி 1 இன் ஈர்ப்பு மைய ஆயங்கள்,

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (0.0, (206 - 142.4))$$

$$= (0, 63{\cdot}6)$$

பகுதி 2 இன் ஈர்ப்பு மைய ஆயங்கள்,

$$(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (20 + 22.8), (100 - 142.4)$$

$$= (42.8, -42.4)$$

பகுதி 3 இன் ஈர்ப்பு மைய ஆயங்கள்

$$(\bar{x}_3, \bar{y}_3) = (-42.8, -42.4)$$

இவற்றிலிருந்து.

$$I_{xx} = \frac{1}{12} \times 280 \times 12^3 + 280 \times 12 \times 63.6^2$$

$$= 1.4923 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12} \times 12 \times 280^3 + 13900 + (2520 \times 42.8^2)$$

$$+ 13900 + (2520 \times (-42.8)^2$$

$$= 2.95885 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

இவ்வாறே எந்தவகையான கூட்டுறுப்புகளைக் கருதிலும் அவற்றின் வெட்டுமுகப் பண்புகளை இணைஅச்சுத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி எளிதில் கணக்கிடமுடியும்.

7.9 உறழ்திருப்புமை : ஒருகருத்து விளக்கம்

உறழ்திருப்புமை என்பது யாது? இதற்கும் உறழ்வுப் பண்பிற்கும் ஏதாவது தொடர்பு உண்டா? என்பன போன்ற வினாக்களுக்குத் தெளிவான விளக்கம் இன்றி, இதனை வெறும்கணக்கீட்டு வரையறை (Computational Definition)யாகவே கருதி மயங்குவோர் பலர் உளர். இவரெல்லாரும், உறழ்திருப்புமை என்பதற்குத் தனியான பொருளொன்றும் இல்லை. சமன்பாடு 6.4 இல் இடம்பெறும் $\int_A y^2 \, dA$ என்னும் இடைநிலை அளவிற்கு ஓர் இடுகுறிப் பெயர் தேவைப்படுவதால் அதற்கு உறழ்திருப்புமை எனப் பெயரிட்டுள்ளனர் என்னும் கருத்துடையர். இத் தகையோர் பெரும்பாலாராதலின் கருத்துத் தெளிவு வேண்டி இப் பகுதி இங்கு இடம் பெறுகிறது.

முதலில் உறழ்வு (Inertia) என்றால் யாது என்பதனை நோக்குவோம். ஒருபொருளுக்கு இயல்நிலை என்பது, சீரான கதியில் (Uniform velocity) இயங்கும் நிலையேயாகும். (சீரான கதி என்பதனுள், கதி = 0 என்னும் நிலையும் உள்ளடங்கும்). இயல் நிலையினின்று எப்பொருளும் தாமாகப் பிறழ்வதில்லை. பிறழ்விக்கப் புற விசைகள் தேவை. இயல்நிலை திரியும்போது பிறழ்வின் (Deviation) அளவினை முடுக்கம் (Acceleration) சுட்டுகிறது என்றால், பிறழ்விற்கு எதிராக ஒருபொருள் காட்டும் எதிர்ப்பினை அதன் பொருண்மை (mass) சுட்டுகிறது எனலாம். அஃதாவது இருவேறு பொருள்களின்மீது ஒரே அளவில் புறவிசை செலுத்தப்படும்போது, பொருண்மை குறைவான பொருளின் பிறழ்ச்சி அதிகமாயிருத்தலையும், பொருண்மை மிகுந்த பொருள் குறைவாய் பிறழ்ச்சியையே அடைவதையும் காண்கிறோம். அதனால், பொருண்மை என்பது உறழ்வுப் பண்பின் (இயல்நிலையினின்று பிறழ்வு எதிர்ப்புக் காட்டும் பண்பு) அளவீடே* (Mass is nothing but a measure of Inertia) என உணரலாம். இவ் விளக்கம் துகள்களின் நேர்க்கோட்டியக்கத்தினின்று நாம் பெறுவதாகும்.

இனித் திண்மப் பொருள்களின் சுழலியக்கத்தை நோக்கும்போது, பிறழ்வின் அளவீடாகக் கோணமுடுக்கம் (Angular Acceleration) ω ஐக் கருதிடின், இயக்கச் சமன்பாடினை

$$M = I\,\omega^2 \qquad (7.29)$$

எனப் பெறுகிறோம். M என்பது செலுத்தப்படும் சுழற்று திருப்புமை (Turning Moment). இங்கு (I என்பது, உறழ்திருப்புமை = $\int r^2 dm$ என்பது விசையியக்கவியலில் பெறப்படும்.

இங்கு உறழ்வின் (பிறழ்வு எதிர்தன்மையின்) அளவீடாக உறழ்திருப்புமை I விளங்குவதைக் காணலாம். (அஃதாவது, I அதிகமெனில் பிறழ்வு குறைவாகவும், I குறைவெனில் பிறழ்வு அதிகமாகவும் இருக்கும்).

$\int r^2 dm$ என்ற தொகையத்தில், சிறுதுணுக்கின் பொருண்மை dm என்பதை, துணுக்கின் கனஅளவையும் அடர்த்தியையும் பெருக்கி உரைக்கும்போது,

$dm = \rho\, l.dA$ என்ற சமன்பாட்டால் உரைக்கலாம். இதில் l என்பது திண்மத்தின் நீளம், ρ என்பது அதன் அடர்த்தி ; dA என்பது குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பின் ஒருதுணுக்கு.

* பொருண்மை என்பது ஓர் உருவில் அடங்கியிருக்கும் மொத்தப் பொருளின் அளவீடே (Mass is the quantity of matter contained in a body) என்னும் பழைய வரையறை இன்று பொருந்தாது. ஒரு பொருளின் வேகம் அதிகரிக்கும்போது அதன் பொருண்மையும் குறைகிறது எனத் தனிச் சார்பு கொள்கை (Special theory of Relativity) நிறுவி உள்ளது. மேலும் கதி இல்லாத பிற திசைகளில் பொருண்மை குறைவாகவே இருக்கும் என்பதும் காட்டப்பட்டுள்ளதால், பழைய வரையறையின்கண் பொருந்தாமையை உணரலாம்.

எனவே, $I = \int_{dA} l \rho r^2 dA = l\rho \int_{A} r^2 dA$

எனக் காணலாம். இதனால்,

ஓர் அலகு நீளங்கொண்ட திண்மத்தின் உறழ்திருப்புமை

$$I = \rho \int_{dA} r^2 dA \qquad (7.30)$$

சமன்பாடு (7.30)இன் வலப்புறத்தில் காணப்படும் தொகையம் முனை உறழ்திருப்புமை I_p என்பதனையும் பொருண்மை உறழ்திருப்புமை (Mass Moment of Inertia) முனைஉறழ் திருப்புமை, அடர்த்தி, நீளம் இவற்றின் பெருக்கம் (Product) என்பதனையும் காணமுடியும்.

அடுத்து, நிலைஅமைப்புகளில் ஒருவகையான விட்டத்தின் (பிறவகை உறுப்புகளுக்கும் இவ் விளக்கம் பொருந்தும்) இயல்நிலை என்பது அதன் நேர்மை (Straightness) யே எனலாம். வளைதலைப் பிறழ்வாகக் கருதின், இப் பிறழ்வின் அளவீடாக வளைமையை (Curvature)க் கருதவேண்டும். அதனால் ஒருகுறிப்பிட்ட புறவளைதிருப்புமை (External Bending Moment) செலுத்தப்படுவதால் தோன்றும் பிறழ்ச்சி $\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$ எனக் காண்கிறோம். (மாற்று வடிவம் $M = EI \times \frac{1}{R}$)

இங்கும் உறழ்திருப்புமை I என்பது பிறழ்வெதிர்பண்பின் (உறழ்வு பண்பின்) அளவீடாகவே விளங்கக் காணலாம். அதனால், உறழ்திருப்புமை என்பது பொருள் பொதிந்த கலைச்சொல்லேயன்றி, வசதி காரணமாய் உருவாக்கப்பட்ட இடுகுறிப் பெயரன்று என்பதனை உணரலாம்.

பயிற்சி 7.3

1. 7.12, 7.14, 7.19, 7.20, 7.22 ஆகிய படங்களில் காட்டப்பட்டுள்ள வெட்டுமுகங்களின் உறழ்திருப்புமைகளைக் கணக்கிடுக.
2. 7.15, 7.18, 7.21 ஆகிய படங்களில் காணும் வெட்டுமுகத்தின் முதனிலை உறழ்திருப்புமை களையும் முதனிலை அச்சுகளையும் காண்க.
3. எடுத்துக்காட்டுகள் 7.11, 7.13, 7.14 ஆகியவற்றிற்கு மோர் வட்டமுறையில் தீர்வு கண்டு, சரியானவிடைகளுடன் ஒப்பிடுக.
4. படங்கள் 7.41 இல் காணும் வெட்டுமுகங்களின் ஈர்ப்பு மையங்களையும் உறழ்திருப்புமை களையும் கணக்கிடுக.
5. படம் 7.41 (c)யில் காட்டப்பட்டுள்ள இணைப்பு வெட்டுமுகத்திற்கு I_{xx}, I_{yy} ஆகிய உறழ்திருப்புமைகள் இரண்டும் சமமாக இருக்க வேண்டுமெனில் இடைவெளி a எவ்வளவு இருக்க வேண்டும் ?

8. முறுக்கம்
(Torsion)

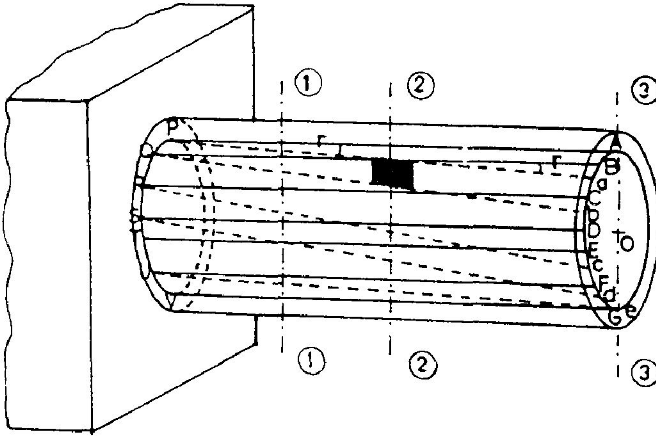
8.1 முன்னுரை

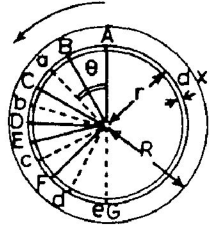
திண்மங்கள் அல்லது உறுப்புகள் மீது விசைகள் செயல்படும் பல்வித வழிகளில் முறுக்கமும் ஒன்று. அஃதாவது ஓர் உறுப்பு அதன் நீளவாட்டு அச்சினை மையமாய்க்கொண்டு சுழல் வதைப் பல பொறிகளிற் காண்கிறோம். பெரிய ஊர்திகளில் இருசிற்கு ஆற்றலைத் தரும் தண்டுகள், பல சுழற்பொறிகளின் தண்டுகள் முதலியவற்றைக் குறிப்பிடலாம். இச் சுழற்சிகள் தண்டின் முழுநீளத்திலும் சீராயிருப்பின், இதனை உறுதித் திண்மசுழற்சி (Rigid Body Rotation) என்கிறோம். மாறாய், வெவ்வேறு வெட்டுமுகங்களின் சுழற்சிகள் வெவ்வேறு அளவில் இருப்பின், இந் நிகழ்ச்சியை முறுக்கம் (Torsion) என அழைக்கிறோம். முறுக்கம் செலுத்தப்படும்போது எல்லா வெட்டுமுகங்களும் சுழல வேண்டுமென்பதில்லை. இத்தகைய முறுக்கத்தில் சுழற்சிகள் யாவும் நலிவு (Deformation) தரும் சுழற்சிகளேயாம். எல்லா வெட்டுமுகங்களுமே சுழலும்போது கூட, மிகக்குறைந்த அளவில் சுழலும் வெட்டுமுகத்தின் சுழற்சியை அனைத்து வெட்டுமுகங்களின் சுழற்சிகளிலிருந்து கழிக்க எஞ்சுவன முறுக்கச் சுழற்சிகளே (Torsional rotations அல்லது twists). இவ்வாறு ஒருதண்டின் மொத்தச் சுழற்சிகளையும், உறுதித் திண்மச் சுழற்சிகள், முறுக்கச் சுழற்சிகள் என்று இருகூறாகப் பிரிக்கலாம். இவற்றுள் முறுக்கச் சுழற்சிகளே நலிவுகளையும், விகலங்களையும், தகைவுகளையும் தோற்றுவிப்பனவாதலின் அவற்றின் விளைவுகளை இங்கு விரிவாய் ஆராய்வோம்.

படம் 8.1, முறுக்கம் செலுத்தப்பட்டுள்ளதொரு உருளை வடிவத் தண்டினைக் காட்டுகிறது. இத் தண்டின் ஒரு முனையைத் தாங்கியுடன் உறுதியாகப் பிணைத்துள்ளமையால், இம் முனையில் சுழற்சிகள் முற்றுமாய்த் தடுக்கப்படுகின்றன. இதன் மறுமுனையைச் சுழற்ற முற்படும்போது (சுழற்றுவதற்குத் தேவையான விசைகள் செலுத்தி) தோன்றும் நலிவுகளும் படத்திற் காட்டப்பட்டுள்ளன. இந் நலிவுகளின் தன்மைகளைப் புரிந்துகொள்ள, முறுக்கத்திற்கு முன்னர், அச்சிற்கு இணையாயிருக்கும் பல்வேறு நேர்க்கோடுகள் முறுக்கத்தினால் அடையும் வடிவ மாற்றங்களை நோக்குதல் துணைசெய்யும். படத்தில் காட்டப்பட்டிருப்பது போன்ற உருளை வடிவத்தில் ரப்பர் போன்று எளிதில் நலிவடையக்கூடிய பொருளொன்றன் மேற்பரப்பின்மீது அச்சிற்கு இணையாய கோடுகளை வரைந்துகொண்டு, முறுக்கத்தின்போது இக் கோடுகளின் வடிவ மாற்றங்களை நோக்கலாம்.

8.2 முறுக்கச் சமன்பாடு (Torsion Equation)

வளைதல் சமன்பாடு (6.7), விட்டங்கள் வளையும்போது தோன்றும் நலிவுகள், தகைவுகள் இவற்றைக் காண்பதில் உதவுதல் போன்று, முறுக்கத்தின் விளைவுகளுக்கிடையிலான உறவுகளைத் தரும் முறுக்கச் சமன்பாடு கூலம் (Coloumb) என்பவரால் நிறுவப்பட்டது. இச் சமன்பாட்டினை நிறுவிடக் கூலம் மேற்கொண்ட அடிப்படைக் கற்பிதங்களில் பல, வளைமைச் சமன்பாட்டுக்குரிய கற்பிதங்களைப் போன்றே பொருளின் அடிப்படைப் பண்புகளைப் பற்றியன. அஃதாவது, பொருள் மீள்தன்மை (Elasticity), கனச்சீர்மை (Homogenity), திசைச்சீர்மை (Isotropy) கொண்டு விளங்குவதாய்க்கொள்கிறோம். அன்றியும் நாம் மேற்கொள்ளும் முக்கியமானதொரு கற்பிதம் நலிவுகளின் தன்மை பற்றியதாகும். அஃதாவது முறுக்க நலிவுகளில் உருக்கோட்டம் (Warping) இல்லை என்பதாகும். இதன் பொருள் தண்டின் எந்தவொரு வெட்டுமுகமும் அச்சினை மையமாகக் கொண்டு, தனது தளத்திலேயே சுழல்கின்றது என்பதாகும். வெட்டுமுகங்கள் சுழல்வதுடன் அமையாது, தத்தம் தளங்களுக்குச் செங்குத்தாய திசையிலும் இடப்பெயர்ச்சிகள் அடைதலையே உருக்கோட்டம் (Wraping) என அழைக்கிறோம். உருக்கோட்டங்கள் இல்லை என்னும் கற்பிதத்துடனேயே கூலம் முறுக்கச் சமன்பாடு நிறுவப்படுகிறது.





படம் 8.1 முறுக்க விகலங்கள்

படம் 8.1.இல் காட்டப்பட்டுள்ள தண்டின் நீளம்*l* எனவும், குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பின் (வட்டம்) ஆரம் R எனவும் கொள்வோம். சமன்பாட்டின் பொதுமை வேண்டி, இத் தண்டிற்குள்ளாக, தண்டின் அச்சினையே மையமாகக் கொண்டதும், ஆரம் r கொண்டதுமான

சிறியதொரு உருளையின் நலிவுகளை நோக்குவோம். PA, QB, RC முதலியன முறுக்கத்திற்கு முன்னர் அச்சிற்கு இணையாய்ச் சிறிய உருளை (ஆரம் = r) யின்மீது வரையப்பட்ட பல்வேறு நேர்க்கோடுகள். தொங்குமுனையில் (3-3) தண்டின் மையமாய O உடன் இக் கோடுகளின் A, B, C முதலிய முனைகளை இணைப்பவை OA, OB, OC முதலாய ஆரங்கள். முனை 3-3இல் வெட்டுமுகத்தின் படமும் அதன் ஆரங்களும் படத்திற் காட்டப்பட்டுள்ளன.

முறுக்கத்தின் விளைவாக வெட்டுமுகம் 3 அடையும் சுழற்சி θ எனக் கொள்வோம். இச் சுழற்சியின் விளைவாய் A, B, C முதலாய புள்ளிகள் பெயர்ச்சியடைந்து a, b, c முதலாய நிலைகளையடைவதாய்க் கருதுவோம். அஃதாவது ஆரங்கள் OA, OB முதலியன Oa, Ob முதலாய நிலைகளையடைகின்றன. இந்த ஆரக்கோடுகள் ஒவ்வொன்றன் சுழற்சியும் சீராய், θ என்னும் அளவிலேயே இருக்கும். ஆனால் 1-1, 2-2 ஆகிய பிற வெட்டுமுகங்களை நோக்கின் இங்குச் சுழற்சிகள் குறைவாயிருப்பதனைக் காணலாம். இச் சுழற்சிகளின் அளவு குறைவாயிருப்பதால் இவை PA, PB முதலாய கோடுகளின் நீளத்தில் தோற்றுவிக்கும் மாற்றங்களைப் புறக்கணித்துவிடலாம். Aa, Bb முதலாய பெயர்ச்சிகளின் படத்தின் தெளிவிற்காகப் பெரிதுபடுத்திக் காட்டப்பட்டிருப்பினும் அளவில் சிறியனவேயாதலின், கோணங்கள் ∠APa, ∠BQb ∠CAc, ∠DBd முதலானவை (இவை அனைத்தும் சமமானவை), சிறுஉருளையின் மேற்பரப்பில் தோற்றுவிக்கப்படும் நறுக்கு விகலங்களாகும். அதனால்,

நறுக்கு விகலம் $$\gamma = \tan^{-1}\frac{Aa}{AP} = \tan^{-1}\frac{Bb}{BQ} = \ldots$$

$$= \frac{Aa}{l} = \frac{Bb}{l} \quad \text{இங்கு, } (Aa = Bb = r\theta)$$

$$\therefore \quad \gamma = \frac{r\theta}{l} \qquad 8.1$$

அல்லது $$\frac{\gamma}{r} = \frac{\theta}{l} \qquad 8.2$$

இச்சமன்பாட்டில் $\frac{\theta}{l}$ என்பது ஓர் அலகு நீளத் தண்டின் முறுக்கம் (Twist per unit length of shaft) எனக் காண்கிறோம். இதனையே அடிப்படை அளவீடாக, $\varphi\left(=\frac{\theta}{l}\right)$ எனக் கொண்டும் சமன் பாட்டை உரைப்பதுண்டு. நாம் $\frac{\theta}{l}$ என்ற வடிவிலேயே கொள்வோம்.

எந்தவொரு குறிப்பிட்ட வெட்டுமுகத்தினை எடுத்துக்கொண்டாலும் $\frac{\theta}{l}$ என்பது ஒருமாறிலியே எனக் காண்கிறோம். (அஃதாவது, இதன் அளவுகள் நீளவாக்கில்தான் மாறக்கூடுமேயன்றி, வெட்டுமுகத்தின் பரப்பில் பல்வேறு புள்ளிகளைப் பொறுத்தமட்டில்

மாறுவதில்லை). அதனால் வெட்டுமுகத்தின் எந்தவொரு புள்ளியிலும் நறுக்கு விகலங்களின் அளவு (சமன்பாடு 8.1) அப் புள்ளியின் ஆரத் தூரத்துடன் நேர்விகித உறவு கொண்டிருத்தலை நோக்கலாம்.

பொருளின் மீட்சி எல்லைக்குள் இருக்கும்வரை, $\tau = G\gamma$ என்னும் உறவினைப் பயன்படுத்தி, எந்தவொரு புள்ளியிலும் நறுக்குத் தகைவினைக் காணமுடியும். அதனால், சமன்பாடு 8.2 இன் மறுவடிவம்,

$$\frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{l} \tag{8.3}$$

தண்டின் அலகு முறுக்கம், $\frac{\theta}{l}$ தெரிந்தால், நறுக்குத் தகைவினைக் காணச் சமன்பாடு 8.3 ஐப் பயன்படுத்தலாம்.

இனி இந் நறுக்குத் தகைவுகளின் செயல்பாட்டினை நோக்குவோம். நறுக்கு விகலங்களின் தளங்கள் யாதென நோக்குவோம். இத் தளங்களுள் ஒன்று, ஆரம் r கொண்ட உருளையின் மேற்பரப்பில் கருதப்படும் புள்ளியின் தொடுதளம் (Tangent plane). இது θ தளம் என அழைக்கப்படுகிறது. மற்றொன்று, இதற்குச் செங்குத்தாய குறுக்கு வெட்டுதளம். (அச்சின் திசையை z திசை எனக் கொண்டால்), இதனை z தளம் என அழைக்கலாம். இருதளங்களிலுமே அளவில் சமமான (திசையில் எதிரான) இணைநறுக்கு விசைகளாய்ச் (Complementary shear stresses) செயல்படுவதை உணரலாம். அதனால், அதனை

$$G\frac{\theta}{l} \cdot r = \tau_{z\theta} = -\tau_{\theta z} \tag{8.4}$$

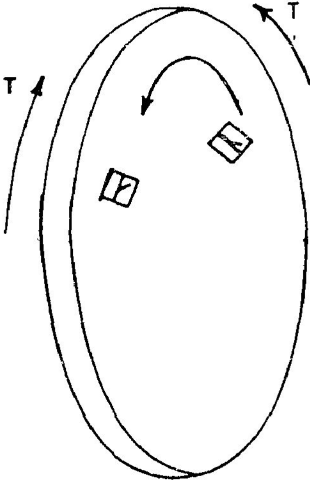
என உரைக்கலாம்.

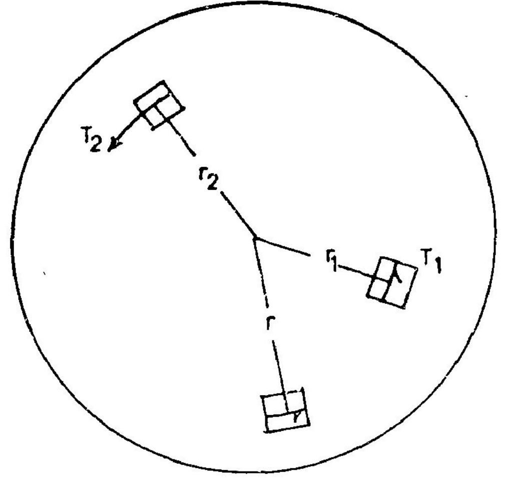
இவற்றுள் $\tau_{z\theta}$ வின் செயல்பாட்டினை நோக்குவோம். தண்டின் மையத்திலிருந்து r அலகு ஆரத் தொலைவிலுள்ள (படம் 8.2 (ii)), பரப்பு dA கொண்டதொரு துணுக்கின்மீது செயல்படும் நறுக்குத் தகைவு,

$$\tau = r \cdot G \cdot \frac{\theta}{l}$$

நறுக்கு விசை, $dQ = \tau \cdot dA = r \cdot G \cdot \frac{\theta}{l} \cdot dA$

இந் நறுக்குவிசை இருசின்மீது செலுத்தும் முறுக்கத் திருப்புமை (Twisting Moment), அல்லது Torque), $dT = dQ.r$





(i) உருளைத்துண்டின் சமனிலை (ii) வெட்டு முகத்தில் தகைவுகள்
படம் 8.2 முறுக்கத் தகைவுகள்

அஃதாவது $$dT = r \cdot G\frac{\theta}{l} \cdot dA \cdot r$$

எனவே, மொத்த முறுக்குத் திருப்புமை $T = \int dT = \int \frac{G\theta}{l} \cdot r^2 \cdot dA$

வெட்டுமுகத்தைப் பொருத்தமட்டில் $\frac{\theta}{l}$, G இரண்டும் மாறிலிகள் ஆதலின்,

$$T = \frac{G\theta}{l} \int_{dA} r^2 A$$

எனக் காண்கிறோம். இச் சமன்பாட்டில் தொகையம் $\int_A r^2 dA$ என்பது முனை உறழ்திருப்புமை (Polar Moment of Inertia) என்பதனைக் கடந்த அத்தியாயத்திற் கண்டோம். இதனை J என்ற குறியீட்டால் உரைக்க.

$$T = \frac{G\theta}{l} \cdot J, \quad \text{அல்லது}$$

$$\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l}$$

இதனைச் சமன்பாடு 8.3 உடன் ஒப்பிட,

$$\frac{T}{J} = \frac{\tau}{r} = \frac{G\theta}{l} \qquad 8.5$$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம். இச் சமன்பாடே, கூலம் முறுக்கச் சமன்பாடு (Coloumb's Torsion Equation) ஆகும்.

8.3 முறுக்கச் சமன்பாட்டின் பயன்கள்

உறுப்புகளின் வலிமை ஆய்வுகளில் முறுக்கச் சமன்பாடு எவ்வாறு பயன்படுகிறதென நோக்குவோம். முதலில் ஒருவரம்பினை அறிதல் அவசியம். முறுக்கக் கோட்பாட்டினை நிறுவும்போது , தண்டில் உருக்கோட்டம் (Warping) நிகழ்வதில்லை என்னும் கற்பிதத்தினை மேற்கொண்டோம். இது உண்மையாயிருக்கும் சூழல்களில்தான் முறுக்கச் சமன்பாட்டினைப் பயன்படுத்த முடியும். பல பரிசோதனைகள், ஆய்வுகள் துணைகொண்டு உருளை வடிவத் தண்டுகளில் மட்டுமே உருக்கோட்டம் தோன்றுவதில்லையெனக் கண்டுள்ளனர். அதனால், உருளை வடிவத் தண்டுகளுக்கே இச் சமன்பாட்டினைப் பயன்படுத்த இயலும்.

அடுத்துப் படம் 8.1 ஐ நோக்க, தண்டு முழுவடிவமாயிருப்பினும் (Solid) உள்ளீடற்ற தாய் (Hollow) இருப்பினும் ($Aa = Bb = r\theta$ என்பதனில் மாற்றமில்லையாதலின்), நறுக்குத் தகைவுக்கான கோவை, $\tau = r \cdot \frac{G\theta}{l}$ என்பது பொருந்தும். ஆதலின், உள்ளீடற்ற உருளை வடிவத் தண்டுகளுக்கும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். ஆனால், நீக்கப்படும் உள்ளீட்டுப் பகுதியின் முனை உறழ்திருப்புமையைக் கழித்துக்கொள்ள வேண்டும். (அஃதாவது, வெளிவிட்டம் D, உள்விட்டம் d கொண்ட தண்டின் முனை உறழ்திருப்புமை, $J = \frac{\Pi}{32} \times (D^4 - d^4)$ எனக் கொள்க.

முறுக்கக் கோட்பாட்டின் பயனுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் காண்போம்.

எ.கா 8.1

14 mm விட்டமும், 400 mm நீளமும் கொண்டதொரு தண்டின் ஒருமுனை உறுதியாய்ப் பற்றவைக்கப்பட்டுள்ளது. மறுமுனையில் 2° முறுக்கம் தோற்றுவிக்கத் தேவையான முறுக்குத்

திருப்புமை எவ்வளவு ? (G = 80 GPa) இதனால், தோற்றுவிக்கப்படும் உச்ச நறுக்குத் தகைவினைக் காண்க.

தீர்வு:

தண்டின் முனை உறழ்திருப்புமை J $= \frac{\Pi}{32} \times 14^4 = 3771.48 \text{ mm}^4$

முறுக்கம் (முறுக்கக்கோணம்) $= 2^\circ$

ஆனால், சமன்பாடு 8.1 ஐப் பயன்படுத்த, θ வின் அளவு ஆரக (Radian) அளவீடாகப் பயன்படுத்தப்பட வேண்டும்.

$$\therefore \quad \theta = 2^\circ = 0.0349 \text{ radians}$$

தேவையான முறுக்குத் திருப்புமை T $= J \cdot \frac{G\theta}{l}$

$$= \frac{3771.48 \times 80 \times 10^3 \times 0.0349}{400}$$

$$= 26324.93 \text{ N.mm}$$

$$= 26.325 \text{ N.m}$$

எந்தவொரு புள்ளியிலும் நறுக்குத் தகைவு τ $= r \cdot \frac{G\theta}{l}$

உச்ச நறுக்குத் தகைவு மேற்பரப்புப் புள்ளிகளிலேயே காணப்படும்.

உச்ச நறுக்குத் தகைவு $\tau_{max} = r_{max} \frac{G\theta}{l}$

$$= 7 \times 80 \times 10^3 \times \frac{0.0349}{400}$$

$$= 48.86 \text{ N/mm}^2$$

எ.கா. **8.2**

எ.கா. 8.1 இல் தரப்பட்ட தண்டின் உச்ச நறுக்கு வலிமை 85 N/mm^2 எனில், தண்டு தாங்கக்கூடிய உச்ச முறுக்குத் திருப்புமை எவ்வளவு? தண்டின்மீது 150 N.m முறுக்கத்திருப்புமை செலுத்த வேண்டின், தேவையான விட்டத்தினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

உச்ச நறுக்குத் தகைவு τ_{max} எனில்,

$$\frac{\tau_{max}}{r_{max}} = \frac{T}{J}$$ என உரைக்கலாம்.

எனவே தண்டு தாங்கவல்ல முறுக்குத் திருப்புமை, $T = \frac{\tau_{max}}{r_{max}} \cdot J$

$= \frac{85}{7} \times 3771.48$ N.mm

$= 45796.54$ N.mm

$= 45.7965$ N.m

தண்டு தாங்க வேண்டிய முறுக்குத் திருப்புமை $T = 150$ N.m எனில்,

$$J = \frac{T \cdot r_{max}}{\tau_{max}}$$

என உரைத்துத் தேவையான முனை உறழ்திருப்புமையைக் கணக்கிடலாம்.

தேவையான முனை உறழ்திருப்புமை $J = \frac{150 \times 10^3 \, r_{max}}{85}$

அஃதாவது $\frac{\pi}{32} d^4 = \frac{15 \times 10^4 \times (d/2)}{85}$

எனவே, $d^3 = 16 \times \frac{15 \times 10^4}{85}$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 15 \times 10^4}{85}} = 20.8 \text{ mm}$$

22 mm விட்டமுள்ள தண்டினைப் பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பு:

விட்டங்களில் வளைதிருப்புமையும் உச்சத் தகைவையும் இணைக்கும் வெட்டுமுகக் கெழு (z) வைப் போன்று $\left(\frac{J}{r_{max}}\right)$ என்னும் அளவினை முனைமுகக்கெழு (Polar Modulus) என

அழைப்போம். வடிவமைப்புக் கணக்கீடுகளில் நேரடியாகத் தகைவினைக் கணக்கிட முனைமுகக் கெழுவை நேரடியாகப் பயன்படுத்தலாம். இது Z_p எனக் குறிப்பிடப்படும்.

8.4 சுழல் தண்டுகள் (Rotating Shafts)

பொறியின் ஒருறுப்பிலிருந்து மற்றோர் உறுப்பிற்கு ஆற்றலைக் கடத்தும் தண்டுகள், தம் சுழலியக்கத்தின் மூலமாகவே ஆற்றலைக் கடத்தும் பணியை மேற்கொள்கின்றன. இவ்வாறு கடத்தும் போது இத் தண்டுகளின்மீது முறுக்குத் திருப்புமைகள் செலுத்தப்படுகின்றன. இம்முறுக்குத் திருப்புமைகள் செய்கின்ற வேலையே தண்டு செய்யும் வேலையாகும். தண்டு செய்யும் வேலையின் வீதமே அதன் ஆற்றல்வீதம் (அது கடத்தும் ஆற்றல்வீதம்) என உரைக்கலாம். இவ்வாற்றல் வீதத்திற்குரிய வாய்ப்பாடு ஒன்றனைக் காண முற்படுவோம்.

தண்டின் சுழல் வேகம் ஒரு மணித்துளிக்கு எத்தனை சுழற்சிகள் (Revolutions per minute அல்லது r.p.m.) என்னும் அளவீடாகத் தரப்படுகிறது. இதனை n என்ற குறியீட்டால் உரைக்கிறோம். (வேகம், n r.p.m. எனில், ஒருநிமிடத்திற்கு n சுழற்சிகள் என்பது பொருள்). தண்டின்மீது செலுத்தப்படும் முறுக்குத் திருப்புமை (Torque) T எனில்,

முறுக்குத் திருப்புமை செய்யும் மொத்த வேலை = T× அது விளைத்த கோணப் பெயர்ச்சி (ரேடியன்களில்)

ஒருநிமிடத்தில் கோணப் பெயர்ச்சி = சுழல்வேகம் $\times\ 2\pi = 2\pi n$

எனவே ஒருநிமிடத்தில் செய்யப்படும் வேலை = $2\pi n T$

முறுக்கத்திருப்புமை T ஐ N.m அளவீடாகக் கொண்டால்,

ஒரு நிமிடத்தில் செய்யப்படும் வேலை = $2\pi n T$ N.m

ஒருவினாடியில் செய்யப்படும் வேலை = $\dfrac{2\pi n T}{60}$ N.m

ஒருவினாடியில் 1 N.m. வேலை செய்யப்பட்டால், இவ் வேலை வீதத்தை 1 வாட்டு (W) ஆற்றலாகக் கொள்கிறோம். இது பொறியியல் பயன்களைப் பொறுத்தமட்டில் ஒருசிறிய அலகாதலின், கிலோவாட்டு (kW = 1000 வாட்டு) என்னும் அலகினைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$\text{தண்டு கடத்தும் ஆற்றல்,} P = \frac{2\pi n T}{60000} \text{ k.W.} \qquad (8.7)$$

எ.கா. **8.3**

100 mm விட்டமும், 1.5 m நீளமும் கொண்ட உருக்குத் தண்டு ஒன்று, 300 r.p.m. வேகத்தில் சுழன்று, 240 k.W ஆற்றலைக் கடத்துகிறது. உருக்கின் நறுக்கக் குணகம் $G = 8 \times 10^4$

N/mm^2 எனில், தண்டு முழு நீளத்தில் முறுக்கமுறும் கோணத்தையும், தண்டின் உச்ச நறுக்குத் தகைவினையும் காண்க.

தீர்வு:

ஆற்றல் $P = \frac{2\pi n T}{60000}$ kW $= 240$ k.W

எனவே தண்டின்மீது செலுத்தப்படும் முறுக்கத் திருப்புமை $T = \frac{240 \times 60000}{2\pi 300}$ N.m.

$= 7639.44$ Nm

$= 7639440$ Nmm

தண்டின் முனைஉறழ்திருப்புமை $J = \frac{\pi}{32} \times 100^4 = 9.82 \times 10^6 \ mm^4$

எனவே, உச்ச நறுக்குத் தகைவு $\tau_{max} = \frac{T}{J} r_{max}$

$$= \frac{7.63944 \times 10^6 \times 50}{9.82 \times 10^6}$$

$$= 38.9 \ N/mm^2$$

$\frac{G\theta}{l} = \frac{T}{J}$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

மொத்த முறுக்கக் கோணம் $\theta = \frac{Tl}{GJ} = \frac{7.63944 \times 10^6 \times 1500^c}{8 \times 10^4 \times 9.82 \times 10^6}$

$$= 0.0146^c = 0.836^\circ$$

எ.கா. **8.4**

நிமிடத்திற்கு 80 சுழற்சிகள் வேகத்தில் சுழன்று 300 k.W ஆற்றலைக் கடத்த வல்ல தண்டு ஒன்றனை, நறுக்க வலிமை 80 N/mm^2 கொண்ட உருக்கினால் வடிவமைக்க வேண்டுமெனில் தண்டின் விட்டத்தைக் கணக்கிடுக. வெளிவிட்டத்தில், 0.8 மடங்கு உள்விட்டம் கொண்ட, உள்ளீடற்ற உருளை வடிவில் தண்டினை வடிவமைப்புச் செய்வதன்மூலம், நாம் பெறும் பொருள் சிக்கனத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

ஆற்றல், $\frac{2 \pi n T}{60000} = 300 \text{ kW}$

எனவே தண்டின்மீது முறுக்கத் திருப்புமை, $T = \frac{300 \times 60000}{2 \times 80} \text{ Nm}$

$= 35810 \text{ N.m}$

$= 3.581 \times 10^7 \text{ N.mm}$

தேவையான முனைமுகக்கெழு , $Z_p = \frac{\text{முறுக்குத்திறன்}}{\text{நறுக்கு வலிமை}}$

$= \frac{3.581 \times 10^7}{80} = 4.476 \times 10^5 \text{ mm}^3$

அஃதாவது, $\frac{\pi D^3}{16} = 4.476 \times 10^5$

எனவே தண்டின் விட்டம் $D_s = \sqrt[3]{\frac{4.476 \times 10^5 \times 16}{\pi}}$

$= 131.61 \text{ mm}$

இனி உள்ளீடற்ற உருளையின் அளவீடுகளை நோக்குவோம்.

புறவிட்டம் D, = உள்விட்டம் d = 0.8 D எனில்,

முனைஉறழ்திருப்புமை $J = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$

$= \frac{\pi}{32} (D^4 - (.8D)^4)$

$= \frac{0.5904 \pi D^4}{32}$

முனைமுகக்கெழு $= \frac{0.5904 \pi D^4}{32} / (.5D)$

$= \frac{0.5904 \pi D^3}{16}$

தேவையான முனைமுகக் கெழு $= 4.476 \times 10^5\ mm^3$

$= \pi \frac{0.5904}{16} D^3$

எனவே, தண்டிற்குத் தேவையான வெளிவிட்டம், D $= \sqrt[3]{\frac{16 \times 4.476 \times 10^5}{0.5904 \times \pi}}$

$= 156.88\ mm$

உள்விட்டம், $d = 0.8\ D = 125.5\ mm$

முழுஉருளைத் தண்டின் வெட்டுமுகப் பரப்பு, $A_s = \frac{\pi}{4} \times 131.62^2\ mm^2$

$= 13604\ mm^2$

உள்ளீடற்ற தண்டின் வெட்டுமுகப் பரப்பு $A_h = \frac{\pi}{4} (156.88^2 - 125.5^2)$

$= 6569\ mm^2$

எனவே, பொருள் சிக்கனம் $= \frac{(13604 - 6959)}{13604} \times 100\ \% = 48.84\ \%$

(நடைமுறையில் முழுஉருளைத் தண்டின் விட்டம் 140mm என்றும், உள்ளீடற்ற தண்டின் விட்டங்கள், D = 160 mm, d = 125 mm என்றும் கொள்ளப்படலாம்)

8.5 முறுக்கச் சோதனைமூலம் நறுக்கக் குணகம் காணல் (Determination of Rigidity Modulus through Torsion Test)

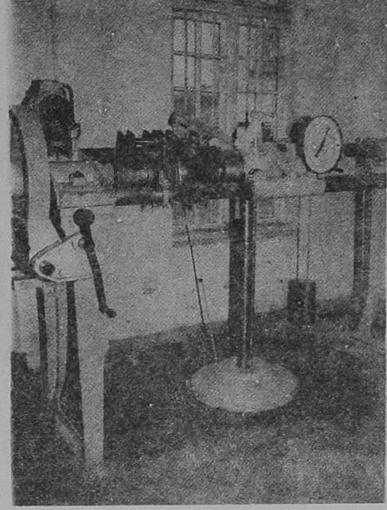
நறுக்கக் குணகம் (Rigidity Modulus) என்பது நறுக்கத் தகைவிற்கும், நறுக்கு விகலத்திற்குமிடையேயான விகிதம் எனக் கற்றோம். நேரடியாய நறுக்கச் சோதனைகள் மூலம் இதனை நிறுவுதல் எளிதன்று. ஆனால், முறுக்கச் சோதனைகள் மூலம் இதனை எளிதில் நிறுவலாம். படம் 8.3.1 இல், முறுக்கச் சோதனைப் பொறியமைப்பின் புகைப்படம் காட்டப்பட்டுள்ளது. சோதனை செய்யவேண்டிய தண்டின் விட்டத்தினை அளந்து கொண்ட பின், தண்டு பொறியின் சிடுக்கிகளில் உறுதியாக மாட்டப்பட்டு, இடைவெளி அளக்கப்பட்ட இருவெட்டு முகங்களின் சுழற்சியளவிகள் (Troptometers) பொருத்தப்படுகின்றன. தண்டின் ஒரு முனையில் முறுக்கம் செலுத்தப்படும் போது இருவெட்டு முகங்களின் சுழற்சிகளும் A, B எனும் இருசுழற்சியளவிகள் வழி அளக்கப் படுகின்றன. மறுமுனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ள கனத்த ஊசலின் (Heavy weight pendulum) சாய்வுகளை அளப்பதன்மூலம், தண்டின் மீது செலுத்தப்படும் முறுக்கத் திருப்புமை அளக்கப்படுகிறது. A, B பொருததப்பட்டுள்ள வெட்டுமுகங்களில் சுழற்சி வேறுபாட்டினை அவற்றுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தால் வகுக்கத்

தண்டின் அலகு முறுக்கம், $\frac{\theta}{l}$ கிடைக்கப் பெறும். பல்வேறு கட்டங்களில் குறிக்கப் பட்ட அளவீடுகளைக் கொண்டு, T, $\frac{\theta}{l}$ இரண்டையும் இணைக்கும் வரைபடம் வரையலாம். (படம் 8.4.)

முறுக்கச் சமன்பாட்டில், $\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l}$ என்பதிலிருந்து

$$G = \frac{TJ}{\left(\frac{\theta}{l}\right)} \qquad \text{..... (8.8)}$$

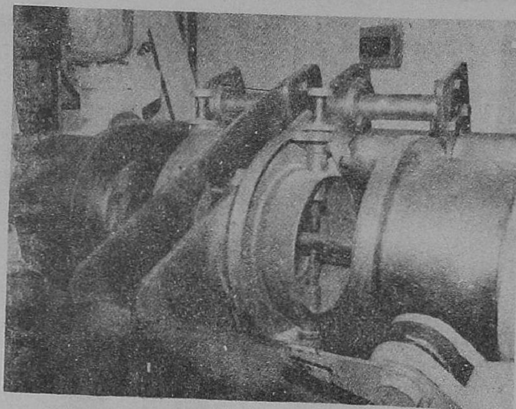
என உரைக்கலாம். J என்பது தண்டின் முனைஉறழ்திருப்புமை. இதனைக் கணக் கிட்டு ஒருமாறிலியாகக் கொண்டு T V_s $\frac{\theta}{l}$ வரைபடத்தின் சரிவால் (Slope) பெருக்கி, நறுக்கக்குணகம், G இன் மதிப்பினை அறியலாம். T vs $\frac{\theta}{l}$ வரை நேர்க்கோடா யுள்ள வரை முறுக்க விகலங்கள் மீட்சி எல்லைக்குள் இருப்பதாய் உணரலாம். இவ் வரையின் நேர்க்கோட்டுத் தன்மை மாறும் கட்டத்தில், உச்ச நறுக்குத் தகைவுகள் நெகிழ்ச்சி எல்லையை (Yield limit) அடைந்ததையும் அறியலாம். தண்டு முறிவு அடையும்வரை சோதனையைத் தொடர்ந்து நடத்திப் பொருளின் பிற வலிமைப் பண்புகளையும் அறியலாம்.



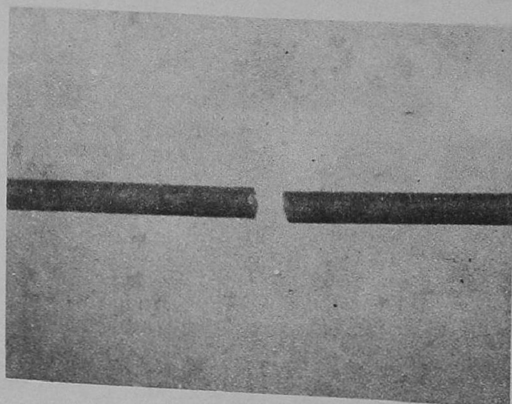
படம் 8.3.1 முறுக்கப்பொறி

8.6 நலிவுசார் ஆய்வுகள்

இதுவரை நாம் செய்த ஆய்வுகளால், தண்டின்மீது செயல்படும் முறுக்கத் திருப்புமையின் அளவை நேரடியாய் (தண்டின் அளவீடுகளைச் சார்ந்திராமல்) அறியக் கூடிய சூழ்நிலைகளே கருதப்பட்டன. இத்தகைய தண்டுகளில், அதிகபட்சம் ஏதாவதொரு வெட்டுமுகத்தில் (முனையில்) தான் முறுக்கச் சுழற்சிகள் முற்றுமாகத் தடுக்கப்படுகின்றன. மாறாய் ஒன்றனுக்கு மேற்பட்ட வெட்டுமுகங்களில் சுழற்சிகள் தடுக்கப்படின், நலிவுசார் ஆய்வுகள் வழியாக இவற்றுக்குத் தீர்வு காண முடியும். இங்கு நாம் பயன்படுத்தும் ஓர் அடிப்படையாய முறை, தண்டினை இரண்டு (அல்லது அதிகமான) பகுதிகளாய்ப் பிரித்து ஆராயும் போது, இரண்டு

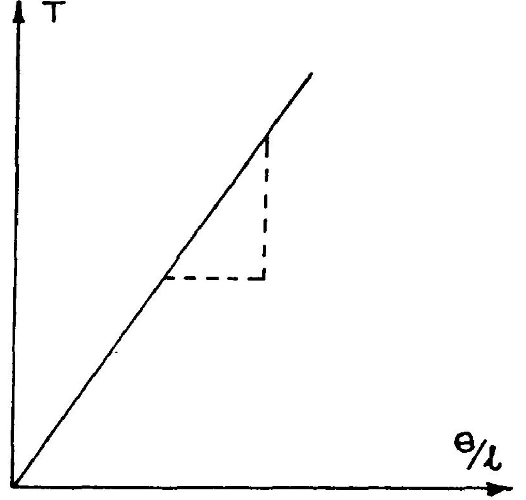


படம் 8.3.2 சுழற்சியளவி



படம் 8.3.3 முறுக்கச் சிதைவு

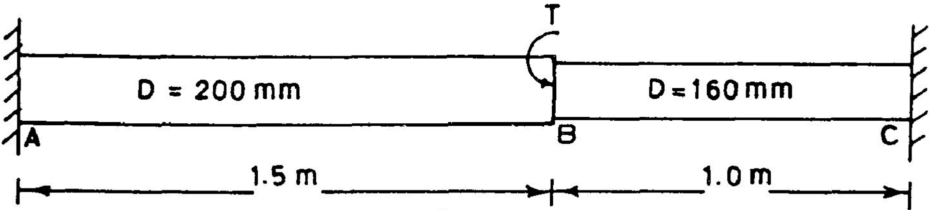
பகுதிகள் சந்திக்கும் பொதுவான வெட்டு முகங்கள் ஒரேயளவில் சுழற்சியடை கின்றன என்னும் கோட்பாடுதான். விளக்கத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் காண்போம்.



படம் 8.4

எ.கா. 8.5

படம் 8.5 இல் இருமுனைகளிலும் இணைக்கப்பட்டுள்ள தண்டு ஒன்றன் அளவீடுகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. தண்டின் மூலப் பொருளின் நறுக்கு வலிமை 45 N/mm^2 எனில், B எனும் வெட்டுமுகத்தில் எவ்வளவு முறுக்குத் திருப்புமை (Torque) செலுத்த முடியும் ?

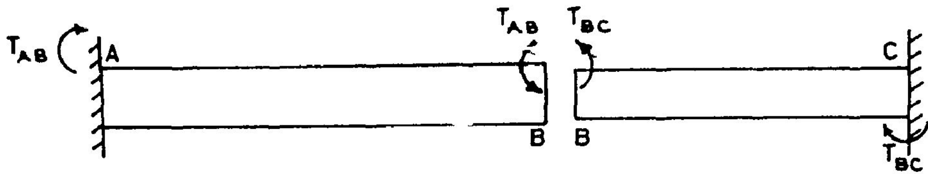


படம் 8.5

தீர்வு:

B என்னும் வெட்டுமுகத்தில் தண்டினை (கற்பிதமாய்) இரு துண்டுகளாக்கினால், AB, BC என இரண்டு தனித்தனி அமைப்புகளைப் பெறுகிறோம். (படம் 8.6 ஐ நோக்குக)

தண்டு ABC யின்மீது நாம் செலுத்தும் முறுக்குத்திருப்புமை T இல் ஒரு பகுதி தண்டு AB யாலும் மீதி தண்டு BC யாலும் தாங்கப்படுகின்றன. இவற்றை முறையே T_{AB}, T_{BC} என அழைப்பின்,



படம் 8.6

$$T_{AB} + T_{BC} = T \qquad (8.9)$$

B என்ற வெட்டுமுகத்தின் முறுக்கச் சுழற்சி, θ எனில்

$$\theta = \frac{T_{AB}\, l_{AB}}{G_{AB}\, J_{AB}} = \frac{T_{BC}\, l_{BC}}{G_{BC}\, J_{BC}} \qquad (8.10)$$

AB, BC இரு தண்டுகளும் ஒரே பொருளால் ஆனவையாதலின்

$$G_{AB} = G_{BC}$$

$$\frac{T_{AB}\, l_{AB}}{J_{AB}} = \frac{T_{BC}\, l_{BC}}{J_{BC}}$$

$$T_{AB} \times \frac{1500}{\frac{\pi}{32} \times 20^4} = T_{BC} \cdot \frac{1000}{\frac{\pi}{32} \times 16^4}$$

அல்லது $T_{AB} = 1.6276\ T_{BC}$ .. (a)

இனித் தண்டுகள் AB, BC தாங்கக் கூடிய உச்ச முறுக்கத் திருப்புமைகளைக் காண்போம்.

தண்டு AB இன் முறுக்க வலிமை (Torsional Strength) $= \frac{\pi}{16} D_{AB}^3 \times$ நறுக்க வலிமை

$$= \frac{\pi}{16} \times 20^3 \times 45 = 70686 \text{ Nmm}$$

$$= 70.686 \text{ Nm}$$

தண்டு BC இன் முறுக்க வலிமை $= \frac{\pi}{16} \times 16^3 \times 45 = 36191$ Nmm

$= 36.191$ Nm

தண்டு AB இன் முழுவலிமையையும் பயன்படுத்த முடியாது. ஏனெனில், தண்டு BC இன் மீது செயல்படும் முறுக்கத் திறனைப் போல் 1.6276 மடங்கு முறுக்கத் திருப்புமைதான் தண்டு AB இன்மீது செயல்படும்.

தண்டு BC தாங்கும் முறுக்குத்திருப்புமை = 36.191 N.m.

தண்டு AB தாங்கும் முறுக்குத்திருப்புமை = 36.191×1.6276

= 58.91 N.m

∴ தண்டு ABC இன் B என்னும் வெட்டு முகத்தில் செலுத்தக்கூடிய முறுக்குத் திருப்புமை $T = T_{AB} + T_{BC}$

$= 58.91 + 36.191$

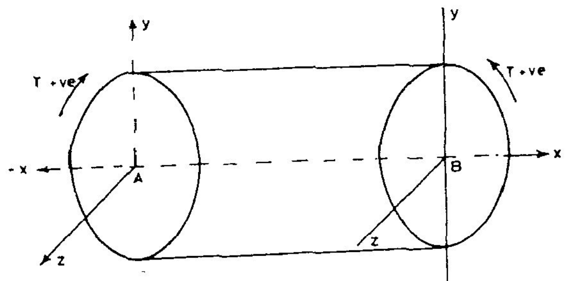
$= 95.1$ N.m

8.7 முறுக்கத் திருப்புமை படங்கள் (Torque Diagrams)

ஒருதண்டின் இருவேறு பகுதிகளில் வெவ்வேறு அளவில் முறுக்கத் திருப்புமை செலுத்தப்படுதலை எ.கா. 8.5 இல் கண்டோம். வேறுபாடுகள் மிகுதியாயிருக்கும்போது தண்டின் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் செயல்படும் முறுக்னத் திருப்புமைகளைக் காட்டும் முறுக்கத் திருப்புமைப் படங்கள் (வளைதிருப் புமைப் படங்கள் போன்று), தகைவு கள், நலிவுகள் இவற்றை ஆய்வதில் பெரிதும் துணைசெய்கின்றன.

முதலில் முறுக்கத் திருப்புமை களின் நேர்மறைத் திசைகளை வரையறுத்துக் கொள்வோம். இவ் வரையறைக்கு வலக்கைப் பெரு விரல் விதி (Right Hand Thumb Rule)யை அடிப்படையாகக் கொள் வோம். படம் 8.7 இல் தண்டின் தனித்ததொரு துண்டு காட்டப் பட்டுள்ளது. தண்டின் அச்சினை x திசையாகக் கொள்வோம்.

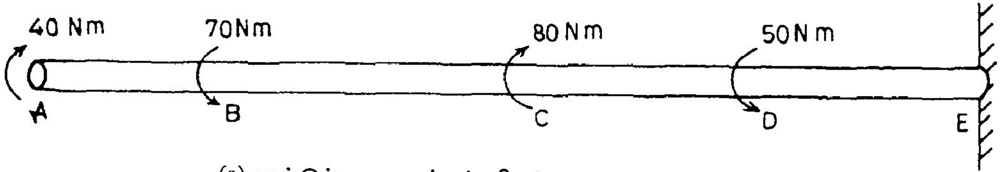
B என்ற வெட்டுமுகத் தளத்தின் குத்து (Normal) நேர்முக x திசையில் உள்ளது. அதனால், இத் தளத்தில் y திசையிலிருந்து z திசை



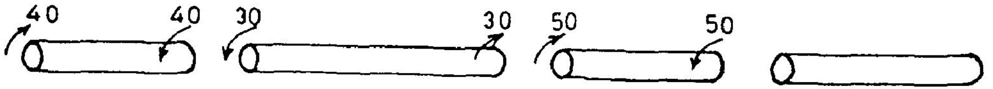
படம் 8.7 முறுக்கத் திருப்புமைகளின் நேர்மறைத் திசைகள்

நோக்கிய சுழற்சியே நேர்மறையாகக் கொள்ளப்படுகிறது. அதனால், இத் திசையில் செலுத்தப்படும் முறுக்கத் தையே நேர்மறையாய்க் கொள்ள வேண்டும். மாறாய், A என்னும் வெட்டுமுகத்தின் குத்து எதிர்முக x திசையில் இருப்பதால், z—→y சுழற்சியையே நேர்முகச் சுழற்சியாய்க் கொள்ள வேண்டும். இவ் வெட்டுமுகத்தின்மீது நேர்மறை முறுக்குத் திறனின் திசையும் அவ்வாறே வரையறுக்கப்படுகிறது.

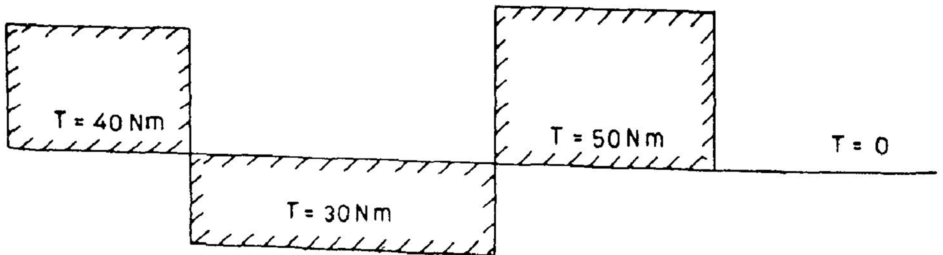
பொதுவாய் முறுக்குத் திருப்புமைகள் குறிப்பிட்ட சில வெட்டுமுகங்களிலேயே செலுத்தப்படுவதனால், இவற்றின் வரைவுகளுக்குக் கணக்கீடுகள் பெருமளவில் தேவையில்லை. தண்டின் அமைப்புப் படங்களைப் பார்த்த மாத்திரத்தில் எளிதில் வரைந்துவிட முடியும். விசைப் படங்களுடனும், முறுக்குத் திறன் படங்களுடனும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் படம் 8.8 இல் காணலாம். ஆனால், இத்தகைய படங்கள் தொடக்க நிலையில் உள்ளார்க்கே தேவை. ஓரளவு பயிற்சி பெற்றவர்கூட, நேரடியாய் முறுக்குத் திருப்புமை ஆய்வுகளைத் தெளிவாய் மேற்கொள்ளல் கூடும்.



(a) தண்டும் புறமுறுக்குத் திருப்புமைகளும்



(b) தனித்துண்ட விசைப்படம்

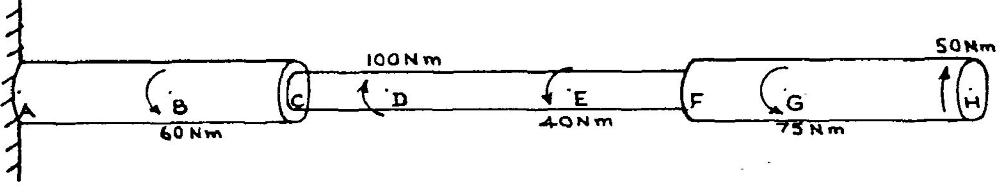


(c) முறுக்கத் திருப்புமைப் படம்

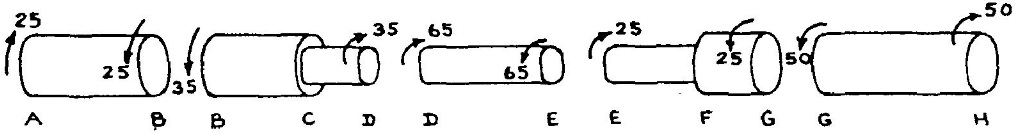
படம் 8.8

எ.கா. 8.6.

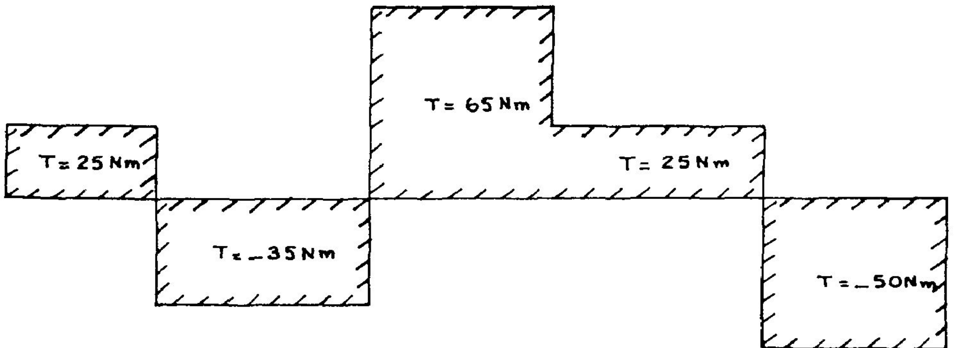
படம் 8.9 இல் காட்டப்பட்டுள்ள தண்டின் நறுக்கக் குணகம் $G = 8 \times 10^4\ N/mm^2$ எனவும், தண்டுப் பகுதிகளின் விட்டங்கள், $D_{ABC} = 100mm$, $D_{CDEF} = 60mm$, $D_{FGH} = 80$ mm எனவும், நீளங்கள் AB = .5 m, BC = .4 m, CD = .3 m, DE = .6 m, EF = .4 m, FG = .3m, GH = .6m எனவும் கொண்டு H எனும் வெட்டுமுகத்தின் சுழற்சியைக் காண்க.



(a) தண்டும் புறமுறுக்குத் திருப்புமைகளும்



(b) தனித்துண்ட விசைப்படம்



(c) முறுக்கத் திருப்புமைப் படம்

படம் 8.9

வெட்டுமுகம் A உறுதியான தாங்கியுடன் இறுகப் பிணைக்கப்பட்டால், தண்டின் முறுக்கத்திருப்புமை படம் வரைக; மேலும் வெட்டுமுகங்கள் C, E, F-களின் சுழற்சிகளையும் காண்க.

தீர்வு:

முதலில், படம் 8.9 இல் காணும் நிலையில் நலிவுகளை ஆய்வோம். வெட்டுமுகம் A இல் சுழற்சிகள் தடுக்கப்படுகின்றன. அதனால், துண்டம் AB இன் முறுக்கச் சுழற்சியே வெட்டுமுகம் B இன் சுழற்சியாகும். இதனுடன் துண்டம் BCD இன் முறுக்கச் சுழற்சியைக் கூட்ட வெட்டுமுகம் D இன் சுழற்சியைப் பெறலாம். இவ்வாறே தொடர்ந்து வெட்டுமுகம் H இன் சுழற்சியைக் காண்போம்.

$$\therefore \theta_H^* = \theta_{AB}^* + \theta_{BD} + \theta_{DE} + \theta_{EG} + \theta_{GH}$$

$$\theta_{AB} = \frac{T_{AB} \cdot l_{AB}}{G_{AB} \cdot J_{AB}}; \qquad \theta_{BD} = \frac{T_{BD} \cdot l_{BD}}{G_{BD} J_{BD}} \ldots\ldots$$

T_{AB} முதலியவற்றை N.mm களிலும், l_{AB} முதலியவற்றை mm களிலும் உரைக்க,

$$\theta = \frac{T_{AB} \times 10^3 \times l_{AB} \cdot 10^3}{8 \times 10^4 \times \frac{\pi}{32} \times D^4{}_{AB}} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{400}{\pi}\left(\frac{T_{AB} \cdot l_{AB}}{D^4{}_{AB}} + \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{400}{\pi}\left(\frac{25 \times .5}{100^4} + \frac{-35 \times .4}{100^4} + \frac{-35 \times 0.3}{60^4} + \frac{65 \times 0.6}{60^4}\right.$$

$$\left.\frac{0.25 \times 0.4}{60^4} + \frac{25 \times 0.3}{80^4} + \frac{-50 \times 0.6}{80^4}\right) \times \frac{180°}{\pi}$$

$$= 0.1353°$$

முனை H உம் உறுதியான தாங்கியுடன் பிணைக்கப்படின் இவ் அமைப்பு நலிவுசார் அமைப்பாய் மாறிவிடுகிறது. முனை H இல் செலுத்தப்படும் புறவிசை (முறுக்குத்திருப்புமை)

* ஒரு கீழடை வெட்டுமுகத்தின் சுழற்சியையும், இரண்டு கீழடைகள் (θ AB முதலியன) துண்டங்களின் முறுக்கச் சுழற்சியையும் குறிப்பன.

நேரடியாய்த் தாங்கி மேற்செலுத்தப்படுமாகலின், தண்டினைப் பாதிக்காது. தாங்கி A இன் எதிர்வினை T_A எனக்கொள்வோம்.

$$T_{AB} = T_A$$

$$T_{BD} = T_A - 60$$

$$T_{DE} = T_A - 60 + 100 = T_A + 40$$

அவ்வாறே, $$T_{EG} = T_A - 60 + 100 - 40 = T_A$$

$$T_{GH} = T_A - 75$$

இம் முறுக்குத் திருப்புமைகளைக் கொண்டு, முறுக்கச் சுழற்சிகளைக் கணக்கிடின் $\theta_H = 0$ ஆதல் வேண்டும். அதனால்,

$$\theta_H = \frac{400}{\pi \times 10^4}\left(\frac{T_A \times 0.5}{10^4} + \frac{(T_A - 60) \times 0.4}{10^4} + \frac{(T_A - 60) \times 0.3}{10^4} + \frac{(T + 40) \times 0.6}{6^4} \quad \frac{T \times 0.3}{6^4} \quad \frac{T \times 0.4}{8^4} \quad \frac{(T - 75) \times 0.6}{8^4}\right) = 0$$

அல்லது

$$T_A = \left(\frac{0.9}{10^4} + \frac{1.2}{6^4} + \frac{1.0}{8^4}\right) - \left(\frac{60 \times 0.4}{10^4} + \frac{60 \times 0.3}{6^4} - \frac{40 \times 0.6}{6^4}\right) + \left(\frac{75 \times 0.6}{8^4}\right) = 0$$

அஃதாவது $$T_A \left(\frac{12{,}60067}{10^4}\right) - \left(\frac{87.567}{10^4}\right) = 0$$

$$\therefore T_A = \frac{87.567}{12.60067} = 6.95\text{N.m} \approx 7\text{N.m}$$

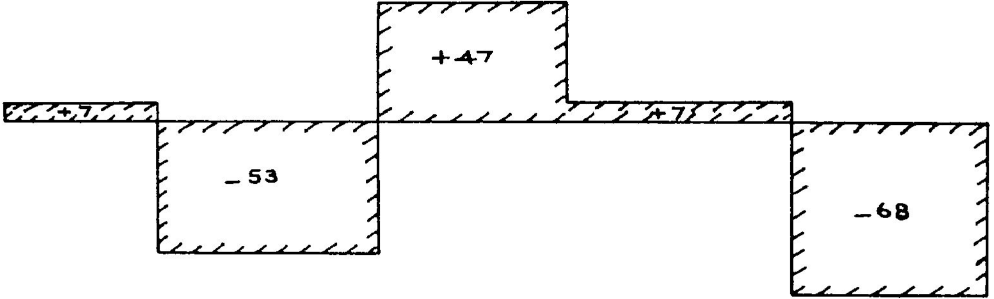
இதற்குரிய முறுக்குத்திருப்புமை வரைபடம் 8.10 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இனி, வெட்டுமுகங்களின் சுழற்சிகளைக் காண்போம்.

$$\theta_C = \frac{400 \times 180}{10^8 \times \pi}\left(7 \times 0.5 - 53 \times 0.4 - \frac{53 \times 0.3}{0.6^4}\right) = -0.1011^\circ$$

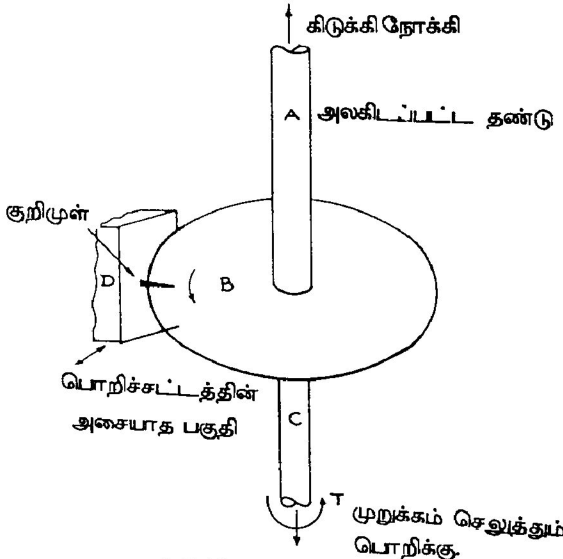
$$\theta_D = \theta_C + \frac{400 \times 180}{10^8 \times \pi}\left(\frac{47 \times 0.6}{0.6^4}\right) = +0.05559^\circ$$

$$\theta_F = \theta_D + \frac{400 \times 180}{10^8 \times \pi}\left(\frac{7 \times 0.4}{0.6^4} \quad \frac{7 \times 0.3}{0.8^4}\right) = + 0.07484^\circ$$



படம் 8.10 எ.கா. 8.6 க்குரிய முறுக்குத் திருப்புமைப்படம்

8.8 முறுக்கத் திருப்புமை அளவி



படம் 8.11 முறுக்குத் திறன் அளத்தல்

முறுக்கத் திருப்புமை அளப்பதற்குரிய பல வழிகளில் ஒன்று, வலிமைப் பண்புகள் அலகிடப்பட்ட (Calibrated) தொரு தண்டின் முறுக்கத்தைப் பயன்படுத்துதலாகும். இத்தகையதொரு அமைப்பினைப் படம் 8.11 இல் காண்கிறோம். இதில் தண்டு A இன் T vs θ உறவு, நிறுவப்பட்டு அதன் முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ள அளவிமுகப்பில், முறுக்கச் சுழற்சி, அதற்கேற்ற முறுக்குத் திருப்புமை அளவுகளால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இம் முகப்பின் மறுபக்கத்தில் முறுக்குத் திருப்புமை அளக்கப்பட வேண்டிய தண்டினை இணைத்துக் கொள்ளலாம். இத்தகைய அளவித் தண்டுகளை வடிவமைப்பதில் நலிவு, தகைவு இரண்டையும் கட்டுப்படுத்த வேண்டியிருக்கும்.

படத்தில் கருவியின் அளவிப் பகுதிமட்டும் காட்டப்பட்டுள்ளது. அலகிடப்பட்ட தண்டு, A மேல் முனையில் நிலையாகப் பொருந்தியுள்ள கிடுக்கியுடன் பிணைக்கப்பட்டு, அதன் கீழ்முனை முகப்பளவியுடன் (மற்றொரு கிடுக்கி கொண்டு) பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. அதனால், தண்டின் முறுக்கச் சுழற்சி முகப்பு, B இன் சுழற்சியாய்க் குறி முள்ளால் அளக்கப்படுகிறது. முகப்புக் காட்டும் கோணங்கள் அதற்குத் தக்க திருப்புமை அளவீடுகளில் அலகிடப்பட்டுள்ளன. அதனால், குறிமுள் நேரடியாய் முறுக்கத் திருப்புமையே சுட்டல் கூடும். தட்டு B இன் அடியிலுள்ள கிடுக்கியுடன் சோதனைத் தண்டு பிணைக்கப்படுகிறது. மறு முனையில் இத் தண்டு பிணைக்கப்படும் கிடுக்கிவழியே சோதனைத் தண்டின் மீது முறுக்கம் செலுத்தப்படுகிறது.

இக் கருவியின் அலகிட்ட தண்டான A இன் வடிவமைப்பிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டுக் காண்போம்.

எ.கா. **8.7:**

முறுக்கத் திருப்புமை அளவியாகப் பயன்படுத்த வேண்டிய தண்டு ஒன்றனை வடிவமைக்க G = 48000 N/mm^2 கொண்ட உலோகம் கிடைக்கிறது. தண்டின் நீளம் 0.6m இருக்க வேண்டும். தண்டின்மீது 1 N.m. முறுக்கத் திருப்புமைக்கு ஒருமுழுச்சுற்றுக் காட்ட வேண்டுமெனில் தண்டின் குறுக்கு வெட்டு அளவீடுகளைக் கணக்கிடுக.

அடிப்படைச் சமன்பாடு $\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l}$

ஒருமுழுச் சுற்றக்கு $T = 1\ \text{Nm} = 1000\ \text{N.mm}$

$\theta = 2\pi$ ரேடியன்கள்

எனவே, $$\frac{1000}{\frac{\pi}{32} d^4} = \frac{48000 \times 2\pi}{600}$$

$$\therefore \quad d^4 = \frac{1000 \times 600 \times 32}{2\pi^2 \times 48000}$$

$$\therefore \quad d = \sqrt[4]{\frac{1000 \times 600 \times 32}{2\pi^2 \times 48000}}$$

$$= 2.1217\ \text{mm}$$

எ.கா. 8.8:

கடந்த எடுத்துக்காட்டில் தேவைப்படும் கம்பியைச் சரியாக 2.1217 mm விட்டத்துடன் வடிப்பதற்குப் பதிலாய்க் கைவசம் இருக்கும் 2 mm விட்டமுள்ள கம்பியைப் பயன்படுத்த முடிவு செய்தால் கம்பியின் நீளத்தை எவ்வளவிற்கு மாற்ற வேண்டும்? கம்பியில் அனுமதிக்கக் கூடிய காப்பு நறுக்குத் தகைவு, 54 N/mm^2 என்றால், கருவியால் அளக்கக்கூடிய உச்ச முறுக்கத் திருப்புமை எவ்வளவு?

தீர்வு:

கம்பியின் விட்டம் $d = 2\ mm$

முனையின் உறழ்திருப்புமை $J = \frac{\pi}{32} \times 2^4 = 1.5708\ mm^4$

எனவே, $$\frac{1000}{1.5708} = \frac{48000 \times 2\pi}{l}$$

$$l = \frac{48000 \times 2\pi \times 1.5708}{1000} = 473.74\ mm$$

கம்பியில் உச்சத் தகைவு $\tau_{max} = 54\ N/mm^2$

$$\frac{\tau_{max}}{r_{max}} = \frac{T_{max}}{J}$$

உச்ச முறுக்கத் திருப்புமை $T_{max} = \frac{\tau_{max}}{r_{max}} \times J$

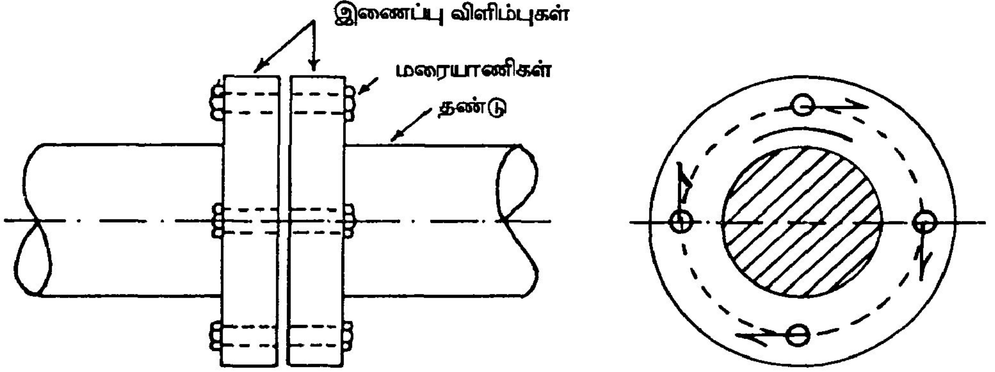
$$= \frac{54 \times 1.5708}{1.0} = 84.4\ N.mm$$

$$= 0.0848\ N.m$$

8.9 தண்டு இணைப்புகள் (Shaft Couplings)

இரண்டு வெவ்வேறு தண்டுகள் இணைக்கப்படும்போது, ஒருதண்டிலிருந்து மற்றொரு தண்டிற்கு இணைப்புகள் வழியாகவே முறுக்கம் செலுத்தப்படுகிறது. இத்தகைய இணைப்புகளில் ஒருவகையைப் படம் 8.12 தண்டு இணைப்பு காட்டுகிறது. இவ் இணைப்பில் தண்டுகள் இணையும் முனையில் (தண்டுகள் இரண்டும் வெவ்வேறு அளவினதாயும் இருக்கலாம்). அவற்றுடன் இருவிளிம்புகள் (Flanges) பொருத்தப்பட்டு, விளிம்புகள் இரண்டும்

மரையாணிகள்கொண்டு இணைக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய இணைப்பு ஒன்றன் வடிவமைப்பிற்கு எடுத்துக்காட்டு ஒன்று காண்போம்.



படம் 8.12 தண்டு இணைப்பு

எ.கா. 8.9 :

படம் 8.12 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வகை இணைப்பு ஒன்றனில் செலுத்தப்படும் முறுக்கத் திருப்புமை, 37500 Nm தண்டுகளின் விட்டங்கள் முறையே 180 mm, 160 mm விளிம்பு களின் வெளிவிட்டம் 300 mm, விளிம்புகள் நறுக்கு வலிமை90 N/mm^2 கொண்ட மரையாணிகள் ஆறு கொண்டு இணைக்கப்படுகின்றன. தண்டுகளின் அச்சிலிருந்து மரையாணிகளின் தூரம் 120 எனில் மரையாணிகளின் விட்டம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

தீர்வு:

ஒரு மரையாணிமீது செயல்படும் நறுக்கு விசை, Q எனில், அச்சின்மீது இவ் விசையின் திருப்புமை = Q × மரையாணியின் ஆரத்தூரம், r_b

மரையாணிகள் 6 எனில்

மொத்த திருப்புமை = $Q \times r_b \times 6$ = தண்டின் முறுக்குத் திருப்புமை

அஃதாவது, $Q \times 120 \times 6 = 37500 \times 1000$ N.mm

எனவே, ஒருமரையாணிமீது

நறுக்கு விசை $Q = \frac{37500000}{120 \times 6} = 52083.3$ N

மரையாணியின் நறுக்கு வலிமை $= 90\ N/mm^2$

எனவே, தேவையான மரையாணியின்
குறுக்குப் பரப்பு $= \frac{52083.3}{90} = 578.704\ mm^2$

மரையாணியின் விட்டம் d எனில்,

$$\text{பரப்பு}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} = 578.704$$

$\therefore$ மரையாணியின் விட்டம், d = 27.145 mm

எனவே, 28 mm விட்டமுள்ள மரையாணிகள் பயன்படுத்தப்படலாம்.

பயிற்சிகள்:

8.1 2.4 m நீளமுள்ள உருக்குத் தண்டின் புறவிட்டம் 40mm, உள்விட்டம் 28mm உருக்கின் நறுக்கவலிமை 84 N/mm^2 தண்டில் மொத்த முறுக்கச் சுழற்சி 1° க்கு மேல் இருக்கக் கூடாதெனில், தண்டின்மீது செலுத்தக்கூடிய முறுக்கத் திருப்புமை எவ்வளவு?

8.2 1200 r.p.m. வேகத்தில் சுழலும் உருக்குத் தண்டு ஒன்று 45kW ஆற்றல் கடத்த வேண்டுமெனில், வெளிவிட்டத்தில் 3/4 பங்கு உள்விட்டம் கொண்ட உருக்குத் தண்டு ஒன்றன் அளவீடுகளைக் கணக்கிடுக (உருக்கின் நறுக்குவலிமை 72 N/mm^2 எனக் கொள்க).

8.3 படம் 8.5 இல் காணப்படும் தண்டின்மீது வெட்டுமுகம் B இல் செலுத்தப்படும் முறுக்குத் திருப்புமை, 240 N.m எனில், இவ் அமைப்பினை 36 N/mm^2 நறுக்குவலிமை கொண்ட வார்ப்பிரும்பினால் சீரான தண்டாக வடிவமைக்க.

8.4 ஒருதண்டினை முழுஉருளை வடிவில் அமைப்பதனைவிட, வெளிவிட்டம் D, உள்விட்டம் kD. கொண்ட உள்ளீடற்ற உருளை வடிவில் வடிவமைக்கப் பொருட் சிக்கனம் எவ்வளவு விழுக்காடு என்பதனை k இன் கோவையாய் உரைக்க.

8.5 20 mm வெளிவிட்டமும் 12mm உள்விட்டமும் கொண்ட உலோகக் குழாய் ஒன்றன்மீது நிகழ்த்திய சோதனையில் 250 mm இடைவெளியில் உள்ள இருவெட்டுமுகங்களில் அளக்கப்பட்ட சுழல் கோணங்கள், கீழே பட்டியலின் தரப்பட்டுள்ளன.

T_{Nm}	0	15	30	45	60	75
θ_1	273°	273.12	273.24°	273.36°	273.49°	273.65°
θ_2	247.5°	247.92°	248.34°	248.77°	249.18°	249.77°

8.6 மேலே காணப்படும் உலோகத்தால், முறுக்குத் திருப்புமையின் அளவியொன்று அமைக்க, 8 mm வெளிவிட்டமும் 5 mm உள்விட்டமும் கொண்ட தண்டு ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. 5 N.m முறுக்கத் திருப்புமை செலுத்தத் தண்டு ஒரு முழுச் சுற்றுச்சுழல் வேண்டுமெனின் தண்டின் நீளம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

8.7 80 mm விட்டமுள்ள உருக்குத் தண்டு ஒன்றும் 100 mm வெளிவிட்டமும், 75 mm உள்விட்டமும் கொண்ட தண்டு ஒன்றும் படம் 8.12 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வகையில் இணைக்கப்படுகின்றன. தண்டுகளின் நறுக்கு வலிமை 60 N/mm^2 விளிம்புகளில்,72 mm ஆரத் தூரத்தில் 20 mm மரையாணிகள் நான்கு பொருத்தப் படுகின்றன. மரையாணிகளின் நறுக்கு வலிமை 84 N/mm^2 எனில், தண்டுகள் மீது செலுத்தக் கூடிய முறுக்கத் திருப்புமை எவ்வளவு ?

9. தகைவு நிலை ஆய்வுகள்
(Analysis of States of Stress)

9.1 முன்னுரை

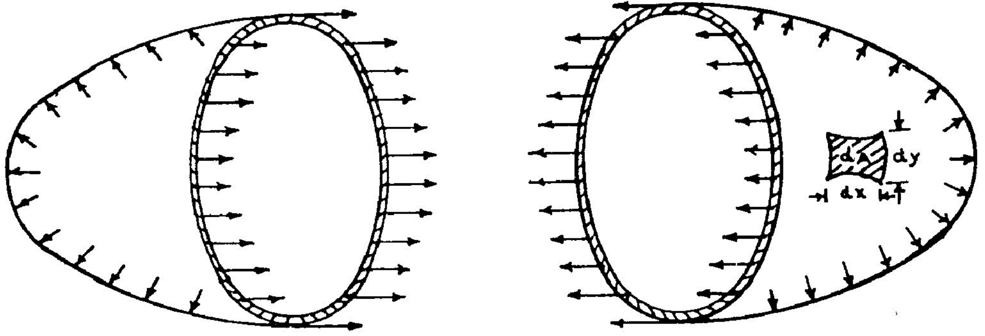
திண்மங்களின்மீது புறவிசைகள் செலுத்தப்படும்போது அவற்றுள் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுகளைப் பல கோணங்களில், (அச்சு விசைகளால், வளைதிருப்புமைகளால், நறுக்கு விசைகளால், முறுக்கத் திருப்புமைகளால்) ஆய்ந்தோம். ஆயினும், இவ் ஆய்வுகளில் ஒரு சமயத்தில் ஒரு வகைப்பட்ட புறவிசைக் கூறுகளையே கருத்திற் கொண்டு ஆய்வுகளை மேற்கொண்டோம். நடைமுறையில் நாம் காணும் அமைப்புகள் பலவற்றில் ஒரே சமயத்தில் ஒன்றனுக்கு மேற்பட்ட புறவிசைக் கூறுகள் செயல்படுதலைக் காணமுடியும். இத்தகைய சூழ்நிலைகளில் சிலவற்றை இங்கு ஆய்வோம். மேலும், ஒரு முனையிலிருந்து மறுமுனைக்கு விசை செலுத்தும் திண்மம் ஒன்றின் உட்பகுதியில் தகைவுகளின் பரவலைப் (Stress Distribution) பொதுவான முறையிலும், குறிப்பாய் வடிவமைப்புகளிலோ, விசைச் செலுத்ததிலிலோ காணப்படும் திடீர் மாறுபாடுகளின் விளைவுகளையும் இவ்வத்தியாயத்திற் காணலாம்.

9.2 மெலிசுவர்க் கலங்கள் (Thin Shells)

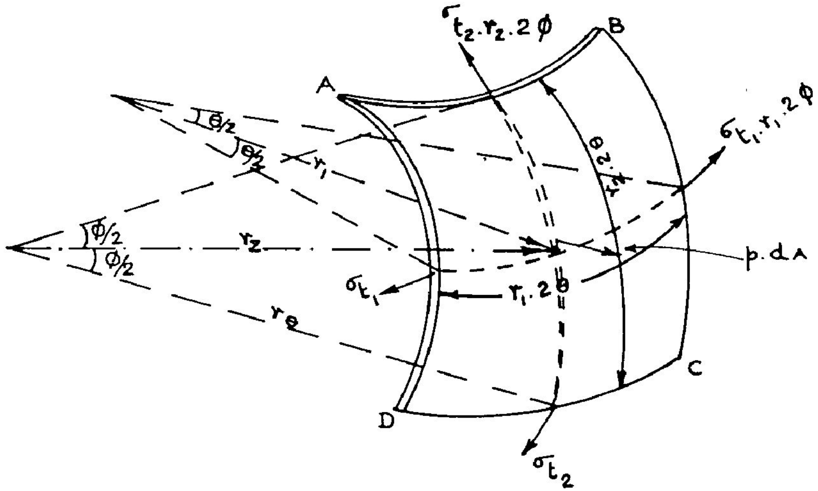
விசைச் செலுத்தத்தில் (Force Application) ஒரு முக்கிய வகை அழுத்தம் (Pressure). நீர்மங்கள், அல்லது வளிமங்களின் கொள்கலங்களின் உட்சுவர்களின்மீது, பாய்ம அழுத்தம் (Fluid pressure) சீரான அளவில், ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சுவர்களின் பரப்பிற்குச் செங்குத்தாய திசையில் செயல்படும். மூடிய கோளங்கள் முதலிய கலங்கள் நீர்மங்களினுள் ஆழத்தில் இருத்தப்படும்போது , இவற்றின் சுவர்களின்மீது இதே அழுத்தம் வெளிப்புறச் சுவர்களின்மீது செலுத்தப்படும். இத்தகைய கலங்களுக்கு எடுத்துக்காட்டாக, கொதிகலன்கள், எரிவாயுக் கலன்கள், எண்ணெய் சேமிப்புத் தொட்டிகள் போன்ற எண்ணற்ற எடுத்துக்காட்டுகளைச் சுட்டலாம். இத்தகு கலன்களில் அழுத்தங்களால் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுகளையும், விகலங்களையும் ஆய்வதில் கருத்துச் செலுத்துவோம்.

மூடிய கலன் ஒன்றனுள் உள் அழுத்தம் செலுத்தப்படும்போது, இவ் அழுத்தத்தைத் தாங்குமுகத்தால் அதன் சுவர்கள் விரிவடைகின்றன. அதனால் சுவர்களில் நீள் தகைவுகள் பல்வேறு திசைகளிலும் தோற்றுவிக்கப்படுகின்றன. இத் தகைவுகளின் அளவுகள் கலனின் வடிவமைப்பு, செலுத்தப்படும் அழுத்தத்தின் அளவுகளைப் பொறுத்தன. இனி இவற்றின் அளவீடுகளைக் கணிப்போம்.

படம் 9.1 இல் ஒரு மூடிய கலன் ஒன்றன் உள்அழுத்தம் p_i செயல்படும்போது தோன்றும் தகைவுகள் சுட்டப்பட்டுள்ளன. கலத்தின் சுவர்களில் செயல்படும் தகைவுகளின் போக்கினைச்



9.1 (a) அழுத்தத்தின் விளைவுகள்



(b) சிறுதுண்டம் dA இல் செயல்படும் விசைகள்

படம் 9.1 மெலிசுவர்க் கலனில் அழுத்தமும் சுவர்த் தகைவுகளும்

சுட்ட, கலன் இருவேறு பகுதிகளாய்ப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொன்றன் வெட்டுமுகத்திலும் செயல்படும் தகைவுகளும் காட்டப்பட்டுள்ளன. கலனில் வடிவமைப்பை வரையறுக்க இரண்டு கூறுகள் வேண்டும். அவை, கலனின் மேற்பரப்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சுவர்த் தடிப்பு, t யும் அதே புள்ளியில் கலன் சுவரின் வளைமையும் (Curvature) ஆகும். உருளை போன்ற வடிவங்களில் ஒருதிசையில் மட்டும் வளைமை இருக்கும். ஆனால், கோளம், முட்டை வடிவம் போன்ற

மேற்பரப்புகளுக்குப் பல திசைகளிலும் வளைமை உண்டு. இவற்றை ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தாய இருதிசைகளின் வளைமைக் கூறுகளால் வரையறுக்கலாம். வளைமையின் அளவு, புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறுபடக் கூடும். அதனால், கலனின் மேற்பரப்பில் சிறிதளவு பரப்பு dA கொண்டதொரு துணுக்கினை எடுத்துக்கொண்டு இத் துணுக்கின்மீது செயல்படும் விசைகளை நோக்குவோம். இவை படம் 9.1.b இல் சுட்டப்பட்டுள்ளன. இத் துணுக்கின் மையத்தையே ஆய மையமாகக் கொண்டு இதன் மேற்பரப்பின்மீது ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தாய இருகோடுகளை வரைவோம். இவ்விரு திசைகளையும் முறையே 1, 2 எனப் பெயரிட்டழைப்போம். துணுக்கு மிகச்சிறிதாதலின், துணுக்கின் எல்லைக்குள், இவ்விரு கோடுகளும் வட்ட வில்லின் வடிவிலிருப்பதாய்க் கருதலாம். திசை 1 இல் வரையப்படும் வில்லின் வளைவாரம், r_1 , வளைவு மையம் O_1 இல் இவ்வில் எதிர்கொள்ளும் கோணம் θ எனக் கொள்ளலாம். அவ்வாறே, திசை 2 இல் வரையப்படும் வில்லின் வளைவாரம் r_2 , இதன் வளைவு மையம் O_2 , இவ்வில் எதிர்கொள்ளும் கோணம் φ எனவும் கொள்வோம்.

திசை 1 இல் வில்லின் நீளம் $= r_1 \cdot \theta$

திசை 2 இல் வில்லின் நீளம் $= r_2 \cdot \varphi$

துணுக்கின் மையத்தில் துணுக்கின் தொடுதளம் ஒன்றனைக் கற்பிதம் செய்வோம். கோணங்கள் θ , φ இரண்டும் மிகச் சிறியனவாதலின், தொடுதளத்தின்மீது துணுக்கின் வீழலாய் வில்களின் நீளங்களையே பக்கங்களாய்க் கொண்ட செவ்வகத்தையே கருதலாம். எனவே, (அதன் வீழலின்) பரப்பு , $dA = r_1 \theta \cdot r_2 \varphi$

கலத்தின் உள்அழுத்தம் $= p_i$

எனவே, துணுக்கின்மீது குத்துவிசை, $P_n = p_i \, dA = p_i r_1 \theta \cdot r_2 \varphi$

குத்துவிசை, P_n ஐச் சமனிலையில் இருத்தும் விசைகளை நோக்குவோம் இவை கலத்தின் சுவர்களில் செயல்படும் அகவிசைகளேயாகும். திசை 1 இல் நீள்தகைவு σ_1 எனவும், திசை 2 இல் நீள்தகைவு σ_2 எனவும் கொள்வோம்.

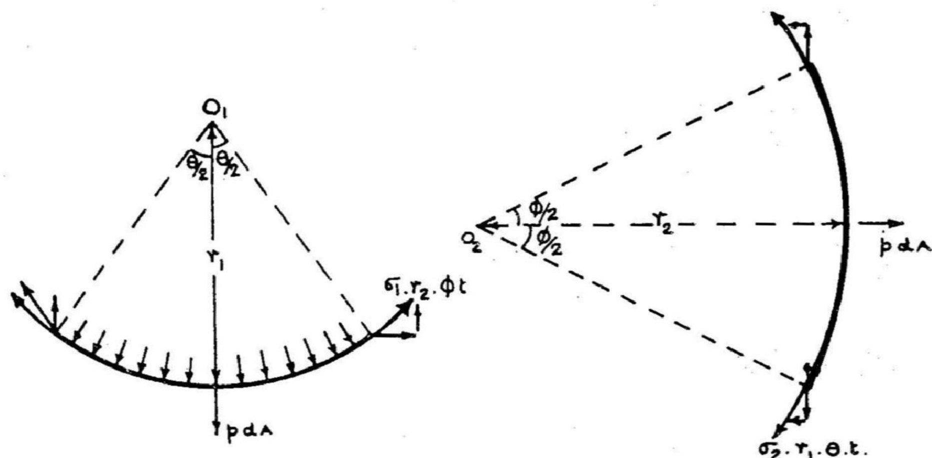
σ_1 செயல்படும் பரப்பு $= r_2 \varphi . t$

σ_2 செயல்படும் பரப்பு $= r_1 \theta . t$

எனவே திசை 1 இல், துணுக்கின் விளிம்பில் செயல்படும் விசை,

$$F_{n1} = \sigma_1 \cdot r_2 \ \varphi . t$$

இதனை துணுக்கின் மையத்தில் துணுக்கின் தொடுதளத்தின் கூறு, குத்துக் கூறு என இரண்டு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம் (படம்9.2 (a)); இவற்றுள் தொடுதளக் கூறுகள் தமக்குள்ளே சமனிலையில் இருக்கும்.



படம் 9.2

குத்துக் கூறு. $F_1 = -2\cdot\sigma_1\ r_2\ \varphi t\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}$

$$= \sigma_1\ r_2\ t\cdot\varphi\cdot\theta \quad \left(\because\ \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}\right)$$

இவ்வாறே படம் 9.2.(b) ஐ நோக்க , திசை 2 இல் செயல்படும் நீள்தகைவு, σ_2 இனால் துணுக்கின்மீது செலுத்தப்படும் விசையின் குத்துக் கூறு, $F_2 = -\sigma_2\ r_1\ t\ \varphi\ \theta$ எனக் காணலாம்.

எனவே, சமனிலைச் சமன்பாடு,

$$P_n + F_1 + F_2 = 0$$

அல்லது,
$$p_i\ r_1\ r_2\ \varphi\ \theta - \sigma_1\ r_2\ t\ \varphi\ \theta - \sigma_2\ r_1\ t\ \varphi\ \theta = 0 \qquad (9.1)$$

$r_1\ \theta\cdot r_2\ \varphi\cdot t$ என்பது துணுக்கின் கன அளவு. சமன்பாடு 9.1 ஐ துணுக்கின் கனஅளவால் வகுக்க, $\dfrac{p_i}{t} - \dfrac{\sigma_1}{r_1} - \dfrac{\sigma_2}{r_2} = 0$

அல்லது,
$$\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{p_i}{t} \qquad (9.2)$$

சமன்பாடு 9.2 பொதுவாய எவ்வித வடிவமைப்பிற்கும் பொருந்தக்கூடிய அடிப்படைச் சமன்பாடு. இதனைப் பயன்படுத்தி நமக்குத் தெரிந்த சில வடிவமைப்புகளை ஆய்வோம்.

உருளை வடிவக் கலம் (Cylindrical Shell)

இஃது ஒருதிசை வளைமை கொண்ட வடிவமைப்பு . இதற்கு $r_1 = r$, வெட்டுமுகத்தின் ஆரம் . $\frac{1}{r_2} = 0$ எனலாம் . எனவே,

$$\frac{\sigma_1}{r} = \frac{p_i}{t}$$

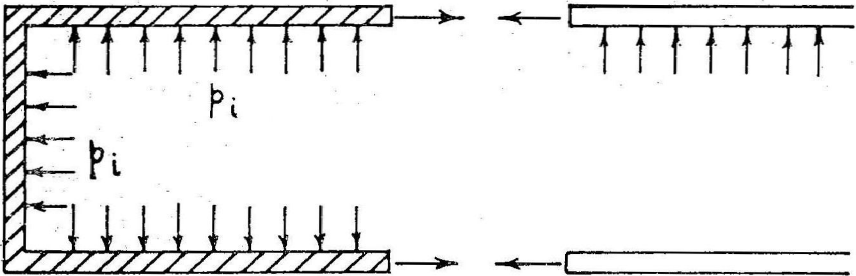
அல்லது

$$\sigma_1 = \frac{p_i r_1}{t} \qquad (9.3)$$

கலத்தின் புறப்பரப்பின்மீது அழுத்தம் இருப்பின், இதனை எதிர்மறையாய்க் கொள்ள, σ_1 இன் மதிப்பு எதிர்மறையாய்க் கிட்டும். இஃது இறுக்கத் தகைவினைச் சுட்டும்.

சமன்பாடு 9.3 தரும் விடை நீண்ட குழாய்களின் சுவர்களில் தகைவு கண்டு பிடிக்க உதவுகிறது.

அழுத்தக் கொதிகலன்கள் போன்று மூடப்பட்ட உருளை வடிவக் குழாய்களின் வெட்டுமுகத்திற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் தகைவுகள் செயல்படும். இதனைப் படம் 9.3 சுட்டுகிறது.



படம் 9.3 உருளைவடிவக்கலன்

இதில் ஆரம் r கொண்டதொரு உருளைவடிவக்கலன் மூடப்பட்ட பகுதியுடன் காட்டப்பட்டுள்ளது . கலத்தின் வளைசுவர்களின்மீது அழுத்தம் செயல்படுவதனால் பரிதியின் (Circumference) திசையில் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவு, சமன்பாடு 9.3 ஐப் பயன்படுத்தி கணக்கிடப்படுகிறது . ஒருதிசையில்மட்டும் வளைமையிருப்பின் பரிதியின் திசையில் தகைவினை σ_θ எனக் குறிப்பிடுவர்.

மூடியின்மீது (மூடியின் வடிவம் எப்படியிருப்பினும்) செயல்படும் அழுத்தத்தின் x திசைக் கூறு, $\pi r^2 p_i$ (அஃதாவது வெட்டுமுகப் பரப்பின்மீது செலுத்தப்படும் மொத்த அழுத்தம்). இவ் விசையைச் சமனிலையில் இருத்துவது, கலத்தின் சுவர்களில் கலத்தின் நீளத் திசைக்கு இணையாய்ச் செயல்படும் தகைவுகளின் கூட்டு, $\sigma_l \,.\, 2\pi r t$ ஆகும். எனவே, $\sigma_l \,.\, 2\pi r t = \pi r^2 p_i$ என்பதிலிருந்து

$$\sigma_l = \frac{p_i\, r}{2t} \qquad (9.4)$$

என்னும் கோவையைப் பெறுகிறோம்.

அச்சுத் திசைத் தகைவு, σ_l பரிதித் திசைத் தகைவு, σ_θ வில் பாதியாயிருப்பதனைக் காணலாம். இவ் இரண்டும் விளைக்கும் விகலங்களைக் காண்போம். சுவர்ப் பொருளின் நீள்மைக்கெழு E பாய்சான் விகிதம் ν எனக் கொண்டால்,

பரிதித் திசை விகலம் $$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \nu\frac{\sigma_l}{E}$$

அச்சுத் திசை விகலம் $$\varepsilon_l = \frac{\sigma_l}{E} - \nu\frac{\sigma_\theta}{E}$$

இவற்றில் $\sigma_\theta = \frac{pr}{t}$, $\sigma_l = \frac{pr}{2t}$ எனக் கொண்டால்,

$$\varepsilon_\theta = \frac{pr}{tE} - \nu\frac{pr}{2tE} = \frac{pr}{2Et}(2-\nu) \qquad (9.5)$$

$$\varepsilon_l = \frac{pr}{2tE} - \nu\frac{pr}{Et} = \frac{pr}{2Et}(1-2\nu) \qquad (9.6)$$

இவ் விகலங்களால் கலத்தின் கொள்ளளவு (உருளைப் பகுதியில் மட்டும்) எவ்வளவு அதிகரிக்கிறது என்பதனைக் கணக்கிடக் கலத்தின் நீளத்தை l எனக் கொண்டு காண்போம்.

கொள்ளளவு $= \pi r^2 l$

பரிதித்திசை விகலம் ε_θ பரிதி முழுவதும் சீராயிருப்பதால்,

பரிதியின் மாறிய நீளம் $= 2\pi r(1+\varepsilon_\theta)$

எனவே, கலத்தின் மாறிய ஆரம் $= r(1+\varepsilon_\theta)$

கலத்தின் மாறிய நீளம் $= l(1+\varepsilon_l)$

கலத்தின் மாறிய கொள்ளளவு $= \pi\left\{r(1+\varepsilon_\theta)\right\}^2 \cdot l(1+\varepsilon_l)$

கொள்ளளவு மாற்றம் $\sigma V = \pi\left\{r(1+\varepsilon_\theta)\right\}^2 \; l(1+\varepsilon_l) - \pi r^2 l$

$$= \pi r^2 l\left((1+\varepsilon_\theta)^2 \times (1+\varepsilon_l) - 1\right)$$

$$= \pi r^2 l\left\{1 + 2\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_l + 2\varepsilon_\theta \,.\, \varepsilon_l + \varepsilon_\theta^2 \,.\, \varepsilon_l - 1\right\}$$

மிகச்சிறு அளவுகளாய $\varepsilon_\theta{}^2$, $\varepsilon_\theta\,\varepsilon_l$, $\varepsilon_\theta^2\,\varepsilon_l$

இவற்றைப் புறக்கணிக்க,

$$\delta V = \pi r^2 l(2\varepsilon_\theta + \varepsilon_l)$$

ε_θ, ε_l இவற்றுக்குரிய மதிப்புகளைச் சமன்பாடுகள் 9.5, 9.6 இவற்றிலிருந்து தர,

$$\delta V = \pi r^2 l \cdot \frac{pr}{2Et}\left(2(2-\nu) + (1-2\nu)\right)$$

அல்லது,
$$\delta V = \pi r^2 l \cdot \frac{pr}{2Et}(5-4\nu) \qquad (9.7)$$

இதில் $\pi r^2 l$ என்பதை V எனக் குறிப்பிடின்,

$$\delta V = V \cdot \frac{pr}{2Et}(5-4\nu)$$ எனக் கொள்ளலாம்.

எ.கா. 9.1

2 மீட்டர் விட்டமும் 3 மீட்டர் நீளமும் கொண்ட கொதிகலன் ஒன்று தாங்க வேண்டிய உள்அழுத்தம், 2.4 N/mm^2 கொதிகலம் கட்டப் பயன்படும் உருக்கின் நீள்வலிமை 120 N/mm^2 எனில், கொதிகலச் சுவரின் தடிப்பு எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்? அழுத்தம் செயல்படும்போது கொதிகலத்தின் கொள்ளளவு எவ்வளவாயிருக்கும்? உருக்கின் நீள்மைக் குணகம் 200 N/mm^2, $\nu = 0{\cdot}3$ எனக் கொள்க.

தீர்வு:

கொதிகலச் சுவரின் தடிப்பினை t எனக் கொள்வோம். கொதிகலன் சுவரில் செயல்படும் தகைவுகளில் σ_θ தான் மிகுதியானது. அதனால், σ_θ , 120 N/mm^2 ஐவிட குறைவாக இருக்க வேண்டும்.

அஃதாவது, $$\sigma_\theta = \frac{pr}{t} \le 120$$

எனவே, $$t = \frac{p.r}{\sigma_\theta} = \frac{2.4 \times 1000}{120} = 20mm$$

கொள்ளளவு அதிகரிப்பு $$\delta V = \pi r^2 l \cdot \frac{pr}{2Et}(5 - 4v)$$

கொள்ளளவு, $$V = \pi r^2 l = \pi \times 1^2 \times 3 = 9.425\ m^3$$

எனவே, $$\delta V = 9.425 \times \frac{2.4 \times 1000}{2 \times 200 \times 10^3 \times 20}(5 - 4 \times 0.3)\ m^3$$

$$= 9.425\ (0.00114) = 0.010744\ m^3$$

அல்லது 10.744 லிட்டர்கள்

கோள வடிவக் கலன்கள் (Spherical Shells)

மெல்லிய சுவர்கொண்ட கோளமொன்றன் சுவரில் எப் புள்ளியிலும் ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தாய இருதிசைகளின் வளைமைகள் சமமாகவே இருக்கும். வளைவாரங்கள் $r_1 = r_2$ = கோளத்தின் ஆரம், r ;

எனவே, $\frac{\sigma_1}{r} + \frac{\sigma_2}{r} = \frac{p}{t}$. வடிவச் சீர்மையைப் பயன்படுத்தி, $\sigma_1 = \sigma_2$ எனலாம்.

எனவே, $$2 \cdot \frac{\sigma_1}{r} = \frac{P}{t}$$

அல்லது $$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \qquad (9.10)$$

தகைவு 1, 2 எனும் இருதிசைகளிலும் சமமாகவே இருப்பதால்

பரிதித் திசை விகலம் $$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_1}{E} - v\frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma_1}{E}(1 - v)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{pr}{2Et}(1-\nu)$$

பரிதித் திசை விகலத்தினையே, (முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் கண்டது போல்) ஆரத்திசை விகலமாகவும் கொள்ள,

$$\text{ஆர மாற்றம்} = r\left(1 + \frac{pr}{2Et}(1-\nu)\right)$$

$$\text{கனஅளவு மாற்றம் } \delta V = \frac{4}{3}\pi\{r\ (1+\varepsilon_\theta)\}^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3\{(1+\varepsilon_\theta)^3 - 1\}$$

$$= V\left\{1 + 3\varepsilon_\theta + 3\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta^3 - 1\right\}$$

மிகச் சிறுஅளவுகளாய ε_θ^2, ε_θ^3 இவற்றைப் புறக்கணிக்க,

$$dV = v.3\varepsilon_\theta = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3}{2}\frac{pr}{Et}(1-\nu) \quad 9.11$$

கனஅளவு மாற்றத்தைக் கனஅளவின் ஒருபின்னமாய் உரைப்பதற்கு வசதியாய்ச் சமன்பாடு 9.11 சுருக்கப்படாமலே இருத்தல் நன்று.

சமன்பாடுகள் 9.10, 9.11 இவற்றைப் பயன்படுத்தி எடுத்துக்காட்டு 9.1 இல் காணப்பட்ட கொதிகலத்தின் ஒருமுனையில் அரைக்கோள வடிவம் கொண்ட மூடியை வடிவமைத்து, இப் பகுதியின் கனஅளவு மாற்றத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

$$\sigma = \frac{pr}{2t} = \frac{2.4\times 1000}{2\times t} = 120\ \text{N/mm}^2$$

எனவே, சுவரின் தடிப்பு 10mm இருந்தாற்போதும்.

$$\text{பரிதித் திசை விகலம், } \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E}(1-\nu) = \frac{120}{200\times 1000}(1-0.3)$$

$$= 0.00002$$

$$\text{அரைக்கோளப் பகுதியின் கொள்ளளவு } \frac{4}{6}\pi r^2 = 2.0944^3$$

எனவே,

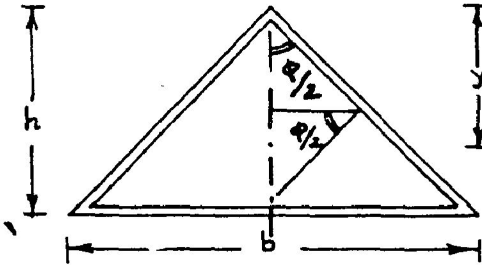
$$\text{கொள்ளளவு அதிகரிப்பு} = V\times 3\varepsilon_\theta$$

$$= \quad 2.0944 \times 3 \times 0.00042 = 0.02639\ m^3$$

$$= \quad 2.639 \text{ லிட்டர்கள்.}$$

(சீர்மை கருதி கோளப் பகுதிக்கும் 20mm தடிப்புள்ள சுவரைப் பயன்படுத்தினால், தகைவு, விகலம், கனஅளவு மாற்றம் யாவும் பாதியாய்க் குறைந்துவிடும்).

கூம்பு வடிவக் கலன் (Conical Shell)



படம் 9.4 கூம்பு வடிவக் கலன்

கூம்பு வடிவக் கலன்களை ஆயும் போது, கவனிக்க வேண்டிய முக்கியக்கூறு, கூம்புப் பரப்பின் வளைவாரமே. கூம்பின் விரிதிசையில் வளைவாரம் = ∞ இதற்குச் செங்குத்தாய திசையில் வளைவாரம் இடத்துக்கிடம் மாறுகிறது. உயரம் h அடி விட்டம் b கொண்டதொரு கூம்பின் உச்சி O விலிருந்து (படம் 9.4) y ஆழத்தில் உள்ள ஒரு பரப்புத் துணுக்கு A இன் வளை வாரத்தைக் காண்போம்.

கூம்பின் உச்சிக் கோணம்,

$$\varphi = 2.\tan^{-1}\frac{b}{2h}$$

A இல் கூம்பின் பரப்பின் வளைவாரம், $AC = \dfrac{AB}{\cos.\frac{\varphi}{2}}$

ஆனால், $$AB = y\tan\frac{\varphi}{2} = y.\frac{b}{2h}$$

எனவே, $$r_1 = AC = \frac{y.b}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{yb}{2h}\sqrt{\frac{\frac{b^2}{4}+h^2}{h}}$$

$$\therefore \quad r_1 = \frac{yb}{4h^2}\sqrt{b^2+4h^2}$$

இவ் வளைவாரத்தின் மதிப்பினைப் பயன்படுத்தி,

$$\frac{\sigma_1}{r_1} = \frac{p_i}{t}$$

அல்லது, $$\sigma_1 = \frac{p_i\, r_1}{t} = \frac{p_i\, yb}{4h^2}\sqrt{b^2 + 4h^2}$$

எனக் கூம்பின் எப் பகுதியிலும் தகைவுக் கணக்கிட முடியும். விரிதிசைத் தகைவு σ_2 கூம்பிற்கு அடிப்பாகம் மூடப்படாமலிருப்பின் 0 ஆகவே, இருக்கும். அடிப்பகுதி மூடப்பட்டிருப்பின்,

கூம்பின் அடிப்பகுதிமீது செயல்படும் மொத்த விசை $P = \frac{\pi}{4}\, b^2 . p_i$

இது படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு y திசையில் செயல்படுகிறது.

கூம்புப் பரப்பின் அடிவிளிம்பில் விரிதிசைத் தகைவு, σ_2 எனில்,

இத் தகைவின் அச்சுத் திசைக்கூறு $= \sigma_2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$

இத் தகைவுகளின் அச்சுத்திசைப் பயனிலை $= - R = \sigma_2 \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \times b \times t$

சமனிலை கருதி, $P + R = 0$ எனலாம்.

எனவே , $$= \frac{\pi}{4}\, b^2 p_i = \sigma_2\; b\, t \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$$

அல்லது $$(\sigma_2)_{y=h} = \frac{p_i \quad b}{4t\, \cos\frac{\varphi}{2}} = p_i .b\sqrt{\frac{b^2 + 4h^2}{8\, ht}} \qquad (9.13)$$

இவ்வாறே துணுக்கு A, இல் விரிதிசைத் தகைவு σ_2 கணக்கிட,

$$\pi\, (AB)^2 .\, p_i = \sigma_2\, 2\pi A B\, t \cos\, \frac{\varphi}{2}$$

என்பதிலிருந்து $\left(AB = \frac{y}{h} \cdot \frac{b}{2}\right.$ எனக் கொண்டு)

$$\sigma_2 = \frac{p_i\, y\, b \quad \sqrt{b^2 + 4h^2}}{8\, h^2 t} \qquad (9.14)$$

என நிறுவலாம்.

இதுவரை நாம் நிறுவிய 9.3, 9.4, 9.10, 9.12, 9.14 ஆகிய கோவைகளைக் கலங்களுள் சீராய அழுத்தம் இருக்கும் சூழ்நிலைகளிலேயே பயன்படுத்த முடியும். கலனில் உள்அழுத்தம் மாறுபடும்போது, பரப்புத் துணுக்கின் சமனிலைச் சமன்பாடுகள் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு களாகவே (Differential Equations) கிட்டுமாதலின், அவற்றின் தீர்வு முறைகள் தனித்துறையாய் வளர்ந்துள்ளன. மேலும் தட்டையாய மூடிகளில் வளைதலும் தோற்றுவிக்கப்படுமாதலின் (அவை காணல் இங்கு எளிதன்று) அவற்றின் தகைவுகளின் ஆய்வும் இங்கு மேற் கொள்ளப் படவில்லை.

பயிற்சிகள் :

9.1 800mm விட்டமும், 2000mm நீளமும் கொண்ட உருளை வடிவக் கலம் ஒன்றன் ஒருமுனையில் அரைக்கோள வடிவ மூடியும் மறுமுனையில் தட்டையாய மூடியும் அமைக்க வேண்டும். சுவர் தடிப்பு 12 mm, அனுமதிக்கப்படும் உச்சத்தகைவு 100 N/mm^2 எனில், கலத்திலுள் அழுத்தம் அதிகபட்சம் எவ்வளவு இருக்கலாம்? இவ் அழுத்தம் செலுத்தப்படும்போது கலத்தின் மொத்தக் கொள்ளளவு, 1.5 லிட்டருக்குமேல் மிகக் கூடாதெனில், சுவர்த் தடிப்பு எவ்வளவு இருக்கவேண்டும்? E = 200 kN/mm^2 ν = 0.3 எனக் கொள்க.

9.2 எ.கா. 9.1 இல் விவரிக்கப்பட்டுள்ள கலத்தின் தட்டையாய மூடிக்குப் பதிலாய் 300mm உயரங்கொண்ட கூம்புவடிவ மூடி அமைக்கப்பட்டால், 0.6 N/mm^2 உள்அழுத்தத்தைக் கலம் தாங்க வேண்டும் எனில் சுவர்த் தடிப்புகள் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

9.3 1.4, m விட்டமும், உருளை வடிவப் பகுதியின் நீளம் 2.4 m உம் உருளைப் பகுதியின் இருமுனைகளிலும் அரைக்கோள மூடிகளும் கொண்டதொரு மூடிய கலத்தினுள் அழுத்தம் 1.5 N/mm^2 செலுத்தப்படுகிறது. கலம் நீள்வலிமை 120 N/mm^2, E=200 kN/mm^2, ν = 0.3 கொண்ட 16mm உருக்குத் தகடுகளால் கட்டப்பட்டுள்ளது எனில், கலத்தின் சுவர்களில் தகைவுகளையும், கலத்தின் கொள்ளளவு மாற்றத்தையும் கணக்கிடுக.

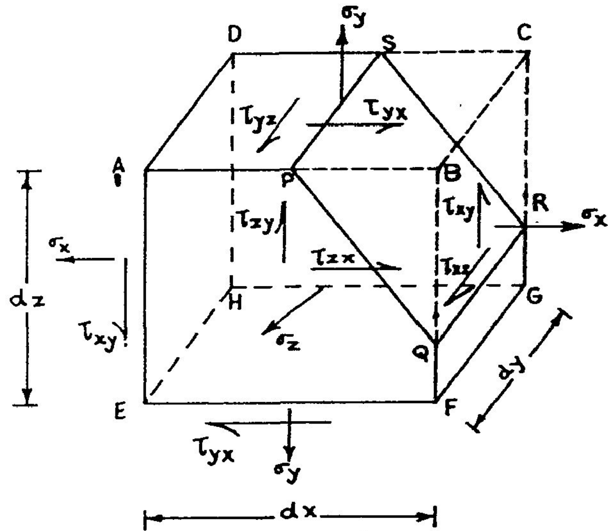
9.4 நாம் இதுவரை கண்ட பயிற்சிகளில் $\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{p}{t}$ (சமன்பாடு 9.2) என்ற சமன்பாட்டின் r_1, r_2 முதலிய வளைவாரங்களுக்கு, அழுத்தம் செலுத்தப்படுமுன், கலச்சுவரின் வளைவாரங்களையே கொள்கிறோம். ஆனால், அழுத்தம் செயல்படும் நிலையில் (அஃதாவது, r_1, r_2 முதலியன முன்பிருந்ததைவிட மிகுந்துள்ள நிலையில்) சமனிலைச் சமன்பாட்டை எழுதுகிறோம். இவ்வாறு கொள்வதில் தோன்றக்கூடிய பிழைகளின் அளவுகள் புறக்கணிக்கத்தக்கனவா? அல்லனவா என்பதனை எவ்வாறு முடிவு செய்வீர்?

9.5 1400mm விட்டமும், 6mm சுவர்த் தடிப்புமுள்ள உருக்குக் கோளம் ஒன்று கடல்நீரில் ஆழத்தில் இருத்தப்படுகிறது. சுவரின் உச்ச இறுக்க வலிமை 91 N/mm^2 எனில்,

கோளத்தை அதிக பட்சம் எவ்வளவு ஆழத்திற்குச் செலுத்த முடியும்? கடல் நீரின் ஒப்படர்த்தி 1.04 எனக் கொள்க. உருக்கின் நீள்மைக்கெழு 200 kN/mm^2, பாய்சான் விகிதம் 0.28 எனக்கொண்டு, கோளத்தின் கொள்ளளவு எவ்வளவு குறையும் என்று கணக்கிடுக.

9.2 தகைவு என்னும் பண்புரு (Stress Tensor)

இதுவரை தகைவு என்னும் அளவீட்டினை வலிமை ஆய்வுகளில் பல்வேறு வகையாய்ப் பயன்படுத்தி வந்துள்ளோம். என்றாலும், இதன் தன்மையைப்பற்றித் தெளிவாய் இதுவரை வரையறுக்கவில்லை. பொதுவாய் அளவீடுகளை, அளவங்கள் (Scalars), நெறியங்கள் (Vectors), பண்புருக்கள் (Tensors) எனப் பகுத்துரைப்பர். அவற்றுள் தகைவு எத்தன்மையது என நோக்கு முன் இம் மூன்று வகைகளுக்குமிடையேயுள்ள வேறுபாடுகளை விளக்குவோம்.



படம் 9.5 தகைவு நிலை வரையறுப்பு

படம் 9.5 இல், ஒருசிறிய துணுக்கு (இதன் நீளம் dx, அகலம் dy, உயரம் dz) ஒன்றன்மீது செயல் படும் பல்வேறு விசைகளும் தகைவு களும் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவை யாவற்றுக்கும் பொதுவாய அடிப் படைப் பண்பு அவற்றின் அளவு களே (magnitude); கன அளவு, அடர்த்தி போன்று அளவுகள் மட் டுமே கொண்டு முழுமையாய் வரை யறுக்கக் கூடிய அளவீடுகளை அளவங்கள் (scalars) என்றும், அளவு மட்டுமேயன்றித் திசையெனும் மற் றுமொரு பண்பும் (attribute) கொண்டு வரையறுக்கக் கூடிய விசைகள், இடப்பெயர்ச்சிகள் போன்ற அளவீ டுகளை நெறியங்கள் (vectors) என் றும் கற்றுள்ளோம். ஆனால் தகைவு என்னும் அளவீட்டினை இவ் இரண்டில் எவ் வகையாகவும் வரையறுக்க இயல்வதில்லை. எடுத்துக்காட்டாய் ஒருதகைவினை x திசையில் 20N/mm^2 என வரையறுக்க முற்பட்டால், இதன் வரையறை தெளிவாயில்லை. ஏனெனில், இது x தளத்தின்மீது செயல்படும் குத்துத் தகைவா y அல்லது z தளங்களின்மீது செயல்படும் நறுக்குத் தகைவா? அல்லது பொதுவாய தொரு தளத்தின் (படத்தில் தளம் PQRS) மீது குத்துத் திசை, தொடுதிசை இரண்டிலும் கூறுகள் கொண்ட கூட்டுத் தகைவா என்பது தெளிவாய்ப் புலப்படவில்லை. இதனால், தகைவினைச் சரியாய் வரையறுக்க, அதன் அளவு, திசை, அது செயல்படும் தளத்தின் திசை ஆகிய யாவும் கூறப்படவேண்டும் என்பதை

உணர்கிறோம். அஃதாவது 20 N/mm^2 என்னும் அளவின் தன்மையை வரையறுக்க மேலும் இரண்டு பண்புகள் (attributes) தேவைப்படுகின்றன. இத்தகைய அளவு பண்புரு (tensor) என அழைக்கப்படுகிறது. குறிப்பாய் இரண்டு பண்புகள் கொண்டு வரையறுக்கப்படும் இந்த அளவு, இருமைப் பண்புரு (Tensor of second order) என அழைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறே மும்மைப் பண்புரு முதலாயவற்றை விளக்கலாம். இவ் விளக்கத்தின்படி நெறியங்களை (vectors), ஒருமைப் பண்புரு (First order Tensor) என்றும், அளவங் களைப் (scalars), பண்பறு அளவங்கள் என்றும் கூறலாம். எனினும் இரண்டு, இரண்டிற்கு மேற்பட்ட பண்புகள்கொண்டு வரையறுக்கப்படும் அளவுகளையே பண்புரு என அழைத்தல் மரபு. படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள துணுக்கின் (நமக்கு வசதியாய்த் தோன்றும்) சில தளங்களின்மீது செயல்படும் தகைகவுகளைக் குறிப்பிடுவதனால் அத் துணுக்கின் தகைவு நிலையை முழுமையாய் உணர முடியாது. துணுக்கின் எத் தளத்தின் மீதும் செயல்படக்கூடிய தகைவுக்கூறுகளை அறிய முடியும் என்றாலே, நாம் துணுக்கின் தகைவு நிலையை முழுமையாய் வரையறுத்ததாய்க் கருத முடியும்.

துணுக்கில் ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தாய மூன்று அச்சுகளின் நேர்/எதிர்த்திசைகளில் குத்துக்கோடுகளைக் கொண்ட ஆறுதளங்களின்மீது செயல்படும் தகைவுகளை வரையறுத்தால், இவற்றிலிருந்து துணுக்கில் வேறு எந்தத் தளத்தின்மீதும் செயல்படும் தகைவுகளைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ள இயலும். இதுவே, ஒருதுணுக்கின் தகைவு நிலையை முழுமையாய் விவரிக்கும் முறையாகும். σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} என்னும் ஆறு தகைவுக் கூறுகளும் (stress components) தெரிந்தால் தகைவுநிலை முழுமையாய் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்பது பொருளாகும். நாம் ஒரு பொருளின் புள்ளியொன்றில் தகைவு $\sigma_y = 8$ N/mm^2 என்று குறிப்பிடும்போது $\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ என்றும் மறைமுகமாய் வரையறுக்கிறோம்.

தகைவு நிலையைச் சுட்டும் பண்புருவினைச் சுருக்கமாய்க்குறிப்பிட அணி (Matrix) முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. அஃதாவது, x, y, z எனும் மூன்று தளங்களில் ஒவ்வொன்றின் மீதும் மூன்று திசையிலும் தகைவுக் கூறுகள் செயல்படுகின்றன. அதனால் ஒவ்வொரு தளத்தின்மீதும் செயல்படும் தகைவுக் கூறுகளை ஒவ்வொரு நெறியமாய் உரைக்க முடியும். எடுத்துக்காட்டாய் x தளத்தின்மீது செயல்படும் தகைவுகள் x, y, z திசைகளில் முறையே σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} இவற்றைக் கொண்ட நெறியம், (Vector), $\{\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}\}$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. இவற்றாறே y தளத்தின் தகைவு நெறியம், $\{\tau_{yx} \quad \sigma_y \quad \tau_{yz}\}$ மற்றும் z தளத்தில் தகைவு நெறியம் $\{\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_z\}$ இவை அனைத்தையும் சேர்த்து ஓர் அணி (matrix) வடிவில்

$$(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

எனக் குறிப்பிடலாம். இவ்வாறு குறிப்பிடுதல் தகைவுநிலை ஆய்வுகளில் பெரும் எளிமையைத் தருகிறது. மூன்று தளங்களிலும் தகைவுக் கூறுகளைக் கொண்ட, தகைவு நிலைமைகளின்

ஆய்வை உயர்நிலை நூல்களில் காணலாம். இங்கு x, y தளங்களின்மட்டுமே தகைவுக் கூறுகள் கொண்ட நிலைகளை ஆராய்வோம்.

9.4 முதனிலைத் தகைவுகள் (Principal Stresses)

z தளத்தின்மீது தகைவுகள் ஏதும் இல்லையெனில், σ_z, τ_{zx}, τ_{zy} மூன்றும் 0.0. இதனால், இணைநறுக்குத் .தகைவுகளாய τ_{xz}, τ_{yz} இவையும் 0 ஆகிறது. அதனால், நாம் கருதுதற்குரிய தகைவுக் கூறுகள் σ_x, σ_y, τ_{xy} மூன்றுமே. இவை படம் 9.6 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. இதில் y தளத்தில் (ABCD என்னும் தளத்தில்) தகைவுகள் இல்லை. x தளத்தின் வீழல்கள் BC, AD; y தளத்தின் வீழல்கள் AB, DC இவற்றின்மீது செயல்படும் தகைவுக் கூறுகளைப் படம் 9.6 சுட்டுகிறது. இனி x தளத்திலிருந்து (கடிகை எதிர்திசையில்) சாய்ந்துள்ள தளம் (படத்தில் இதன் வீழல் EF) ஒன்றன்மீது செயல்படும் தகைவுகளை ஆய்வோம். இத் தளம் x தளத்திலிருந்து சாய்கோணம் θ கொண்டுள்ளது எனக் கொள்வோம். இத் தளத்தின்மீது செயல்படும் குத்துத் திசைத் தகைவு σ_n நறுக்குத் தகைவு τ_{nt} இரண்டனையும் சாய்கோணம் θ இன் சார்பலனாய் உரைப்பதன்மூலம், எந்தவொரு தளத்தின்மீது செயல்படும் தகைவுகளைக் கணக்கிடுதற்குரிய கோவைகள் நிறுவப்படும்.

σ_x, σ_y, τ_{xy} முதலிய தகைவுக் கூறுகள் தனித்தனியே செயல்படும்போது தளம் EF இன்மீது செயல்படும் தகைவுக் கூறுகளுக்குரிய கோவைகளை நாம் ஏற்கனவே நான்காம் அத்தியா யத்தில் நிறுவியுள்ளோம். அவற்றை இங்குப் பயன்படுத்திக் கொள்வோம்.

சாய்கோணம் θ கொண்ட தளத்தின்மீது செயல்படும் தகைவுகள்:

σ_x செயல்படுவதன் விளைவாய்,

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\tau_{nt} = -\sigma_x \frac{\sin 2\theta}{2} \qquad (4.7)$$

σ_y செயல்படுவதன் விளைவாய்,

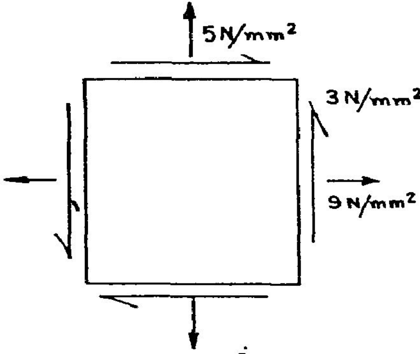
$$\sigma_n = \sigma_y \sin^2 \theta \qquad (4.9)$$

$$\tau_{nt} = \sigma_y \frac{\sin 2\theta}{2}$$

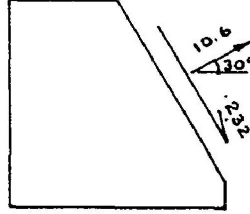
τ_{xy} செயல்படுவதன் விளைவாய்,

$$\sigma_n = \tau_{xy} \frac{\sin 2\theta}{2}$$

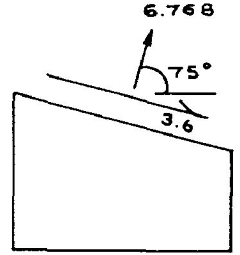
$$\tau_{nt} = \tau_{xy} \cos^2 \theta \qquad (4.8)$$



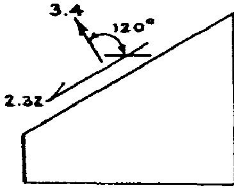
a. x,y தளங்களின் தகைவுக் கூறுகள்



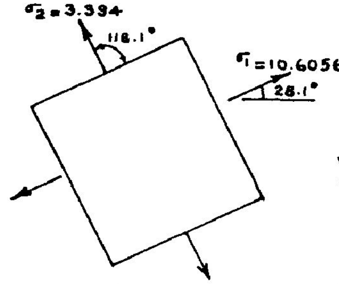
b. θ = 30° தளத்தின் தகைவுக் கூறுகள்



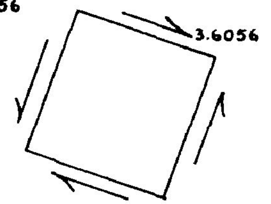
c. θ = 75° தளத்தின் தகைவுக் கூறுகள்



d. θ = 120° தளத்தின் தகைவுக் கூறுகள்



e. முதனிலைத் தகைவுகள்



f. உச்ச நறுக்குத் தகைவுகள்

படம் 9.6

τ_{yx} செயல்படுவதன் விளைவாய்,

$$\sigma_n = \frac{\tau_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\tau_{nt} = -\tau_{xy} \sin^2 \theta \qquad (4.10)$$

எனவே, σ_x, σ_y, τ_{xy} மூன்றும் செயல்படும்போது

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$= \sigma_x \frac{(1 + \cos 2\theta)}{2} + \sigma_y \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

ஃ
$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \qquad (9.15)$$

$$\tau_{nt} = \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta$$

அஃதாவது,
$$\tau_{nt} = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta \qquad (9.16)$$

எனவே,

சமன்பாடுகள் 9.15, 9.16 இவற்றைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு தளத்தின்மீதும் தகைவுக் கூறுகளைக் கணக்கிட முடியும். எடுத்துக்காட்டொன்று காண்போம்.

எ.கா. 9.2

தகைவுறுத்தப்பட்ட திண்மம் ஒன்றன் துணுக்கு ஒன்றன் நிலையை வரையறுக்கும் தகைவுக் கூறுகள் $\sigma_x = 9\ N/mm^2$, $\sigma_y = 5\ N/mm^2$, $\tau_{xy} = 3\ N/mm^2$ எனில், x தளத்துக்கு 15°, 30°, 45°, 75°, 120°, 130° அளவில் சாய்ந்துள்ள தளங்களின்மீது செயல்படும் தகைவுக் கூறுகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

சாய்கோணம் 15° கொண்ட தளத்தின்மீது தகைவுக் கூறுகள்:

$$(\sigma_n)_{\theta = 15°} = \frac{9+5}{2} + \frac{9-5}{2} \cos 30° + 3 \sin 30°$$

$$= 7 + 2 \cos 30° + 3 \sin 30° = 10.232\ N/mm^2$$

$$(\tau_{nt})_{\theta = 15°} = 3 \cos 30° - \frac{9-5}{2} \sin 30° = 1.5981\ N/mm^2$$

30° சாய்கோணம் கொண்ட தளத்தின்மீது தகைவுக் கூறுகள்

$$(\sigma_n)_{\theta = 30°} = 7 + 2 \cos 60° + 3 \sin 60° = 10.6\ N/mm^2$$

$$(\tau_{nt})_{\theta = 30°} = 3 \cos 60° - 2 \sin 60° = -0.232 \text{ N/mm}^2$$

இவ்வாறே, பல்வேறு தளங்களின்மீதும் கணக்கிடப்பட்ட தகைவுக் கூறுகள் கீழே பட்டியலாய்த் தரப்படுகின்றன.

தளஞ்சுட்டு கோணம் θ	15°	30°	45°	75°	120°	130°
σ_n N/mm^2	10.232	10.6	10	6.768	3.4	3.7
τ_{nt}N/mm^2	4.83	–.232	–2.0	–3.6	+.232	+1.45

$\theta = 30°$, $\theta = 75°$, $\theta = 120°$ சாய்கோணங்கள் கொண்ட தளங்களின்மீது செயல்படும் தகைவுக் கூறுகள் படம் 9.6 இல் சுட்டப்பட்டுள்ளன.

இவ்வாறு, எந்தவொரு தளத்தின்மீதும் தகைவுக் கூறுகளைக் கணக்கிட்டறிதற்குரிய, கோவைகள் கிட்டியுள்ளன. இனி, σ_n, τ_{nt} இவற்றின் உச்ச மதிப்புகளையும் அவை செயல்படும் தளங்களையும் காண்போம்.

நாம் கருதும் துணுக்கினைப் பொறுத்தமட்டில், ஒருசாய்தளத்தின் மீது செயல்படும் தகைவுக் கூறுகள், σ_n, τ_{nt} அத்தளத்தின் சாய்கோணம் θ வின் சார்பலன்களாயிருக்கக் காண்கிறோம். அதனால், இவற்றின் மதிப்புகள் உச்சமாயிருக்க வேண்டின், முறையே வகைக்கெழுக்கள்

$$\frac{d\sigma_n}{d\theta}, \quad \frac{d\tau_{nt}}{d\theta}$$

இவற்றின் மதிப்பு 0 ஆக இருக்க வேண்டும் எனக் காணலாம்.

1. குத்துத் தகைகவின் உச்ச மதிப்புக் காண.

$$\frac{d\sigma_n}{d\theta} = 0$$ அஃதாவது,

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}(-2 \sin 2\theta) + \tau_{xy} \cdot 2 \cos 2\theta = 0$$

அல்லது $$2\left(\tau_{xy} \cdot \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta\right) = 0$$

அல்லது $$2\,\tau_{nt} = 0$$

$$\tau_{nt} = 0 \qquad (9.17)$$

சமன்பாடு 9.17 இன் பொருள், ஒருதளத்தின் குத்துத் தகைவின் அளவு உச்ச நிலையிலோ, மிகத் தாழ்ந்த நிலையிலோ இருக்கவேண்டின் அத்தளத்தின்மீது நறுக்குத் தகைவு ஏதும் செயல்படாதிருக்கும் என்பதே. இவ்வாறு நறுக்குத் தகைவு செயல்படாத தளங்கள், முதனிலைத் தளங்கள் (Principal planes) என அழைக்கப்படுகின்றன. இனி இத் தளங்களை வரையறுப்போம். முதனிலைத் தளத்தின் சுட்டுக்கோணம் φ எனில்,

$$\tau_{xy} \cos 2\varphi - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi = 0$$

எனவே,
$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi = \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

அல்லது
$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (9.18)$$

σ_x , σ_y , τ_{xy} இவற்றின் மதிப்புகளை அறிவோம். சமன்பாடு 9.18 ஐப் பயன்படுத்தி முதனிலைத் தளத்தின் சாய்கோணம் φ ஐக் கணக்கிடும்போது φ க்கு இரண்டு மதிப்புகள் கிட்டும். அஃதாவது, துணுக்கில் காணக்கூடிய இரண்டு முதனிலைத் தளங்களின் சாய்கோணங்களே இவை.

இவற்றுள் ஒன்றில் குத்துத் தகைவு உச்ச மதிப்பினையும், மற்றதில் மிகத் தாழ்ந்த மதிப்பினையும் பெற்றிருக்கும். அடுத்து, இவற்றின் அளவுகளைக் கணக்கிடுவோம்.

சமன்பாடு 9.18 லிருந்து,

$$\sin 2\varphi = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 - \tau_{xy}^2}}$$

என்னும் உறவுகளைப் பெறலாம். இவற்றைச் சமன்பாடு 9.15 இல் பயன்படுத்த,

$$(\sigma_n)_{max/min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} - \frac{\tau_{xy} \cdot \tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$(\sigma_n)_{max/min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (9.19)$$

முதனிலைத் தளங்களின்மீது செயல்படும் இத் தகைவுகள் முதனிலைத் தகைவுகள் (Principal stresses) என அழைக்கப்படுகின்றன. இவற்றுள் உச்ச மதிப்புக் கொண்டதனை மேல்முதனிலைத் தகைவு (Major Principal stress) என்றும், தாழ்மதிப்புக் கொண்டதனைக் கீழ் முதனிலைத் தகைவு (Minor principal stress) என்றும் பெயரிட்டு, அவற்றை முறையே σ_1 , σ_2 எனும் குறியீடுகளால் சுட்டுகிறோம். இங்குப் பெரிது என்பது அளவால் மட்டுமன்றி, தன்மையையும் சேர்த்துக் கொண்டே சுட்டப்பட வேண்டும். (எ.கா. இருமுதனிலைத் தகைவுகளின் அளவுகள் +3, –8 எனில், $\sigma_1 = +3$, $\sigma_2 = -8$ என்றே கொள்ள வேண்டும்).

எனவே,

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (9.20)$$

இனிச் சமன்பாடு 9.18 சுட்டும் தளங்கள் இரண்டனில் எது மேல்முதனிலைத் தளம் எது கீழ்முதனிலைத் தளம் என்பவைவற்றைக் காண்போம். செயல்படும் தளத்தில் $\frac{d\sigma_n}{d\theta} = 0$ என்

பதனுடன் $\frac{d^2 \sigma_n}{d\theta^2} < 0$ என்னும் சமனிலியும் ஒத்துவர வேண்டும் என அறிவோம்.

இங்கு, $$\frac{d^2 \sigma_n}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\sigma_n}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\tau_{nt}$$

அஃதாவது $$-2\left\{2\tau_{xy}\sin 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta\right\} < 0$$

அல்லது $$\left(\tau_{xy}\sin 2\theta + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta\right) > 0 \qquad (9.21)$$

எனவே,

சமன்பாடு 9.18 தரும் தீர்வுகளில் φ இன் எந்த மதிப்புச் சமனிலி 9.21 க்கு இசைவாயிருக்கிறதோ, அதுவே மேல்முதனிலைத் தளத்தின் சுட்டுக் கோணம் φ_1 எனவும், மற்றதுகீழ் முதனிலைத் தளத்தின் சுட்டுக் கோணம் φ_2 எனவும் அறியலாம்.

எ.கா. 9.3

எ.கா. 9.3 இல் விவரிக்கப்பட்டுள்ள துணுக்கின் முதனிலைத் தளங்களையும், முதனிலைத் தகைவுகளையும் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

முதனிலைத் தளங்களின் சுட்டுக்கோணம் காணற்குரிய சமன்பாடு

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 3}{9 - 5} = 1.5$$

எனவே $2\varphi = 56.21°, \quad 236.21°$

அல்லது $\varphi = 28.105°, \quad 118.105°$

இவற்றைச் சமனில் 9.21 இல் பொருத்திப் பார்ப்போம்.

$2\varphi = 56.21°$ எனில்,

$$3\sin 56.21° + 4\cos 56.21° = 4.718 > 0$$

எனவே,

$$\varphi_1 = 28.105°$$

$2\varphi = 236.21°$ எனில்,

$$3 \sin 236.21^\circ + 4 \cos 236.21^\circ = -4.718 < 0$$

எனவே,

$$\varphi_2 = 118.105^\circ$$

முதனிலைத் தகைவுகளைக் கணக்கிடச் சமன்பாடு 9.15 இல் φ_1, φ_2 இவற்றைப் பயன்படுத்தியோ, சமன்பாடுகள் 9.20 ஐப் பயன்படுத்தியோ முதனிலைத் தகைவுகளைக் கணக்கிடலாம்.

$$\sigma_1 = \frac{9+5}{2} + \sqrt{\left(\frac{9-5}{2}\right)^2 + 3^2} = 10.6056 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{9+5}{2} - \sqrt{\left(\frac{9-5}{2}\right)^2 + 3^2} = 3.394 \text{ N/mm}^2$$

முதனிலைத் தளங்களும், முதனிலைத் தகைவுகளும் படம் 9.6 (e) இல் காட்டப் பட்டுள்ளன.

உச்ச நறுக்குத் தகைவு :

நறுக்குத் தகைவு, τ_{nt} உச்ச அல்லது கீழ்அளவில் இருக்க வேண்டும் எனில்,

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\theta} = 0 \quad \text{ஆதல் வேண்டும்.}$$

அஃதாவது

$$\frac{d}{d\theta}\left\{-\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right\} = 0$$

$$\therefore \quad -(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau_{xy}\sin 2\theta = 0$$

$$\therefore \quad \tan 2\theta = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \qquad (9.22)$$

முதனிலைத் தளங்களின் சுட்டுக் கோணங்களைக் குறிப்பிட φ என்னும் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தினோம்.

நறுக்குத் தகைவு உச்சமாயிருக்கும் தளத்தின் சுட்டுக் கோணத்தை ψ எனக் குறிப்பிட்டு,

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \tan 2\psi$$ என்னும் உறவினையும் பயன்படுத்த,

$$\tan 2\varphi = -\frac{1}{\tan 2\psi}$$

அல்லது $$\tan 2\varphi \,.\, \tan 2\psi = -1 \qquad (9.23)$$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம்.

இச் சமன்பாட்டின் பொருள், 2φ , 2ψ இவற்றுகிடையேயுள்ள வேறுபாடு 90° அஃதாவது முதன்னிலைத் தளத்திலிருந்து 45° சாய்கோணத்தில் உச்ச நறுக்குத் தகைவுத் தளங்கள் உள்ளன என்பதனையறியலாம். இதிலிருந்து,

$$\cos 2\psi = \cos(2\varphi + 90) = -\sin 2\varphi$$

$$\sin 2\psi = \sin(2\varphi + 90^\circ) = \cos 2\varphi \qquad (9.24)$$

என்னும் உறவுகளைப் பெறலாம். இவற்றைச் சமன்பாடு 9.16 இல் பயன்படுத்த,

$$(\sigma_{nt})_{\theta=\psi} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\varphi + \tau_{xy}(-\sin 2\varphi)$$

$$= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} - \frac{\tau_{xy}\,.\,\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\tau_{max/min} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (9.25)$$

கடந்த எடுத்துக்காட்டில் தரப்பட்டுள்ள துணுக்கில்,

$$\text{உச்ச நறுக்குத் தகைவு} = \pm \sqrt{\left(\frac{9-5}{2}\right)^2 + 3^2}$$

$$\pm \quad 3.6056 \text{ N/mm}^2$$

τ_{max} = 3.605 N/mm^2, τ_{min} = –3.6056 N/mm^2 ஆகிய நறுக்குத் தகைவுகள் செயல்படும் தளங்கள் படம் 9.6 (f) இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

எ.கா. 9.4

நீள்வலிமை 30 N/mm^2 இறுக்க வலிமை 25 N/mm^2 நறுக்குவலிமை 15 N/mm^2 கொண்ட திண்மம் ஒன்றில் செயல்படும் தகைவுக் கூறுகள், σ_x , σ_y , τ_{xy} படம் 9.7 இல் காட்டப் பட்டுள்ளன. இத் தகைவுகளைத் திண்மம் தாங்குமா என ஆய்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டவை: $\sigma_x = 25$ N/mm^2 , $\sigma_y = -7$ N/mm^2 ,

$\tau_{xy} = +12$ N/mm^2

திண்மம் பாதுகாப்பாயிருக்க வேண்டும் எனில்,

உச்ச தகைவு $\sigma_1 < 30$ N/mm^2

மிகக் குறைந்த தகைவு $\sigma_2 > -25$ N/mm^2

உச்ச நறுக்குத் தகைவு $\tau_{max} < 15$ N/m^2

மேற்கண்ட நிபந்தனைகளைச் சரிபார்ப்போம்.

$$\sigma_1 = \frac{25 + (-7)}{2} + \sqrt{\left(\frac{25-(-7)}{2}\right)^2 + 12^2}$$

$$= 9 + 20 = 29 \text{ N/mm}^2 < 30 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = 9 - 20 = -11 \text{ N/mm}^2 > -25 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{max} = +20 \text{ N/mm}^2 > 15 \text{ N/mm}^2$$

எனவே,

திண்மம் நீள்தகைவு, இறுக்கத் தகைவு இவற்றின் உச்ச அளவுகளைத் தாங்க இயலும் எனினும், இதன்மீது தோற்றுவிக்கப்படும் உச்ச நறுக்குத் தகைவு (20 N/mm^2) திண்மத்தின் நறுக்கு வலிமை (15 N/mm^2) விட மிகுதியாய் இருப்பதால் திண்மம், நறுக்கத்திற் சிதைவுறும்.

எ.கா. 9.5

இரண்டு முக்கோணப் பட்டகங்கள் ஒட்டுப் பிசினால் செவ்வக வடிவில் இணைக்கப் பட்டுள்ள பட்டகம், படம் 9.8 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$AB = DC = 100mm,$$

$$AD = BC = 70mm.$$

ஒட்டுப் பிசினின் நீள்வலிமை = நறுக்க வலிமை = 20 N/mm^2 எனில், பிணைப்புத் தாங்குமா என்பதனைக் காண்க.

மூலைவிட்டம் DB என்பது ஒட்டப்படும் தளத்தின் வீழல். செவ்வகப் பட்டகத்தின்மீது செயல்படும் தகைவுகள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

தீர்வு:

தளம் BD யின் சுட்டுக் கோணம் $\theta = \tan^{-1} \frac{100}{72}$

$$= 54.246^\circ$$

இத்தளத்தின்மீது குத்துத் தகைவு

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

இதில்,

$$\sigma_x = 18\ N/mm^2, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -14\ N/mm^2$$

எனவே,

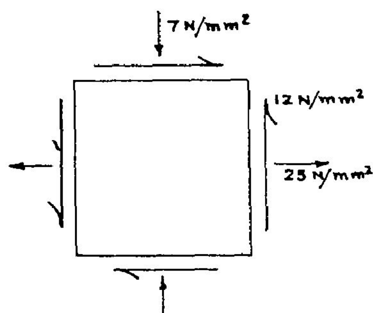
$$(\sigma_n)_{\theta = 54.246^\circ} = \frac{18}{2} + \frac{18}{2} \cos 108,492^\circ - 14 \sin 108.492^\circ$$

$$= -7.132\ N/mm^2$$

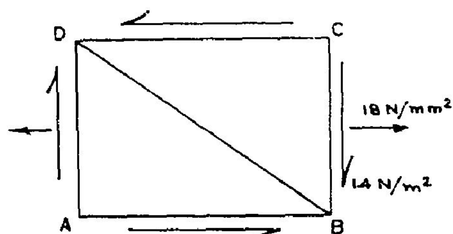
$$(\tau_{nt})_{\theta = 54.246^\circ} = -9 \sin 108.492^\circ - 14 \cos 108.492^\circ$$

$$= -4.095\ N/mm^2$$

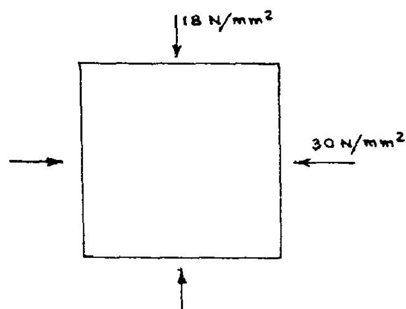
இத் தகைவுகள் பிசினின் வலிமையை விஞ்சாமலிருப்பதால் இணைப்புத் தாங்கும்.



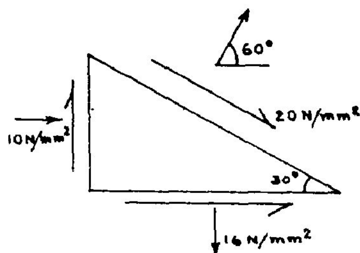
படம் 9.7



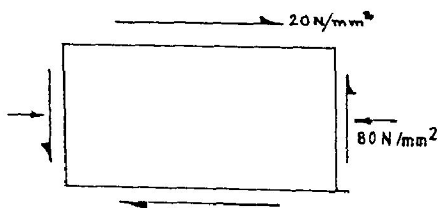
படம் 9.8



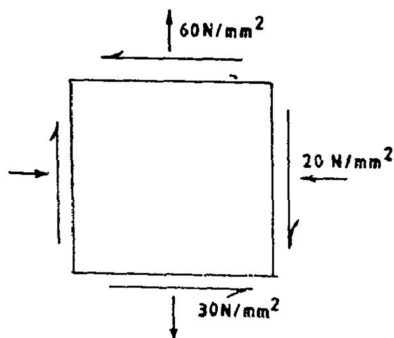
படம் 9.9



படம் 9.10



படம் 9.11



படம் 9.12

பயிற்சிகள்:

9.6 படம் 9.9 இல் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு தகைவுக் கூறுகள் ஒரு திண்மத்தின் துணுக்கு ஒன்றில் செயல்படுகின்றன. திண்மத்தின் நீள்வலிமை 6 N/mm^2. நறுக்கு வலிமை 10 N/mm^2 எனில், திண்மத்தில் செயல்படும் தகைவுகளேயன்றி, அதன் x, y தளங்களில் செலுத்தப்படக் கூடிய உச்ச நறுக்குத் தகைவினைக் காண்க.

9.7 படம் 9.9 இல் காட்டப்பட்டுள்ள திண்மத்தின் x, y தளங்களில் செயல்படும் நறுக்குத் தகைவு, $\tau_{xy} = -\ 3$ N/mm எனில், முதனிலைத் தகைவுகளையும், முதனிலைத் தளங்களை யும் கண்டுபிடிக்க.

9.8 படங்கள் 9.10, 9.11, 9.12 இவற்றில் காணப்படும் தகைவு நிலைகளை ஆராய்ந்து, இத் துணுக்குகளில் முதனிலைத் தகைவுகள், முதனிலைத் தளங்கள், உச்ச நறுக்குத் தகைவுகள் இவற்றைக் கண்டு பிடிக்க.*

* குறிப்பு: $(\tau_{nt})_{\theta = 60^\circ}$ = .. என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து τ_{xy} ஐ முதலில் நிறுவுக.

9.5 மோர் வட்டமுறையில் முதனிலைத் தகைவுகள் காணல் (Determination of Principal Stresses Using Mohr's Circle)

முதனிலை உறழ்திருப்புமைகளைக் காணற்கு, மோர்வட்டமுறையை ஏற்கனவே ஏழாம் அத்தியாயத்தில் பயன்படுத்தியுள்ளோம். முதனிலைத் தகைவுகள் கணக்கிடற்குரிய கோவைகளும், முதனிலை உறழ்திருப்புமைகள் கணக்கிடற்குரிய கோவைகளும் ஒரே வடிவில் இருத்தலை நோக்கும்போது, மோர்வட்டமுறையை இங்கும் பயன்படுத்தி, எளிதில் தீர்வு காண முடியும் என்பதை உணரலாம்.

ஒருதுணுக்கின்மீது x, y தளங்களில் செயல்படும் தகைவுக் கூறுகளிலிருந்து, பிற தளங்களின்மீது செயல்படும் தகைவுக் கூறுகளுக்குரிய கோவைகளைச் சமன்பாடுகள் 9.15, 9.16 இரண்டும் தருகின்றன. இவற்றுள், கிடைத்திசையில் x அச்சு இருக்குமாறு நாம் ஆயத் திட்டம்மேற்கொண்டமை நம் வசதிபற்றியே. ஆனால், x,y திசைகளை (ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தாயிருந்தால்மட்டும் போதும்) எவ்விதமாய் எடுத்துக்கொண்டாலும் இச் சமன்பாடுகள் பொருந்த வேண்டும். அதனால், முதனிலைத் தளங்களின் குத்துக்கோடு களையே ஆயத்திசைகளாய்க்கொண்டு புதிய கோவைகளை உருவாக்குவோம். σ_1 இன் திசையை x அச்சாகவும் σ_2 இன் திசையை y அச்சாகவும், x அச்சிலிருந்து அளக்கப்படும் கோணங்களை θ ஆகவும் குறிப்பிட,

$$\sigma_x = \sigma_1 \ ; \ \sigma_y = \sigma_2$$ எனக் கொண்டு

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \qquad (9.25)$$

$$\tau_{nt} = -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \sin 2\theta \qquad (9.26)$$

எனவும் சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறாம்.

எந்தவொரு தளத்தின்மீதும் செயல்படும் தகைவுக் கூறுகள் σ_n , τ_{nt} ((σ, τ) எனச் சுருக்கமாய்க் குறிப்பிடுவோம்). இவ்விரு தகைவுக் கூறுகளும் இவற்றுக்கிடையேயுள்ள உறவுகளும் தளத்திற்குத் தளம் மாறுபடுகின்றன. அதனால், ஒவ்வொரு தளத்திலும் இவ்விரண்டு தகைவுக் கூறுகளின் உறவையும் நிறுவ, ஓர் வரைபடத்தில் கிடை அச்சினை σ அச்சு எனவும், நேர்க் குத்து அச்சினை τ அச்சு எனவும் கொண்டால் ஒரு குறிப்பிட்ட தளத்தின்மீது செயல்படும் தகைவுக் கூறுகளையே (σ , τ) என ஆயத் தொலைகளாய்க் கொண்டு குறிக்கப்படும் புள்ளி, தளத்தின் தகைவுக் கூறுகளை வரைபடத்தில் வரையறுக்கிறது.

$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \ 0\right)$ என்னும் புள்ளியை ஆயத்திட்டத்தின் மையமாகக் கருதுவோம், $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma_m$ எனக் கொண்டு (σ_n , τ_{nt}) என்னும் புள்ளியின் நியமப்பாதையை வரையறுப்போம்.

(σ_n , τ_{nt}) என்னும் புள்ளியின் ஆரைத் தூரத்தினை $\left\{(\sigma_n - \sigma_m)^2 + \tau_{nt}^2\right\}^{½}$ என்னும் கோவை வரையறுக்கிறது. அஃதாவது,

$$r = \left\{ \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta\right)^2 \right\}^{½}$$

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad \left\{\cos^2 2\theta + \text{sign}^2 2\theta\right\}^{½}$$

$$= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

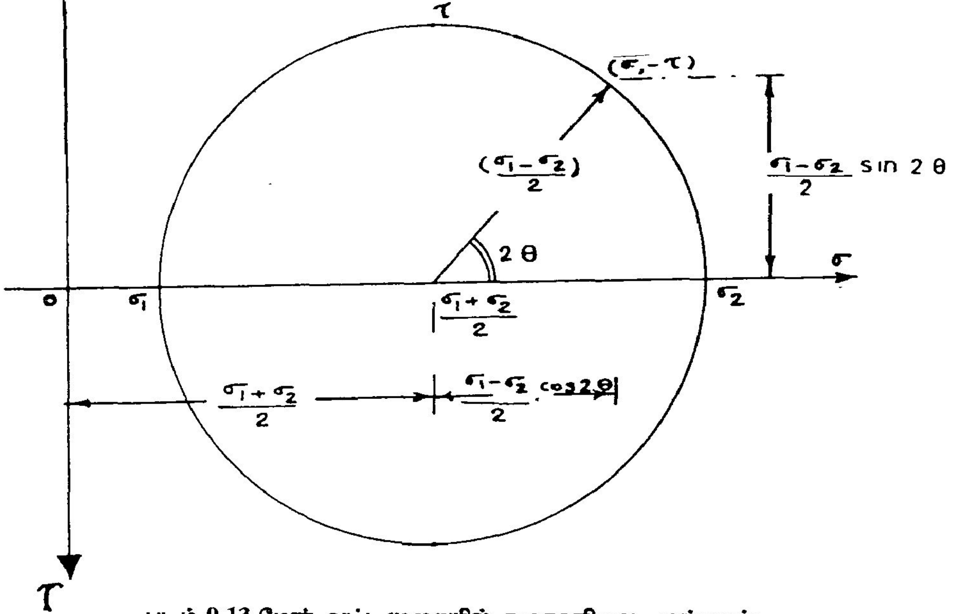
இதிலிருந்து σ_n, τ_{nt} என்ற ஆயங்களைக் கொண்ட புள்ளியின் நியமப்பாதை (σ_m, 0)ஐ மையமாகவும், $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் என்று உரணலாம். இது, மோர்வட்டம் எனப் படுகிறது.

$\sigma - \tau$ ஆயத் திட்டத்தில், $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)$ என்னும் புள்ளியை மையமாகவும் $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$ ஐ ஆரமாயும்கொண்டு, வட்டம் ஒன்று வரைவோம். (படம் 9.13). வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து ஓர் ஆரம் வரைந்து, σ அச்சு, ஆரம் இரண்ம் எதிர்கொள்ளும் கோணத்தையளந்து, அதனை 2θ என வைத்துக் கொள்வோம். ஆரம் பரிதியைத் தொடும் புள்ளி (P) யின் ஆயங்கள்,

$$(\sigma, \tau) = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\theta\ ,\ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\theta\right) \qquad (9.27)$$

எனக் காண்கிறோம்.

$$\therefore\ = (\sigma, \tau) = \sigma_n, - \tau_{nt} \qquad (9.28)$$



படம் 9.13 மோர் வட்டமுறையில் தகைவுநிலை ஆய்வுகள்

அஃதாவது, σ அச்சிலிருந்து கடிகைத் திசையில் சுழல்கோணம் 2 θ கொண்டுள்ள ஆரம், வட்டத்தின் பரிதியைத் தொடும் புள்ளியின் ஆயங்கள் மேல்முதனிலைத் தளத்திலிருந்து கடிகை எதிர்திசையில் θ அளவு சாய்ந்துள் தளத்தின்மீது செயல்படும் குத்து நறுக்குத் தகைவுகளை முறையே சுட்டும். இவ் வடிவியல் பண்பினைப் பயன்படுத்தித் தகைவு ஆய்வுகளை எளிதில் மேற்கொள்ளலாம். இதனை ஓர் எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம்.

எ.கா. **9.6**

படம் 9.7 இல் காட்டப்பட்டுள்ள துணுக்கில்

i. சுட்டுக்கோணம் θ = 30 கொண்ட தளத்தின்மீது தகைவுகள்.

ii. முதனிலைத் தளங்கள், முதனிலைத் தகைவுகள், உச்சநறுக்குத் தகைவுகள்.

இவற்றை மோர்வட்டமுறையில் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை σ – τ வரையில் பொருத்துவோம்.

x தளத்தின்மீது தகைவுகள், $\sigma_x = 25\ N/mm^2$, $\tau_{xy} = -12\ N/mm^2$

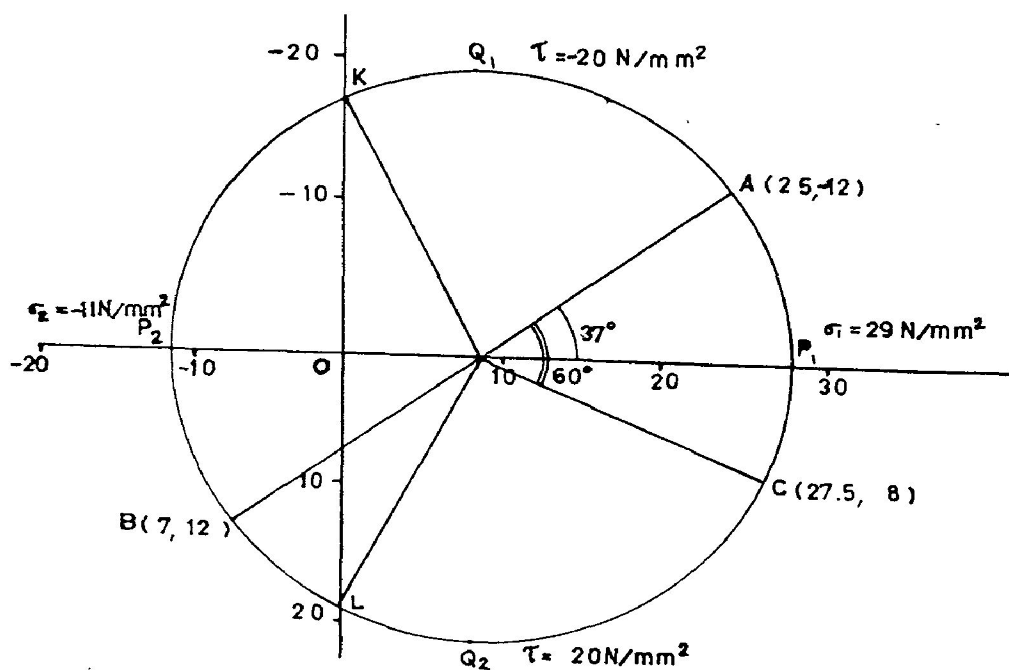
σ – τ வரையில் இதனைச் சுட்டும் புள்ளியின் ஆயங்கள் = (25, – 12)

y - தளத்தின் மீது தகைவுகள் :

$$\sigma_y = -7\ N/mm^2; \qquad \tau_{xy} = -12\ N/mm^2$$

σ – τ வரையில் இதனைச் சுட்டும் புள்ளியின் ஆயங்கள் (– 7, 12)

இவ் இருபுள்ளிகளும் முறையே A, B எனப் படம் 9.14 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.



படம் 9.14

துணுக்கின் ஒவ்வொரு தளத்தையும், மோர்வட்டத்தின் பரிதிப் புள்ளியொன்று குறிப்பிடுகிறதெனில், வட்ட மையம், இப்புள்ளி இரண்டினையும் இணைக்கும் ஆரக்கோடு, σ அச்சுடன் எதிர்கொள்ளும் கோணம், அதன் தளம் சுட்டுகோணம் θ வைப் போல் இருமடங்காகவும், θ வுக்கு எதிர் திசையிலும் இருக்கும் என்பதையே சமன்பாடு 9.27 உணர்த்துகிறது. அச்சு எதுவாயினும், இவ் அச்சிலிருந்து x தளத்தின் சாய்கோணம் α எனில், y தளத்தின் சாய்கோணம் $(\alpha + 90°)$ இதனால், x தளத்தைக் குறிக்கும் ஆரம், கிடை அச்சிலிருந்து சுழல்கோணம் -2α கொண்டிருப்பின், y தளத்தினைக் குறிக்கும் ஆரம், கிடை அச்சிலிருந்து சுழல்கோணம் $-(2\alpha + 180°)$ கொண்டிருக்கும். சுருங்கக் கூறின், இவ்விரு ஆரங்களுக் கிடையேயுள்ள கோணம் = 180°. அஃதாவது, புள்ளிகள் A, B இரண்டும், மோர்வட்டத்தின் விட்டமொன்றின் எதிர்முனைப் புள்ளிகளே. அதனால், ABயை விட்டமாய்க்கொண்டு வரையப் படும் வட்டமே, மோர் வட்டமாய் அமையும்: (இதனை வரைவோம்). இவ் வட்டம் σஅச்சினை வெட்டும் இருபுள்ளிகள் P_1, P_2 இவற்றில் $\sigma = +29$, $\sigma = -11$. இவை முறையே σ_1, σ_2என அறிகி றோம். வட்டத்தின் மையம் O எனில், ஆரம் OP_1 முதனிலைத் தளத்தைக் குறிக்கும்; ஆரம் OA, x தளத்தைக் குறிக்கிறது . $\angle AOP_1 = -37°$. அதனால், x தளத்தை அடிப்படையாய்க் கொண் டால் மேல்முதனிலைத் தளத்தின் சாய்கோணம் $\varphi_1 = +18.5°$. இவ்வாறே, $\angle AOP_2 = +143°$. அதனால், கீழ் முதனிலைத் தளத்தின் சுட்டுக் கோணம் $\varphi_2 = -71.5°$.

இனி x தளத்திலிருந்து சாய்கோணம் $\theta = 30°$ கொண்ட தளத்தின் மீது தகைவுகளைக் காண, ஆரம் OA விலிருந்து$-60°$ $(-2 \times 30°)$ கோணத்தில் OC என்ற ஆரம் வரைய, C யின் (σ,τ) ஆயங்கள் இத் தளத்தின்மீது செயல்படும் தகைவுக் கூறுகளைத் தரும். அவை,

$$\sigma_n = +27.5\ N/mm^2; \qquad \tau_{nt} = 8 N/mm^2$$

எ.கா. 9.7

பயிற்சி 9.6 க்கு மோர்வட்ட முறையில் தீர்வு காண்க.

தீர்வு :

தீர்விற்குமுன், மோர்வட்டத்தின் வடிவமைப்புக் குறித்த இரண்டு உண்மைகளை நிறுவுவோம்.

1. மோர் வட்டத்தின் மையம்:

x தளத்திலிருந்து கோணங்கள் θ, $(\theta + 90)$ சாய்ந்துள்ள u, v எனும் இரண்டு தளங் களில் குத்துத் தகைவுகள் σ_u , σ_vஎனக் கொள்வோம்.

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos\,(2\theta + 180°) + \tau_{xy}\sin\,(2\theta + 180°)$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,(-\cos\,2\theta) + \tau_{xy}\,(-\sin\,2\theta)$$

$$\therefore \quad \boxed{\sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y}$$

அஃதாவது, ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தாய எந்த இருதளங்களின் குத்துத் தகைவுக்கூட்டு ஒருமாறிலியே.

அதன் அளவு $(\sigma_x + \sigma_y)$

எனவே,

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

அஃதாவது, மோர்வட்டத்தின் மையத்தை வரையறுக்க இவ் உறவு உதவுகிறது.

2. மோர்வட்டத்தின் ஆரம்:

உச்ச நறுக்குத் தகைவின் அளவே, மோர்வட்டத்தின் ஆரம் என்பதனைப் படம் 9.13 உணர்த்துகிறது. இதன் நீளம் $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$ இப் பண்புகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கள்:

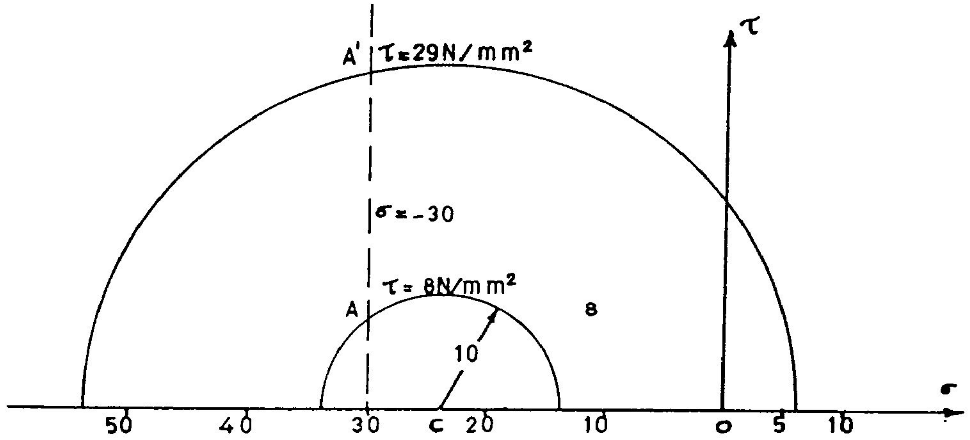
$\sigma_x = -30\ \text{N/mm}^2$; $\qquad \sigma_y = -18\ \text{N/mm}^2$

மோர்வட்டத்தில் x தளத்தைக் குறிக்கும் ஆரம், OA தெரியாது; ஆனால் வட்ட மையம் O தெரியும் $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-30 - 18}{2} = -24\right)$

$\sigma = -30$ என்னும் நேர்க்குத்துக்கோட்டின் மீதுதான். A இருக்க வேண்டும். அவ்வாறே $\sigma = -18$ எனும் நேர்க்குத்துக்கோட்டின்மீது y தளத்தைக் குறிக்கும் ஆரம் OB யின் முனையான B இருக்க வேண்டும். இவ்விரு கோடுகளையும் வரைந்துகொள்வோம் (படம் 9.15).

பொருளின் நறுக்குவலிமை = 10 N/mm². இதுவே மோர்வட்டத்தின் ஆரமாயிருக்க வேண்டும். அதனால், $r = 10\ \text{N/mm}^2$ கொண்ட மோர்வட்டம் வரைய, இவ் வட்டம் $\sigma = -30$ எனும் கோட்டை வெட்டும் புள்ளி (இருபுள்ளிகளில் எதனை வேண்டுமானாலும்

எடுத்துக் கொள்ளலாம்). A ஐ மையம் O உடன் சேர்க்க ஆரம் OA கிட்டும். இங்கு $\tau = 8\ N/mm^2$. இதுவே நாம் x தளத்தின்மீது அனுமதிக்கக் கூடிய நறுக்குத் தகைவு τ_{xy}.



படம் 9.15

நீள்வலிமை = 6 N/mm^2. σ_1 இன் மதிப்பு இதனைவிட மிகுதியாயிருக்கக் கூடாது; $\sigma_1 = +\ 6\ N/mm^2$ என்னும் ஆயதூரத்தில் புள்ளி P ஐக் குறித்து, OP ஐ ஆரமாய்க்கொண்டு மோர்வட்டம் வரையலாம். இவ் வட்டம் $\sigma = -\ 18$ என்னும் கோட்டை வெட்டும் புள்ளி A இல் $\tau_{xy} = 29\ N/mm^2$.

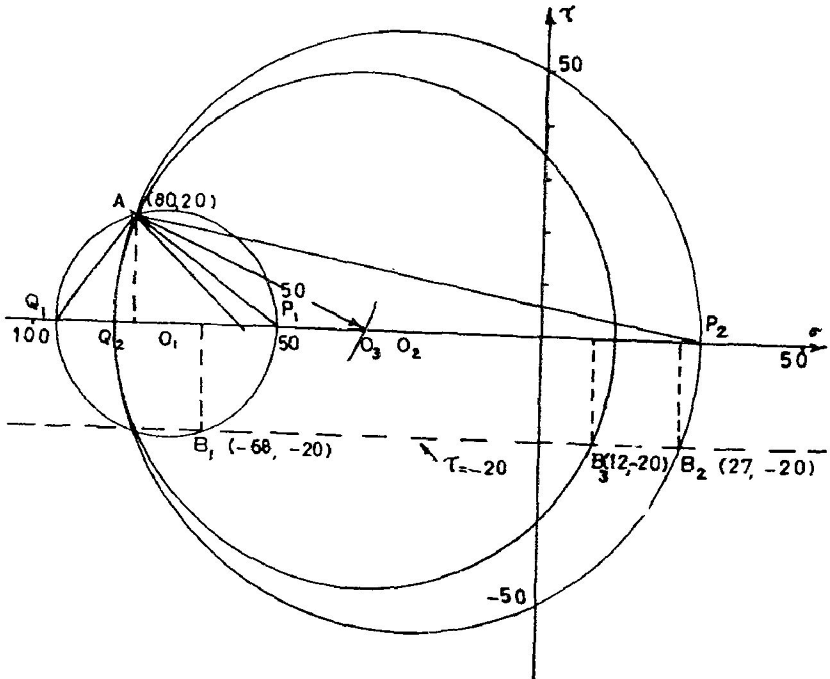
இவ் இரண்டு தீர்வுகளில் முந்தைய தீர்வு, அஃதாவது $\tau_{xy} = 8\ N/mm^2$ என்பதே சரியாய தீர்வு ஆகும். பொருளின் நீள்வலிமையளவிற்குத் தகைவு செலுத்தப்படு முன்னரே, நறுக்குத் தகைவு , நறுக்கு வலிமையை விஞ்சிவிடுகிறது.

எ.கா. **9.8**

உச்ச நீள்வலிமை = 30 N/mm^2, உச்ச நறுக்குவலிமை = 50 N/mm^2 உச்ச இறுக்க வலிமை 95N/mm^2 உம் கொண்ட திண்மமொன்றன்மீது செயல்படும் தகைவுக் கூறுகள் படம் 9.11 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. இத் திண்மத்தில் y தளத்தில் செலுத்தப்படக் கூடிய உச்ச நீள்தகைவு, உச்ச இறுக்கத் தகைவு இவற்றை மோர்வட்ட முறையிற் கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு :

x தளத்தின்மீது இருதகைவுக் கூறுகளும் (σ_x = − 80 N/mm^2, τ_{xy} = + 20 N/mm^2) தெரியும். அதனால் σ − τ வரைபடத்தில் இத் தளத்தைக் குறிக்கும் A(− 80, 20) என்னும் புள்ளியைக் குறித்துக்கொள்வோம். y தளத்தின்மீது செயல்படும் நறுக்குத் தகைவு τ_{yx} = − τ_{xy} = − 20.0 அதனால் இத் தளத்தைக் குறிக்கும் புள்ளி B, τ = − 20 என்ற கிடைக் கோட்டின் மீதுதான் இருக்க வேண்டும். இக்கோட்டினை வரைந்துகொள்வோம் (படம் 9.16).



படம் 9.16

i. உச்ச இறுக்க வலிமை = 95 N/mm^2; அஃதாவது σ_2 = − 95 N/mm^2. அதனால், மோர்வட்டத்தின் பரிதியில் மேலும் ஒரு புள்ளி கிடைத்துவிட்டது. (− 95, 0) என்னும் இப் புள்ளியை Q_1 எனக் குறிப்பிடுவோம். σ_1 ஐக் குறிக்கும் புள்ளி, P_1 எனில் Q_1 P_1 என்பது மோர்வட்டத்தின் விட்டங்களில் ஒன்று. A என்பது பரிதியின்மீது ஒரு புள்ளியாதலால் Q_1A, AP_1 இருக்கோடுகளும் ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தானவை. அதனால், புள்ளி A இல் Q_1A வுக்குச் செங்குத்தாய் வரையப்படும் கோடு τ = 0 என்னும் கோட்டை,

அஃதாவது σ அச்சினை வெட்டும் புள்ளியே, P_1 ஆகும். எனவே, Q_1P_1 ஐ விட்டமாய்க் கொண்டு மோர்வட்டம் வரையப்படுகிறது. இவ் வட்டத்தின் மையம் O_1 ; y தளத்தைக் குறிக்கும் புள்ளி B எனில், A O_1 B மோர்வட்டத்தின் ஒருவிட்டமாகும். எனவே, AO_1 ஐ நீட்டி அது மோர்வட்டத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியை B_1 எனக் குறிப்போம். இதன் (σ, τ) ஆயங்கள் (– 68, – 20). அதனால் y தளத்தின்மீது செலுத்தக்கூடிய உச்ச இறுக்கத் தகைவு, 68 N/mm^2.

ii. உச்ச நீள்வலிமை = 30 N/mm^2; அஃதாவது $\sigma_1 = +\ 30\ N/mm^2$ எனவே, (30, 0) என்னும் புள்ளி P_2 ஐக் குறித்துக்கொண்டு P_2A வும் அதற்குச் செங்குத்தாக, AQ_2 வும் வரைந்து, Q_2P_2 ஐ விட்டமாகக் கொண்டு மோர்வட்டம் வரையலாம். இதன் மையம் O_2. AO_2 ஐ நீட்ட, இது வட்டத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளி B_2 (27, –20) y தளத்தைக் குறிக்கிறது. அதனால், y தளத்தின்மீது செலுத்தப்படக் கூடிய உச்ச நீள் தகைவு 27 N/mm^2.

பொருளின் இறுக்க, நீள்வலிமைகள்மட்டும் வரையறுக்கப்பட்டிருந்தால் நமக்கு ஏற்கனவே கிடைத்த வரம்புகளே தீர்வு ஆகும். ஆனால், திண்மத்துள் நறுக்குத் தகைவும் இதன் நறுக்கு வலிமைக்கு மிகாமல் இருக்க வேண்டும் என்பதால், இதனையும் சோதிப்போம்.

நறுக்கு வலிமை = 50 N/mm^2

அதனால், உச்ச நறுக்குத் தகைவு = 50 N/mm^2; இதுவே மோர் வட்டத்திகன் ஆரமாகும். மோர்வட்டத்தின் மையம் σ அச்சின்மீதுதான் இருக்க வேண்டும். இம் மையத்தை O_3 எனக் கொண்டால் O_3A என்பது வட்டத்தின் ஆரங்களுள் ஒன்று. அதனால், A ஐ மையமாகக் கொண்டு ஆரம் = 50 N/mm^2 கொண்ட வில் ஒன்று வரைய, இவ்வில் σ அச்சினை வெட்டும் புள்ளியே மோர்வட்டத்தின் மையம். இவ் வட்டத்தை வரைந்து AO_3 இன் நீட்சி வட்டத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளி B_3 (12, – 20) எனக் காண்கிறோம். அதனால் y தளத்தின்மீது செலுத்தக்கூடிய உச்ச நீள்தகைவு 12 N/mm^2 எனக் காண்கிறோம்.

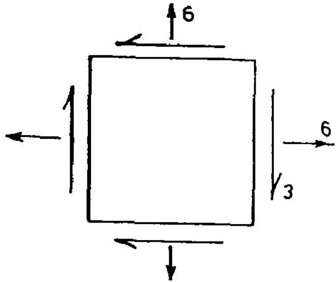
விடை: உச்ச நீள்தகைவு , = 12 N/mm^2
உச்ச இறுக்கத் தகைவு , = 68 N/mm^2

பயிற்சிகள்:

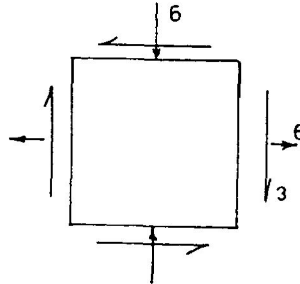
9.9 எ.கா. 9.5க்கு மோர் வட்ட முறையில் தீர்வு காண்க.

9.10 படம் 9.10 இல் காட்டிய துணுக்கின் தகைவு நிலையை மோர்வட்ட முறையால் ஆய்க.

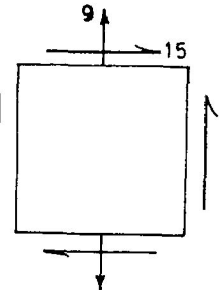
9.11 படங்கள் 9.17, 9.18, 9.19 ஆகியவற்றில் காட்டிய துணுக்குகளின் முதனிலைத் தகைவுகளையும் முதனிலைத் தளங்களையும் மோர்வட்டமுறையில் கண்டுபிடிக்க.



படம் 9.17



படம் 9.18



படம் 9.19

9.6 கோள நிலைத் தகைவுகள் (Spherical Stresses)

நாம் பொதுவாய தகைவு நிலைகள் பலவற்றை ஆராய்ந்தோம். இவற்றுள் சிறப்பான நிலையொன்று, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma;\ \tau_{xy} = 0$ என்பதாகும். இந் நிலையை ஆயும் போது, பொதுவாயதொரு தளத்தின் மீது,

$$\text{குத்துத் தகைவு} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta = \sigma$$

என்றும்,

$$\text{நறுக்குத் தகைவு} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta = 0$$

என்றும் காண்கிறோம். அஃதாவது, எல்லாத் தளங்களிலும் குத்துத் தகைவின் அளவு ஒன்றேயாகவும், நறுக்குத் தகைவு 0 ஆகவும் இருக்கக் காண்கிறோம். இத்தகைய நிலையைக் கோளநிலை (Spherical state) என அழைக்கிறோம். பாய்ம அழுத்தம் ஒரு புள்ளியில் எல்லாத் திசைகளிலும் ஒரே அளவில் இருக்கும் (பாஸ்கல் விதி). அதனால், இதனைப் பாய்ம அழுத்த நிலை (Hydrostatic state) என்றும் அழைப்பர்.

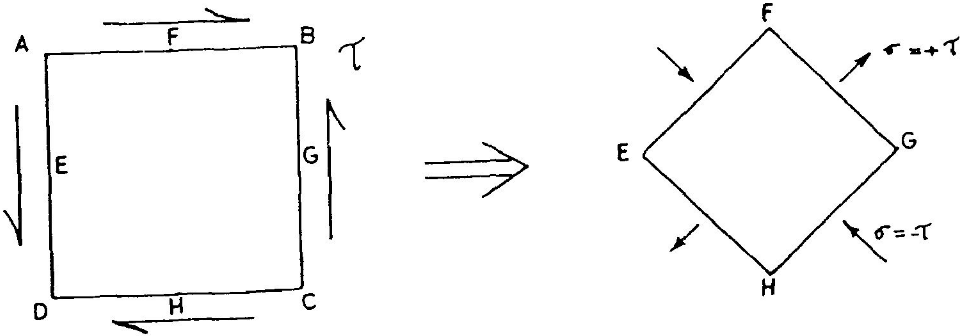
9.7 தனி நறுக்க நிலை (State of Pure Shear)

எந்தவொரு தகைவு நிலையிலும், நறுக்குத் தகைவேயில்லாத இரண்டு தளங்கள் (முதனிலைத் தளங்கள்) இருக்க வேண்டும் என்பதனைக் கண்டோம். ஆனால், குத்துத் தகைவுகளே இல்லாத தளங்கள் இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியமில்லை. படம் 9.14 இல் ஆரங்கள் OK, OL சுட்டும் தளங்களில் குத்துத் தகைவுகள் இல்லை (இத் தளங்களின் சுட்டுக் கோணங்களை அளந்து அறிக). ஆனால், படம் 9.15 இன் முதல் தீர்வில் அத்தகைய தளங்கள்

இல்லை (படம் 9.16 இன் முதன் தீர்விலும் அவ்வாறே). சில சமயம் (τ அச்சினைத் தொடுகோடாய்க் கொண்ட மோர்வட்டங்கள்), ஒரு தளத்தின் மீது எவ்விதத் தகைவும் செலுத்தப்படாமலும் இருக்கலாம். ஒன்றனுக்கொன்று செங்குத்தாய இரண்டு தளங்களின் மேல் நறுக்குத் தகைவுகள் மட்டுமே செலுத்தப்பட்டால் அந்நிலையை $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \tau$ என்னும் தகைவுக் கூறுகள் சுட்டுகின்றன. இத்தகைய நிலையையே தனி நறுக்க நிலை (State of Pure Shear) என அழைக்கிறோம். இந் நிலை கொண்ட துணுக்கொன்றன் பொதுவாய தளத் தகைவுகள்

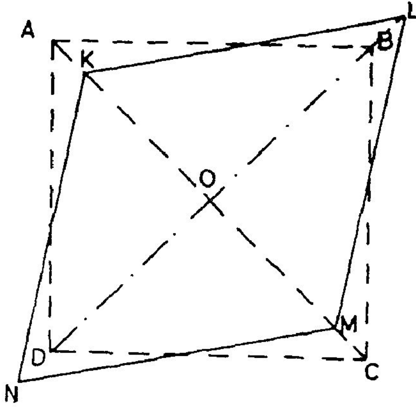
$$\sigma_n = \tau \sin 2\theta$$
$$\tau_{nt} = \tau \cos 2\theta \qquad (9.28)$$

σ_n, τ_{nt} இரண்டுக்குமே உச்சமதிப்புகள் $\pm\tau$ என்பதனையே காண்கிறோம். σ_n இன் உச்ச அளவுகள் $2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ என்னும் இரு தளங்களிலேயே காணப்படுமென்பதையும் எளிதிற் காணலாம். இத்தகைய நிலையைப் படம் 9.20 காட்டுகிறது. அஃதாவது, ABCD என்னும் (சதுர) துணுக்கின் பக்கங்களின்மீது நறுக்குத் தகைவுகளைச் செலுத்தல், இத் துணுக்கின் மூலைவிட்டங்களில் (AC, BD) அளவில் சமமான எதிர்த்தன்மையாய தகைவுகளைச் செலுத்தற்கு ஈடாகும் எனக் காண்கிறோம்.



படம் 9.20 தனி நறுக்க நிலை

படம் 9.21 காட்டுவதுபோல் மூலைவிட்டத் திசைகளின் நீட்சி, குறுக்கங்களுக்கும், துணுக்கின் நறுக்க விகலத்திற்கும், வடிவியல் உறவு நிலவுதலைக் காண்கிறோம். இவ்வுறவினைக் காட்டும் கோவையை நிறுவுவோம். படம் 9.21 ஐ நோக்குக.



படம் 9.21 தனி நறுக்க நிலையில் விகலங்கள்

x தளங்கள் AD, BC , இவற்றின் நறுக்குத் தகைவுகள் $= \quad + \tau$

y தளங்கள் AB, DC , இவற்றின் நறுக்குத் தகைவுகள் $= \quad - \tau$

திண்மத்தின் நறுக்கக் கெழு (Rigidity Modulus), G எனில், நறுக்க விகலம் $\gamma_{xy} = \frac{\tau}{G}$. இவ் விகலம் தோற்றுவிக்கும் உருமாற்றத்தைப் புதிய வடிவம் KLMN காட்டுகிறது. துணுக்கின் மையம் O எனில்,

$$\gamma_{xy} = \angle ADC - \angle KNM \text{ எனக் கண்டோம்.}$$

$$\angle KNO = \angle \frac{KNM}{2} = \frac{\angle ADC - \gamma_{xy}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

திண்மத்தின் நீள்மைக்கெழுவை E எனக் குறிப்பிடுவோம்.

மூலைவிட்டம் DB யின் திசையில் குத்துத் தகைவு $= \quad + \tau$

மூலைவிட்டம் AC யின் திசையில் குத்துத் தகைவு $= \quad - \tau$

எனவே, DB யின் திசையில் விகலம் $\varepsilon_{DB} = \frac{\tau}{E} - \nu\left(\frac{-\tau}{E}\right) = (1 + \nu)\,\frac{\tau}{E}$ (9.29)

அவ்வாறே AC யின் திசையில் விகலம் $\varepsilon_{AC} = \dfrac{-\tau}{E} - \nu\left(\dfrac{\tau}{E}\right) = -(1+\nu)\dfrac{\tau}{E}$

$$\therefore \quad \varepsilon_{AC} = -\varepsilon_{DB} = \varepsilon$$ என்போம்.

இனி,

$$NO = DO(1+\varepsilon)$$

$$KO = AO(1-\varepsilon) = DO(1-\varepsilon)$$

$\angle$ NOK ஒரு செங்கோண முக்கோணமாதலின்.

$$\tan\angle KNO = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_{xy}}{2}\right) = \frac{KO}{NO} = \frac{DO}{DO}\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

அஃதாவது.

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma_{xy}}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\,.\,\tan\frac{r_{xy}}{2}} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \tag{9.30}$$

γ_{xy} இன் அளவு மிகச் சிறிதேயாதலின் $\dfrac{\tan\gamma_{xy}}{2} = \dfrac{\gamma_{xy}}{2}$ எனலாம்.

எனவே, சமன்பாடு 9.29 இன் மாற்று வடிவம்.

$$\frac{1 - \frac{\gamma_{xy}}{2}}{1 + \frac{\gamma_{xy}}{2}} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \tag{9.31}$$

சமன்பாடு **9.31** லிருந்து $\dfrac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon$ என உணரலாம்.

அஃதாவது,

$$\frac{1}{2}\,\frac{\tau}{G} = \frac{(1+\nu)\,\tau}{E}$$

$$\mathbf{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \tag{9.32}$$

நீள்மைக் குணகம், நறுக்கக் குணகம், பாய்சான் விகிதம் இவற்றுக் கிடையேயுள்ள அடிப்படை உறவு சமன்பாடு 9.31ஆகத் தரப்பட்டுள்ளது. இச் சமன்பாட்டில் தொடர்புறுத்தப்படும் மூன்று மாறிலிகளில், ஏதேனும் இரண்டனை சோதனைகளால் கண்டுபிடிக்க முடிந்தால், மூன்றாவதனை இவ் உறவினைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்.

9.8 பருமைத் தகைவு, பருமை விகலம், பருமைக் குணகம்: (Spherical Stress, Volumetric Strain and Bulk Modulus)

ஒரு திண்மத் துணுக்கினுள் x,y,z என்னும் மூன்று திசைகளிலும் ஒரேயளவான குத்துத் தகைவு இருப்பின், இந் நிலையைக் கோளநிலைத் தகைவு, அல்லது பருமைத் தகைவு என அழைக்கலாம். இத் தகைய தகைவு நிலையின் திண்மத்தில் பருமன் மட்டுமே மாறுமேயன்றி வடிவு திரியாது. அதனால், கனஅளவு மாற்றத்திற்கும் தொடக்கக் கன அளவிற்குமுள்ள விகிதத்தைப் பருமை விகலம் (Volumetric Strain) என வழங்குவர். இவற்றிலிருந்து,

பருமைக் குணகம் (Bulk Modulus), $K = \dfrac{\text{பருமைத் தகைவு}}{\text{பருமை விகலம்}}$

என்று மற்றுமொரு மீள்மைக் குணகம் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இதனை மற்ற மீள்மை மாறிலிகளுடன் (Elastic constants) உறவுபடுத்துவோம். நீள, அகல, உயர (எல்லா) திசைகளிலும் தகைவு = σ

எனவே,

ஒவ்வொரு திசையிலும் விகலம் $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} - \nu\dfrac{\sigma}{E} - \nu\dfrac{\sigma}{E}$

$$= \frac{\sigma}{E}(1 - 2)\nu$$

திண்மத் துணுக்கொன்றன் நீள, அகல, உயரங்கள் dx, dy, dz எனில், தகைவுக்குப் பின் நீள, அகல, உயரங்கள் முறையே $(1+\varepsilon)dx$, $(1+\varepsilon)dy$, $(1+\varepsilon)dz$;

தகைவுக்கு முன்னர் கனஅளவு, $dV = dx.dy.dz$

கனஅளவு மாற்றம் $dx\ (1+\varepsilon)\ dy\ (1+\varepsilon)\ dz\ (1+\varepsilon) - dV$

$$= dV\ (1+\varepsilon)^3 - dV$$

$$= dV\ (1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3) - dV$$

ε^2 , ε^3 ஆகியன மிகச் சிறயனவாகலின் புறக்கணிக்கலாம்.

எனவே, கனஅளவு மாற்றம் $= dV(1 + 3\varepsilon) - dV = 3\varepsilon\, dV$

எனவே, பருமை விகலம் $\varepsilon_v = 3\varepsilon \dfrac{dV}{dV} = 3\varepsilon$

பருமைக் குணகம், $K = \dfrac{\sigma}{3\varepsilon} = \dfrac{\sigma}{3\dfrac{\sigma}{E}(1-2\nu)}$

அல்லது ,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (9.33)$$

பயிற்சிகள்:

9.12 ஒரு பொருளின் மீது ஆய்வகத்தில் நிகழ்த்திய சோதனைகளில், $E = 200$ GPa, $\nu = 0.278$, $G = 77$ GPa, $K = 149.5$ GPa எனக் காணப்பட்டன. இவற்றுள் E, G இன் அளவீடு இரண்டும் துல்லியமாய்த் தரப்பட்டுள்ளன வெனில், ν, K இவற்றின் மதிப்புகளில் உள்ள பிழைகளைக் கணக்கிடுக.

விடைகள் : ν இன் மதிப்பில் பிழை 6.93 %
K இன் மதிப்பில் பிழை 9.72 %

9.9 விட்டங்களில் தகைவு நிலை (State of Stress in Beams)

பொதுவாய்த் திண்மம் ஒன்றனுள் கூட்டுத் தகைவு நிலைகளை ஆயும் முறைகளைக் கண்டோம். இத்தகைய நிலை, அஃதாவது ஒன்றனுக்கு மேற்பட்ட தகைவுக் கூறுகள் செயல்படும் நிலை, விட்டங்களில் மூன்றுவழிகளில் தோற்றுவிக்கப்படுகிறது.

1. வளைதிருப்புமைகள் தோற்றுவிக்கும் தகைவுகள் விட்டத்தின் நீளத்திசையில் (இதனை x திசை எனக் கொள்வோம்.) செயல்படுகின்றன. அதனால், இதனை σ_x எனக் குறிப்பிடுவோம். மற்றும் நறுக்கு விசை விளைவிக்கும் தகைவுகளும், x தளத்தின்மீது நேர்க்குத்துத்திசை (y திசை) யில் செயல்படுகின்றன. அதனால், தகைவு நிலையை

$$\sigma_x = \frac{M}{I}\,y\,; \qquad \tau_{xy} = \frac{Q\,a\,\bar{y}}{Ib}$$

எனும் இருதகைவுக் கூறுகள் வரையறுக்கின்றன. இந் நிலையை ஆய்ந்து முதனிலைத் தகைவுகளைக் காணல் பெரும்பாலும் தேவைப்படுவதில்லை. ஏனெனில் σ_x உச்சமாயிருக்கும் பகுதிகளில் $\tau_{xy} = 0$ ஆகவும் , τ_{xy} உச்சமாயிருக்கும் தகைவில் அச்சில் $\sigma_x = 0$ ஆகவும் இருக்கும். மேலும் வளைதிருப்புமை உச்சமாயுள்ள வெட்டுமுகங்களில்

Q = 0 என்பதும் நோக்கத் தக்கது. ஆனால், I வடிவ உருட்டு உருக்குகளால் ஆய விட்டங்களில் அகடு (Web), விளிம்பு (Flange) இரண்டும் சந்திக்கும் இடத்திலும், அவற்றின் அண்மையிலுள்ள அகடுபகுதியிலும், இக் கூட்டுத் தகைவின் விளைவு மிகுதியாயிருத்தல் கூடும். அதனால், இங்கு σ_x, τ_{xy} இரண்டனையும் கணக்கிட்டு அவற்றிலிருந்து σ_1, σ_2, τ_{max} ஆகிய தகைவுக் கூறுகளையும் கணக்கிட்டு, அவை அனுமதிக் கப்பட்ட வரம்புக்குள் உள்ளனவா? என்பதைக் காணவேண்டும்.

2. அடுத்து விட்டத்தின் மீது செலுத்தப்படும் வளைதிருப்புமை நேர்க்குத்து விசைகளால் மட்டுமன்றி, x திசைக்குச் செங்குத்தாய கிடைத் திசையிலும் (z திசை) செயல்படும் போது, வளைதிருப்புமை M_z உடன் M_y யும் செயல்படும். இதனால், தோற்றுவிக்கப் படும் குத்துத் தகைவுகளை

$$\sigma_x = \left(\frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}\right)$$

எனக் கணக்கிடலாம். நறுக்குத் தகைவுகள் x தளத்தின் மீது இரு திசைகளிலும் செயல்படும். இவை τ_{xy} , τ_{xz} என்பன. இந் நிலையை, அஃதாவது முக்கணத் தகைவு நிலையை (Three dimensional state of stress) ஆயும் முறைகளை உயர்நிலை நூல்களிற் காணலாம்.

3. மேலே சுட்டப்பட்ட இரு வகை நிலைகளுடன், விட்டத்தின் அச்சுத் திசையிலும் விசைகள் (P_x) செலுத்தப்படும், அச்சுத் தகைவு $\frac{P_x}{A}$ ஐயும் σ_x உடன் கூட்டிக் கொள்ள வேண்டும்.

இவ்வாறாக, ஒரு விட்டத்தின் மீது செயல்படும் விசைகள் (வளை திருப்புமை, நறுக்குவிசை, அச்சுவிசை), ஒரு துணுக்கில் தோற்றுவிக்கும் தகைவுக்கூறுகளைக் கண்டறிந்து, துணுக்கின் தகைவு நிலையை ஆய்தல் வடிவமைப்பில் ஒரு முக்கியக் கட்டமாகும்.

எ.கா. 9.9

படம் 9.22 இல் காட்டப்பட்ட I வடிவ விட்டத்தின் வெட்டுமுகம் ஒன்றில் செயல்படும் வளைதிருப்புமை 160 KNm, நறுக்குவிசை 280 kN. விட்டப் பொருளின் நீள்வலிமை 150 N/mm^2, நறுக்குவலிமை 90 N/mm^2 எனில் தகைவு நிலையைச் சோதிக்க.

தீர்வு :

முதலில் வெட்டுமுகப் பண்புகள் கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

$$(I_{xx} = 2.1401 \times 10^8 \ mm^4)$$

உச்ச வளை தகைவு $= \frac{M}{I} y_{max}$

$$= \frac{160 \times 1000 \times 1000 \times 200}{2.1401 \times 10^8}$$

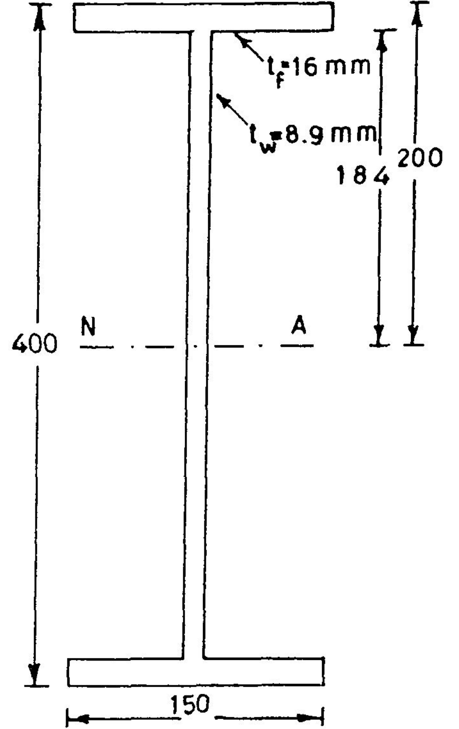
$$= 149.53 \text{ N/mm}^2$$

உச்ச நறுக்குத் தகைவு, (தகைவில் அச்சில்)

$$\tau_{max} = \frac{Q.a\bar{y}}{Ib} =$$

$$\frac{280 \times 1000 \; 2400 \times 192 + 184 \times 8.9 \times 92}{2.1401 \times 10^8 \times .89}$$

$$= 89.888 \text{ N/mm}^2$$



படம் 9.22

σx, τ_{xy} தனித்தனியே தோன்றும் தளங்களில் அவை காட்டு வரம்புக்குள் உள்ளன என்பதனைக் காண்கிறோம். இரு தகைவுக் கூறுகளும் தோன்றக் கூடிய தளங்களில் முக்கியமானவை, அகடு, விளிம்பு இவை சந்திக்கும் பகுதிகள். இங்கு y = 184 mm எனும் இடத்திலுள்ள தளத்தின் தகைவு நிலையை நோக்குவோம். இங்கு

$$\sigma_x = \frac{160 \times 10^6 \times 184}{2.1401 \times 10^8}$$

$$= 137.56 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xy} = \frac{280 \times 1000 \times 2400 \times 192}{2.1401 \times 10^8 \times 8.9}$$

$$= 67.74 \text{ N/mm}^2$$

உச்சக் குத்துத் தகைவு $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$$= 68.78 + 96.537$$

$$= 165.32 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{உச்ச நறுக்குத் தகைவு } \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 96.537 \text{ N/mm}^2$$

இரண்டு தகைவுக் கூறுகளுமே வலிமை வரம்புகளை மீறுவதால் இத் தகைவு நிலை பாதுகாப்பற்றது.

பயிற்சிகள்:

9.13 மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் y = 180 mm, y = 175 mm, y = 170 mm, y = 165 mm, y = 160 mm, y = 155 mm, y = 150 mm ஆகிய தளங்களின் தகைவு நிலைகளை ஆராய்க. தகைவில் அச்சிலிருந்து எவ்வளவு உயரம் (ஆழம்) வரை தகைவுக் கூறுகள் இரண்டும் வலிமை வரம்புக்குள் இருக்கின்றன ?

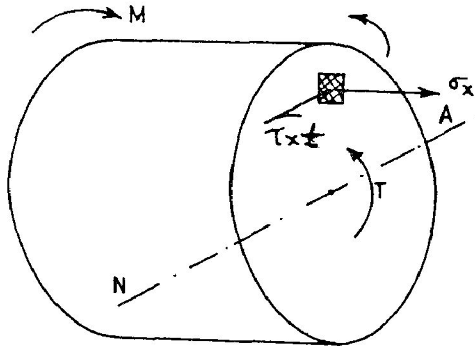
9.14 மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், வெட்டுமுகம் முழுவதிலுமே தகைவுகள் வலிமை வரம்பிற்குள் இருக்க வேண்டுமெனில்,

(i) கொடுக்கப்பட்ட நறுக்கு விசையுடன் வளைதிருப்புமை எவ்வளவு செலுத்தப்படலாம்?

(ii) கொடுத்துள்ள வளைதிருப்புமையுடன் நறுக்குவிசை எவ்வளவு செலுத்தலாம்?

9.10 நறுக்கமில்லா வளைதலும் முறுக்கமும் (Pure Bending and Torsion)

கூட்டுத் தகைவு நிலைகளில் முக்கியமாய ஒன்று வளைதிருப்புமை முறுக்குத் திருப்புமை இரண்டும் செலுத்தப்படும் நிலை. ஏனெனில், இத்தகைய நிலையில் வளைதிருப்புமை தோற்றுவிக்கும் தகைவு, σ_x முறுக்குத் திருப்புமை தோற்றுவிக்கும் தகைவு, τ_{xt} எனக் குறிக்கப்படுகிறது t என்பது y, z அல்லது இரண்டுக்குமிடைப்பட்ட திசைகளில் ஒன்றாயிருக்கும். இரண்டுமே வெட்டுமுகத்தின் விளிம்பெல்லைகளில் தான் உச்சமாயிருக்கும். எளிமை கருதி, வட்ட வடிவ வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டத்தில் நறுக்குவிசை இல்லாத பகுதியை மட்டும் கருதுவோம்.



படம் 9.23

வளைதிருப்புமை, M, முறுக்கத் திருப்புமை, T செலுத்தப்படும் விட்டப் பகுதி ஒன்று படம் 9.23 இல் காட்டப் பட்டுள்ளது. வெட்டுமுகத்தின் ஆரம் r எனில்

உறழ்திருப்புமை, $I = \frac{\pi r^4}{4}$

முனை உறழ்திருப்புமை, $I_p = \frac{\pi r^4}{2}$

உச்ச வளைதகைவு $= \frac{M \cdot 4 \cdot r}{\pi r^4} = \frac{4M}{\pi r^3}$

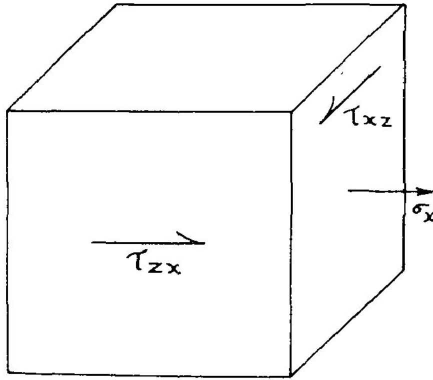
உச்ச நறுக்குத் தகைவு $= \frac{T \cdot 2 \cdot r}{\pi r^4} = \frac{2T}{\pi r^3}$

எனவே,

மேல் வரம்பிலுள்ள துணுக்கின் தகைவு நிலை:

$$\sigma_x = \frac{4M}{\pi r^3}; \ \tau_{xy} = \frac{2T}{\pi r^3}; \ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

இந் நிலை படம் 9.24 இல் காட்டப் பட்டுள்ளது (நறுக்கு விசையிருப்பின் τ_{xy} யும் செயல்பட, இந்நிலை முக்கணத் தகைவு நிலை யாய் ஆராயப்பட வேண்டுமாதலால், நறுக்கு விசை O ஆகக் கொள்ளப்படுகிறது).



படம் 9.24

முதனிலைத் தகைவு $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$

$$= \frac{1}{2}\frac{4M}{\pi r^3} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{4M}{\pi r^3}\right)^2 + \left(\frac{2T}{\pi r^3}\right)^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{\pi r^3}\left\{M + \sqrt{M^2 + T^2}\right\} \quad (9.34)$$

$$\text{உச்ச நறுக்குத் தகைவு, } \tau_{max} = \frac{2}{\pi r^3}\sqrt{M^2 + T^2} \quad (9.35)$$

விட்டத்தின்மீது செயல்படும் வளைதிருப்புமை, முறுக்குத் திருப்புமை T. இவை தெரியும் போது உச்சத் தகைவுகளைத் கணக்கிட இக் கோவைகள் நேரடியாயுதவுகின்றன. மாறாய், இத் தகைவுகளின் வரம்புகள் (அஃதாவது வலிமைகள்) தெரியும் போது , M, T அளவுகள்

எவ்வளவாயிருக்கலாம் என்பது அடுத்த வினா. இவ் வினாவிற்கு இரண்டுவகைத் தீர்வுகளைக் காண முடியும். அவை, நறுக்கு வலிமையை அடிப்படையாய்க் கொண்ட தீர்வு; (வளைதலில்) நீள் வலிமையை (இதனை வளைவலிமை என்போம்) அடிப்படையாய்க் கொண்ட தீர்வு இவற்றுள் எத் தீர்வு சரியானது என்பதனை மதிப்பிட, நாம் எதனைப் பொருளின் சிதைவு (Failure) எனக் கருதுகிறோம் என்பதைக் கொண்டே உரைக்க முடியும். (இத் தகைய ஆய்வுகள் வலிமைக் கோட்பாடுகள் (Strength Theories) என விரிவாக உயர்நிலை நூல்களில் காணப்படும்) இப்போதைக்கு இரண்டு தீர்வுகளிலும் குறைவான மதிப்புக் கொண்ட தீர்வையே எடுத்துக் கொள்வோம். இதனைக் கீழ்வரும் எடுத்துக் காட்டு விளக்குகிறது.

எ.கா. **9.10**

150 mm விட்டம் கொண்ட வட்ட வடிவ வெட்டுமுகமுள்ள விட்டப் பொருளின் வளைவலிமை 150 *N/mm*^{2}, நறுக்க வலிமை 84 *N/mm*^{2} எனில் விட்டத்தின் மீது செலுத்தக் கூடிய வளைதிருப்புமை, முறுக்குத் திருப்புமை இவற்றின் வரம்புகளை ஆய்க.

முதலில் நீள்வலிமை அடைப்படையில் தீர்வு காண்போம். இதன் படி,

முதனிலைத் தகைவு $\sigma_1 \ngtr 150\ N/mm^2$

அஃதாவது $$\frac{2}{\pi r^3} M + \sqrt{M + T^2} \ngtr 150\ N/mm^2$$

வரம்பு நிலையில் $$M + \sqrt{M^2 + T^2} = \frac{\pi \times 150\ 75^3}{2 \times 75}$$

$$= 99.402 \times 10^6\ N.mm.$$

$$\therefore \quad M + \sqrt{M^2 + T^2} = 99.402\ kN.m \qquad (9.36)$$

T = 0 எனில், $2M = 99.402\ Mn.m$

$$\therefore \quad M = 49.701\ KN.m.$$

M = 0 எனில், $T = 99.402\ kN.m$

இரண்டும் செயல்படும் போது . இவை இரண்டன் கூட்டுக்கு உச்ச வரம்பினைச் சுட்டும் கூட்டு வினைப் படத்தை (*Interaction Diagram*) பயன்படுத்தி M, T இவற்றின் மதிப்புகளைப் பெறலாம். இப் படத்தை வரைய M இன் தேர்ந்தெடுத்த மதிப்புகளைக் கொண்டு அவற்றுக்கேற்றவாறு சமன்பாடு 9.36 இன் மூலம் T இன் மதிப்புக் கணக்கிடப்பட்டுப் பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளது.

அஃதாவது T = $\sqrt{(49.701 - M)^2 - M^2}$

M	0	10	20	30	40	49.701
T	99.402	88.84	76.841	62.582	43.84	0

இவற்றைக் கொண்ட கூட்டு வினைப் படம் (9. 25) நோக்குக. அதனால், செலுத்தப்படும் M தெரிந்தால், அதனோடு செலுத்தப்படக்கூடிய T யின் அளவை இப் படத்திலிருந்து தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம் (எடுத்துக் காட்டாய்ச் செலுத்தப்படும் T = 80 kN.m எனில், அதனொடு கூடுதலாய்ச் செலுத்தக் கூடிய M = 17.4 kN.m)

அடுத்து, நறுக்குவலிமை சார்தீர்வினை நோக்குவோம்.

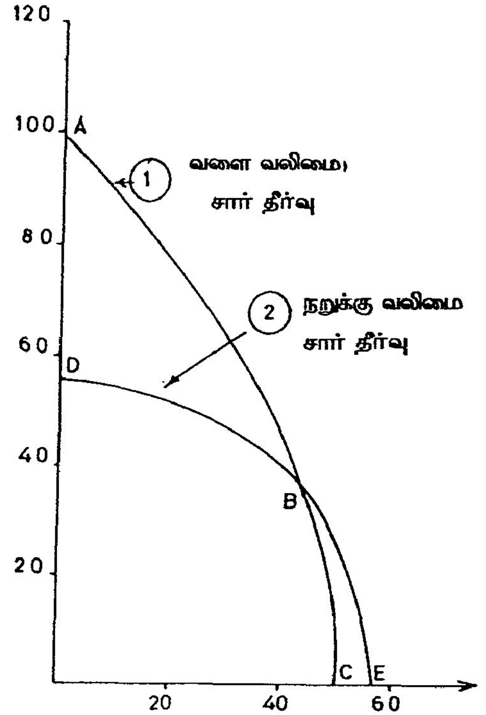
இதன்படி

$$\tau_{max} = \frac{2}{\pi r^3} \sqrt{M^2 + T^2}$$
$$= 84 \text{ N/mm}^2$$

அல்லது $\sqrt{M^2 + T^2} = 42 \pi r^3$
$= 55.665 \times 10^6$ N.mm.

$\therefore \sqrt{M^2 + T^2} = 55.665$ kN.m.

இச் சமன்பாட்டின் படி M, T இவற்றுக் கிடையேயுள்ள உறவுகள் கீழே பட்டியலில் தரப்படுகின்றன.



படம் 9.25

M	0	10	20	30	40	50	55.665
T	55.665	54.76	51.95	46.89	38.71	24.47	0

இத் தீர்வினைக் குறிக்கும் கூட்டுவினைப் படமும், படம் 9.25 இலேயே தரப்பட்டுள்ளது. இரண்டு தீர்வுகளையும் ஒன்றாய்க் காண்கிறோம். வரைவு 1, அதாவது ABC, என்பது

வளைவலிமைசார் தீர்வு, வரைவு 2, அஃதாவது DBE, நறுக்கு வலிமை சார்தீர்வு. இரண்டு வலிமைகளும் மீறப் படாமலிருக்க, வடிவமைப்பிற்குப் பயன்படுத்தவேண்டிய கூட்டுவினைப் படம் DBC என்பதை உணரலாம்.

பயிற்சிகள்:

9.15 வளைவலிமை 80 N/mm^2, நறுக்கவலிமை 48 N/mm^2 கொண்ட பொருளால், வளைதிருப்புமை 36 kN.m. முறுக்குத்திருப்புமை 22 kN.m. தாங்கக் கூடியவாறு, வட்டவடிவில் வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டம் ஒன்றனை வடிவமைக்க.

9.16 பயிற்சி 9.15 இல் நீவிர் வடிவமைத்த விட்டத்திற்கு வளைதிருப்புமை– முறுக்குத் திருப்புமை கூட்டுவினைப் படம் (M-T Interaction Diagram) வரைக.

9.11 தகைவுச்செறிவு (Stress Concentration)

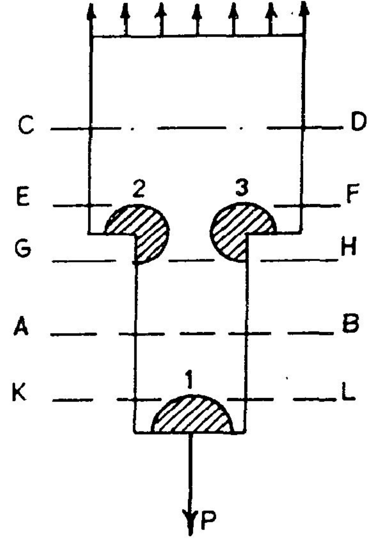
பொருள்வலிமை ஆய்வுகளில் தோராயமாய தீர்வுகளைப் பெறுதற்கு எளிய கணித அறிவே போதும் என்றும் அதேசமயம், சரியான துல்லியமான தீர்வுகளைப் பெறுதற்கு மிக்க உயர்நிலைக் கணித அறிவும் முழுமையாய்ப் போதாது என்றும் நூலின் தொடக்கத்தில் குறிப்பிட்டோம். இவ்வாறு சிக்கலான தீர்வு முறை வேண்டப்படும் துறைகளில் ஒன்று, தகைவுச் செறிவு (Stress Concentration). முதலில் இச் சொல் சுட்டும் நிகழ்ச்சி யாதென நோக்குவோம். படம் 9.26இல் காட்டப்பட்டுள்ள திண்மம் அச்சு விசையைத் தாங்கும் போது அதனுள் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுகளைத் தோராயமாய் $\sigma = P/A$ என மிக எளிதில் கணக்கிட்டு விடுகிறோம். ஆனால், இத்தகைய திண்மம் ஒன்றன் தகைவுகளையோ, விகலங்களையோ அளந்து பார்த்தால் தின்மத்தின் பெரும்பாலாய பகுதிகளில் நம் தோராயக் கணக்கீடு ஏறக்குறையச் சரியாயிருப்பதையும், அதே சமயம் சில பகுதிகளில் நாம் தோராயமாய்க் கணக்கிட்ட தகைவின் அளவைவிடப் பன்மடங்கு தகைவுகள் தோற்றுவிக்கப்படுவதையும் இச் சோதனைகள் உணர்த்தும். குறிப்பாய்ப் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள திண்மத்தின் குவிசுமை செலுத்தப்படும் முனைக்கு அண்மையில் 1 எனக் குறிப்பிட்டுள்ள பகுதி, வடிவத்தில் திடீர் மாற்றங்கள் கொண்ட பகுதிகளில் (2,3) எல்லாம் தகைவுகள் தோராயமான சராசரித் தகைவினைவிடப் பன்மடங்கு இருப்பதைக் காணலாம். இத்தகைய விளைவு தகைவுச்செறிவு (Stress concentration) என அழைக்கப்படுகிறது. எந்த வொரு உறுப்பின் வடிவமைப்பிலும் தகைவுகள் பொருளின் வலிமை வரம்பிற்குள்ளாயிருக்க வேண்டும் என்பதே அடிப்படை நியதி. இவ்வாறு தகைவுச் செறிவின் விளைவாகத் தோற்றுவிக்கப்படும் பெரும் அளவு கொண்ட தகைவுகளைச் சரியாய் ஆராய்ந்து வடிவமைத்தல் என்பது எப்போதும் எளிதன்று. அதனால், தகைவுச் செறிவு பற்றி ஏற்கனவே செய்யப்பட்ட ஆராய்ச்சி முடிவுகளைத் துணையாகக் கொண்டு இவ் விளைவுகள் நம் வடிவமைப்புகளில் தோற்றுவிக்கக் கூடிய பாதிப்புகளைத் தவிர்ப்பது எவ்வாறு என்பதை மட்டும் வடிவமைப்பாளர் (Desingner) தெரிந்துகொண்டாற்போதும்.

ஒவ்வொரு தனிப்பட்ட வடிவத்திலும், தகைவுச் செறிவுகள் தோற்றுவிக்கப்படும் தன்மையை ஆராய்தல் மிகச் சிக்கலான முயற்சி. அதனால் சில பொதுவான முடிவுகளையே

நாம் நோக்குவோம். தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுச் செறிவின் தன்மைக்கு அளவீடாய்த் தகைவுச் செறிவுக் காரணி (Stress Concentration Factor) என்னும் விகிதத்தைப் பயன் படுத்துகிறோம். இது திண்மத்தினுள் தோற்றுவிக்கப்படும் உச்சத் தகைவிற்கும் (σ_{max}) தோராயமாய்க் கணக்கிடப்படும் சராசரித் தகைவுக்குமிடையேயாய விகிதம்

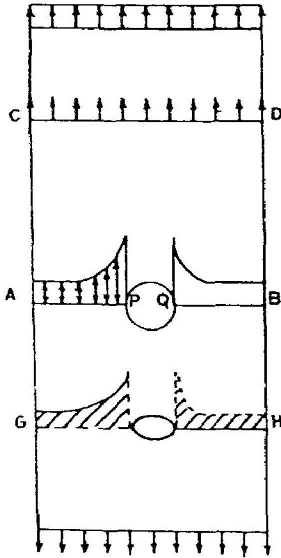
அஃதாவது, தகைவுச் செறிவுக் காரணி, $K = \dfrac{\sigma_{max}}{\sigma_{av}}$

எடுத்துக்காட்டாய்ப் படம் 9.26 ஐ நோக்கு வோம். ஓரங்களில் சீரான நீள் தகைவு (σ) செலுத்தப் படும் தகடு ஒன்றன் இடைப்பகுதியில் சிறிய வட்ட வடிவமாய துளையொன்றுள்ளது. இத் துளையின் பரிதிப் புள்ளிகள் P,Q இவற்றில் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவின் அளவு 3σ எனப் பரிசோதனைகளும் கணக் கீட்டு ஆய்வுகளும் காட்டுகின்றன. அதனால், இந்த வடிவத்திற்குத் தகைவுச் செறிவுக் காரணி 3.0 எனலாம். தகைவுச் செறிவின் அளவு, வடிவத்தைப் பொறுத்து மாறுபடுவது என்பதையும் ஆய்வுகள் காட்டியுள்ளன. எடுத்துக்காட்டாய் வட்டமாய் துளைக்குப் பதிலாய் நீள்வட்டத்துளையிருப்பின் தகைவுச் செறிவின் கடுமை மேலும் மிகுதிப்படும். படங்கள் 9.28, 9.29 இரண்டனையும் நோக்க மற் றொரு உண்மையையும் காணலாம். அஃதாவது, வடிவமாற்றங்களின் இடம், அளவு முதலியன ஏறக் குறைய ஒன்றாயிருந்தாலும் நளினமான வளைவுகள் கொண்ட வடிவங்களைவிடக் (படம் 9.28) கூர் முனைகள் கொண்ட வடிவங்களில் (படம் 9.29) தகை வுச் செறிவின் கடுமை மிகவும் மிகுதியாயிருக்குமென் பதையும் ஆய்வுகள காட்டுகின்றன. இனி, வடிவமைப்பு நோக்கில் வேணடப்படும் முக்கிய உண்மையொன்றனை நோக்குவோம். படம் 9.26 இல் காட்டப்பட்டுள்ள திண்மத்தைப் பற்றிக் கூறும் போது சில பகுதிகளைத் தவிரப் பெரும்பாலான பகுதிகளில் தோராயமாய தகைவுகளே ஏறக்குறையச் சரியாயிருக்குமென உரைத்தோம். இப் பகுதிகளில் வரம்புகள் யாவை ? படத்தில் CD, AB முதலிய மட்டங்களில் தோராய விடைகள் சரியாயிருப்பதையும் EF, GH, KL முதலிய மட்டங்களில் இவை மாறுபடுவதையும் ஆய்வுகள் உணர்த்துகின்றன. அவ்வாறே படம் 9.27 இல் AB என்னும் மட்டத்தில் தகைவுச் செறிவு இருப்பதையும், CD என்ற மட்டத்தில் தோராயத் தீர்வே சரியான விடையாயிருப்பதையும் இடையில் EF என்ற மட்டத்தில் தகைவுச் செறிவு எனக் கூறுமளவிற்கு மாறுபாடுகள் இல்லையெனினும் சராசரியிலிருந்து ஓரளவிற்கு

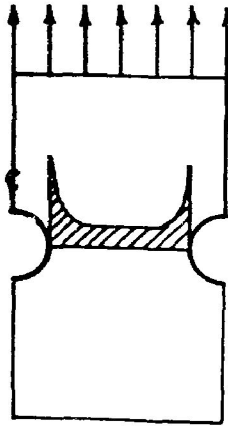


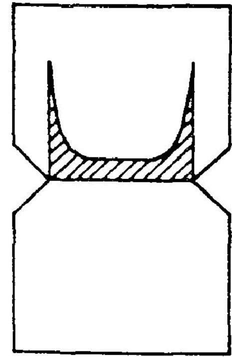
படம் 9.26

மாறுபாடுகள் இருப்பதையும் கூட இவ் ஆய்வுகளில் அறியலாம். இவ் ஆய்வு முடிவுகளின் தொகுப்பாய்த் தகைவுச் செறிவு தோன்றும் பகுதிகள் பற்றிய கோட்பாடு ஒன்றனைத் தூயர் வெனான்ட் (St.Venant) உருவாக்கியுள்ளார். தூயர் வெனான்ட் கோட்பாடு (St.Venant Principle) என அழைக்கப்படும். இதன் உரை, துளைகள், கூர்முனைகள், குவிசுமைகள் முதலாய தனிமைக் கூறுகள் (Singularities) காணப்படும் பகுதிகளில் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுச் செறிவுகள், இத் தனிமைக் கூறுகளைச் சூழ்ந்துள்ள மிகவும் நெருக்கமாய பகுதிகளைத் தவிர வேறெங்கிலும் தோற்றுவிக்கும் பாதிப்புகள் தள்ளத்தக்க அளவில் குறைவாயிருக்கும் என்பதாகும்.



படம் 9.27


படம் 9.28


படம் 9.29

வடிவமைப்பாளரைப் பொருத்தமட்டில் இக் கோட்பாடின் பயன் யாது? பொதுவாய் வடிவமைப்புகளில் தகைவுச் செறிவினைப் புறக்கணித்து விட்டுத் தோராயமான வலிமை ஆய்வுகளை மேற்கொண்டாற் போதும். அதே சமயத்தில், தகைவுச் செறிவுகள் தோன்றக் கூடிய பகுதிகளைமட்டும் போதிய அளவிற்கு வலிமைப்படுத்த உற்றன செய்ய வேண்டும். வலிமைப்படுத்தும் முறைகளைப் பற்றிய ஆராய்ச்சிகள் பெருமளவில் நடைபெற்று ஆய்வு முடிவுகள் பல நூல்களிலும் ஆராய்ச்சி இதழ்களிலும் காணக் கிடைக்கின்றன. இவற்றின் துணைகொண்டு இப் பகுதிகளைத் தக்கவாறு வலிமைப்படுத்தலாம்.

* இவற்றுள் இந் நூலாசிரியர், டாக்டர் பட்டத்திற்காகச் சென்னைக் கிண்டிப் பொறியியற் கல்லூரியில் நடத்திய ஆராய்ச்சிகளும் ஒரு பகுதியாகும்.

10. கீல் சட்டகங்களில் அகவிசைகள் (Member forces in trusses)

10.1 முன்னுரை

ஒரு கட்டுமானம் (Structure) என்பது, ஒன்றோ பலவோ தனித்தனி உறுப்புகள் உறுதிச் சமனிலைக்கேற்ற வகையில் இணைக்கப்பட்ட அமைப்பு என்பதனை முன்னரே கண்டோம். இத்தகைய அமைப்புகள் விட்டங்களாகவோ, பலகங்களாகவோ (Slabs), சட்டகங்களாகவோ (Frames), கமான்களாகவே (Arches) இருக்கலாம். இவற்றுள் எதுவாயிருப்பினும், நிலையியல் சார் அமைப்புகளில் தாங்கிகளின் அமைப்பு, அவை பொருத்தப்படும் இடம் ஆகியவற்றைப் பொருத்துத் தாங்கி எதிர்வினைகளை நிலையியல் விதிகளைப் பயன்படுத்தியே கணக்கிட முடியும். ஆனால், வடிவமைப்பிற்கு இன்றியமையாத செய்தி, கட்டுமானம் (அல்லது கட்டுமான உறுப்புகள்), இவ் விசைகளை எவ்வாறு தாங்கிக்கொள்கிறது என்பதே. கட்டுமானங்களில் சட்டகங்கள் (Frames) முக்கியமானதொரு வகையைச் சேர்ந்தவை. இவ் வகைக் கட்டுமானங் களின் உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் அவற்றின் நீளத் திசையில் மாறும் அளவீடுகளாக வெட்டுமுகப் பண்புகள் கொண்டு இருக்கும். ஆய்விற்கு நீளத்திசையே தலைமையானதாய்க் கொள்ளத் தக்கது. இவற்றுள் ஒவ்வொரு உறுப்பின் இருமுனைகளும், மற்ற உறுப்புகளுடனோ, தாங்கிகளுடனோ கீல்களால் (Pins) இணைக்கப்பட்டிருப்பின் அவற்றைக் கீல் சட்டகங்கள் (Pin Jointed frames அல்லது trusses) என அழைக்கிறோம். அவற்றின் இணைப்புகளில் கூடும் உறுப்புகளின் முனைகள் சுழல்வதற்குத் தடையில்லை. ஆனால், அவை எல்லாவற்றின் இடப்பெயர்ச்சிகள் ஒரேஅளவினதாய் இருக்க வேண்டும். உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் இருமுனைகளிலும் கீல் கொண்டிணைக்கப்பட்டிருப்பதால் (கீல்களில் திருப்புமை (Moment) செலுத்தலியலாது; ஆதலின், உறுப்புகளின் இருமுனைகளிலும் வளைதிருப்புமைகள் செயல்படா. மேலும் இத்தகைய அமைப்புகளில் புறவிசைகள் இணைப்புகளில் மட்டுமே செலுத்தப்படுகின்றன *. அதனால் எந்தவொரு உறுப்பிலும் வளை திருப்புமையோ, நறுக்கு விசையோ** செயல்படா. உறுப்புகளில் நீள்விசைகளோ இறுக்க விசைகளோ மட்டுமே செயல்படும். அதனால், இத்தகைய அமைப்புகளை ஆய்வது, வடிவமைப்பது, கட்டுவது மூன்றுமே எளியனவாகும். சிக்கலில்லாத இவ் அமைப்புகளுக்குச் செலவு சற்றுக் கூடுதலாயிருப்பினும் சிலவகை அமைப்புகளில் இவை பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. (எவ்வெச் சூழ்நிலைகளில் இவ்வகை அமைப்புகள் ஏற்றவை என்பதனை வடிவமைப்பு (Design)

---

* இணைப்புகளுக்கிடையே உறுப்புகளின்மீது புறவிசைகள் செலுத்தப்படின் அவற்றின் விளைவுகளைத் தனியே ஆய்வுசெய்ய வேண்டும்.

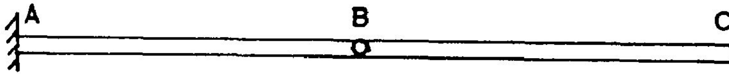
** உறுப்பின் நீளம் முழுதிலும் வளைதிருப்புமை 0 எனில் நறுக்குவிசையும் இருக்க முடியாது.

நூல்கள் சுட்டும்). இங்கு கீல் சட்டகங்களில் அகவிசை ஆய்வுக்குரிய சில முறைகளைக் காண்போம்.

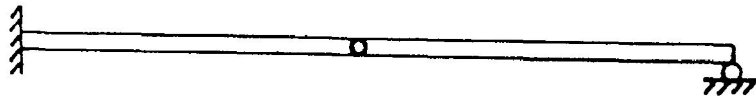
10.2 கீல் சட்டகங்களின் நிலைபேறு (Stability of Pin Jointed Trusses)

சட்டகங்களின் அகவிசைகளை ஆயுமுன், அவற்றின் நிலைபேறு (Stability) குறித்து உறுதி செய்துகொள்ள வேண்டுவது முதல் தேவையாகும். ஒரு கட்டுமானத்தின் மீது நாம் செலுத்தக் கூடிய எல்லாவிதப் புற விசைகளையும் (அவற்றின் அளவுகளைச் சிற்றளவுகளாகக் கொள்ளவேண்டும்) ஏற்று, அக் கட்டுமானம் உறுதிச் சமனிலையில் இருக்கவல்லது எனில், அக் கட்டுமானம் நிலைபேறு (Stability) கொண்டது எனக் கருதலாம்.

புறவிசைகளால் அமைப்பின் ஒட்டுமொத்தமாய இடப்பெயர்ச்சிக் கூறுகளையும், அமைப்பின் ஒட்டுமொத்தமாய நிலைபேற்றை உறுதி செய்யும் வகைகளையும் விட்டங்களின் விசை ஆய்வின்போது கண்டோம். அமைப்பின் ஒட்டுமொத்தமான நிலைபேறு என்பதை இருகூறாய்க் காணலாம். புறநிலைப்பேறு (External Stability), அகநிலைப்பேறு (Internal Stability) என்னும் இருகூறுகளையும் கொண்டதே ஒட்டுமொத்த நிலைபேறு. (இவையன்றி நிலைபேறு கொண்ட கட்டுமானத்தில் தனியொரு உறுப்பு ஓரளவுக்குமேல் விசை செலுத்தப்படும்போது தன் நிலைபேற்று நிலையிலிருந்து பிறழும் சூழல்களை உயர்நிலை நூல்களிற் காணலாம். அதனால் ஒட்டுமொத்த நிலைபேறுபற்றித் தெளிவாய்க் காணுமுன் முதலில் அகநிலைபேறுபற்றி அறிவோம்.



a. புறநிலைப் பேறு, அக நிலைப் பிறழ்ச்சி

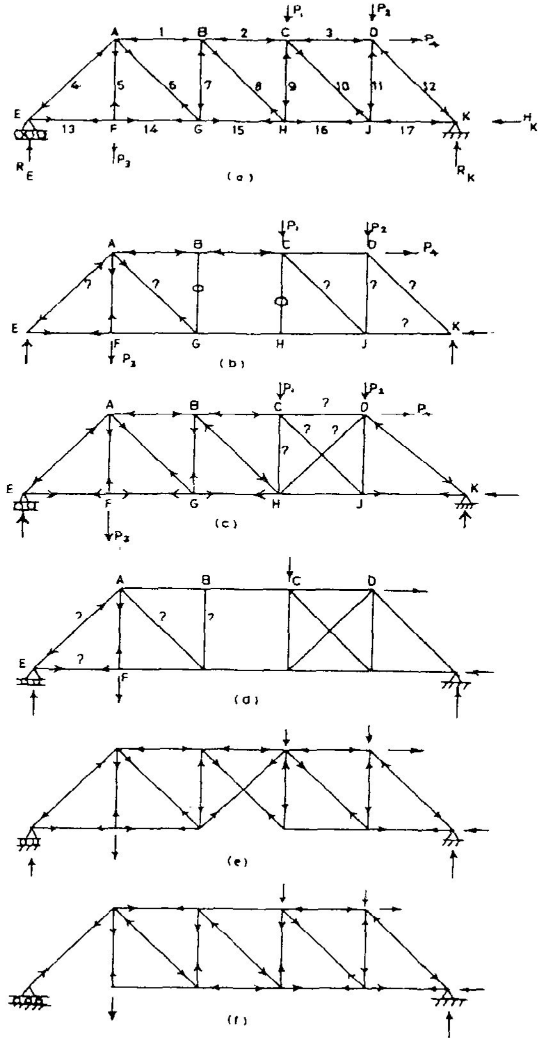


b. புறமிகைமை + அகநிலைப் பிறழ்சி
= ஒட்டு மொத்த நிலைப்பேறு

படம் 10.1

படம் 10.1 இல் ஒரு துருத்துவிட்டம் காட்டப்பட்டுள்ளது. இத் துருத்து விட்டத்தின் புறநிலை பேற்றிற்குப் போதுமான அளவில் தாங்கியமைப்புண்டு. ஆனால், இவ் விட்டம், இருபகுதிகள் கொண்டதாயும் (AB, BC) இவ் இரு பகுதிகளும் ஒரு கீல் கொண்டு இணைக்கப் பட்டதாயும் விளங்குகிறது. இதனால், விட்டம் (தொடர்ந்து சீராய முடுக்கத்துடன்) இயங்குதல் தடுக்கப் பட்ட போதிலும், விட்டத்தின் ஒருபகுதி (BC) சுமைகளைத் தாங்குதற்கு இயலாததாய் நிலைபிறழ்ச்சி (Instability) அடைந்துள்ளது. இவ்வாறு, அமைப்பின் ஒருபகுதியில் தோன்றும் நிலைபிறழ்ச்சியை அகநிலை பிறழ்ச்சி(Internal Instability) என்கிறோம். இதனை மாற்றி நிலைப்பேறு ஊட்ட இரண்டு வழிகள் உள. முதலாவதாய், இணைப்பு B யில் கீலை நீக்கி இரண்டு உறுப்புகளையும் உறுதியாய் இணைக்கலாம். இவ்வாறு செய்யின் புற, அகநிலைபேறுகள் இரண்டனையும் உறுதி செய்யலாம். மாறாய், C என்னும் முனையில் ஓர் உருளைத் தாங்கியைக் கூடுதலாய் அமைக்கலாம். இதனால், அமைப்புப் புறத்தின் மிகத்தாங்கிகள் (Redundant Support) கொண்டதாயும், அகத்தில் நிலைபிறழ்ச்சி (Instability) கொண்டதாயும் இருப்பினும் ஒட்டுமொத்தத்தில் நிலைபேறு கொண்ட (Stable), நிலையியல் சார் (Determinate) அமைப்பாய் இது விளங்கக் காணலாம்.

கீல் சட்டகங்களைப் பொறுத்த மட்டில் ஒருகூர்முனைத் தாங்கி (Knife edge support அல்லது Pin support)யும் ஒரு உருளைத் தாங்கியும் (Roller Support) அமைப்பது. அதன் புற நிலைப் பேற்றினை உறுதி செய்கிறது. அககநிலைபேற்றைக் காண அகவிசைகளின் செயல்பாட்டினை நோக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாய்ப் படம்



படம் 10.2

22

10.2(a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகத்தை நோக்குவோம். புறநிலைபேறு இருத்தலைத் தாங்கிகளால் உறுதி செய்கிறோம். (படத்தில் சட்டகத்தின்மீது செயல்படுவதாய்க் காட்டப்பட்டிருக்கும் விசைகளின் எண்ணிக்கை, திசை, செயல்முனைகள் முதலியன நமது விருப்பப் போக்கில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டிருப்பினும், மற்றப் பல்வேறுவிதமான விசையமைப் புகளுக்கும் ஆய்வுமுறையில் மாற்றமில்லை. இனிச் சட்டகத்தின் அகநிலைப் பேற்றினை நோக்குவோம். இதற்கு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சமனிலை ஆய்வு தேவையில்லை. இங்கு அச்சு விசை உறுப்புகள் மட்டுமேயிருப்பதால் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றன் முழுநீளத்திலும் சீராய அச்சு விசையே இருப்பதால், இணைப்புகளின் சமநிலைகளை மட்டும் நோக்கினாற் போதும். **எந்தவொரு புள்ளியிலும் செயல்படும் விசைகளின் மொத்தக் கூட்டு 0.0 ஆக இருக்க வேண்டும்** என்பது சமனிலை விதி (Equilibrium coondition). இவ் விதியைப் பயன் படுத்தும்போது (செயல் படும் விசைகளின் திசைகள் நமக்குத் தெரியுமாதலால்) மொத்த விசைகளின் (அளவு தெரிந்த விசைகள், தெரியாத விசைகள் என இரண்டு பகுதிகளாய்ப் பிரித்துக் கொள்ளலாம்) கூட்டு 0 என்பதை, இக் கூட்டின் கூறு எத்திசையிலும் 0.0 ஆக இருக்க வேண்டும் என உரைக்கலாம். அல்லது கிடைத்திசையாகிய x திசைக்கூறு, நேர்க்குத்துத் திசையாகிய y திசைக் கூறு இரண்டும் தனித்தனியே 0 ஆக இருக்க வேண்டும் என உரைக்கலாம். குறியீட்டு முறையில்,

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad (10.1)$$

அஃதாவது மொத்தத்தில் நமக்கு ஒவ்வொரு இணைப்பிலும் இரண்டு சமனிலைச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. அதனால், ஒவ்வொரு இணைப்பிலும் கூடும் விசைகளின் (புறவிசைகள், உறுப்பு விசைகள் இரண்டும் சேர்ந்து) இரு திசைக் கூறுகளையும்கொண்டு இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் எழுதும்போது, மொத்த விசைகளில், அளவு தெரியாத விசைகள் இரண்டுமட்டுமே இருப்பின், சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளிலிருந்து தெரியாத (உறுப்பு) விசைகளைக் கணக்கிட முடியும். தொடக்கத்தில் எல்லா உறுப்பு விசைகளுமே தெரியாத விசைகள் தான். ஆனால், தாங்கி வினைகளைக் கணக்கிட்டபின் புறவிசைகள் யாவுமே தெரிந்த விசைகள். அதனால், இரண்டு உறுப்புகள் மட்டுமே சந்திக்கும் இணைப்பினை முதலில் ஆய, இவ் இரண்டு உறுப்புகளின் அகவிசைகளை அறிகிறோம். இவற்றின் மறுமுனைகள் கூடும் இணைப்புகளில் இவை தெரிந்த விசைகளாகிவிடுவதால், இங்கு இவற்றைத் தவிர அளவு தெரியாத விசைகள் இரண்டு இருப்பின், இங்குச் சமனிலை விதிகளைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாய்ப் படம் 10.2(a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகத்தின் ஆய்வைத் தாங்கி E அல்லது K இலிருந்து தொடங்கலாம். இணைப்பு E இன் சமனிலையால் உறுப்புகள் EA, EF ஆகியவற்றின் அகவிசைகளைக் காண்கிறோம். அடுத்து இணைப்பு A ஐ நோக்க இங்கு, இப்போது தெரிந்த விசை EA மட்டுமே. ஆனால், தெரியாத விசைகள் AF, AG, AB ஆகிய மூன்று உறுப்புகளின் அகவிசைகள். அதனால், இவ் இணைப்பினை இப்போது ஆயமுடியாது. மேலும், இணைப்பு F-ஐ நோக்க, இங்கு EF தெரிந்த விசை; தெரியாதவை FA, FG ஆகிய உறுப்புகளின் அக விசைகள் இரண்டு மட்டுமே. அதனால், இவ் இணைப்பின் சமனிலை

ஆய்விற்குப் பின்னர், இணைப்பு A இல் கூடும் விசைகளில் AF இன் அளவும் தெரிந்து விடுமாதலால், தொடர்ந்து AB, AG ஆகிய உறுப்புகளின் அகவிசைகளைக் கணக்கிட இயலும். இவ்வாறாய்ச் சட்டகத்தின் உறுப்புகள் அனைத்திலும் அகவிசைகளைக் கணக்கிட்டு முழுமை யான தீர்வினைப் பெற முடியும். இவ்வகை அமைப்பு நிலைபேறு (Stability) கொண்டதாயும், நிலையியல் சார்தீர்வு கொண்டதாயும் (Statically determinate) விளங்குகிறது.

இத்தகைய அமைப்புகள் குறித்த ஒருபொதுவாய தன்மையை நோக்குவோம். ஒருகீல் சட்டக அமைப்பில் மொத்த இணைப்புகளின் எண்ணிக்கை, n எனவும், மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை m எனவும், மொத்தத் தாங்கி வினைகளின் எண்ணிக்கை r எனவும் கொண்டால்,

தெரியாத மொத்த விசைகள் $= m + r$

அமைக்கக் கூடிய சமன்பாடுகள் $= 2 \times n$

இவையிரண்டும் சமமாயிருக்க வேண்டும். அஃதாவது,

$$m + r = 2n \text{ அல்லது}$$

$$m = 2n - r \qquad (10.2)$$

இச் சமன்பாடு, உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, இணைப்புகள் தாங்கி, எதிர் வினைகள் இவற்றின் எண்ணிக்கைகளுக்கிடையேயாய உறவினைத் தருகிறது. சட்டகங்கள் நிலையியல்சார் அமைப்புகளாயிருக்க வேண்டுமெனில், சமன்பாடு 10.2 தேவையான நிபந்தனைதான்; ஆனால், போதுமானதன்று.

படம் 10.2.a இல் காணும் அமைப்பில் $r = 3$, $n = 10$, $m = 17$.

எனவே, நிபந்தனை (10.2) பொருந்துகிறது. உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையில் ஒன்று (BH) நீக்கப்படின் நிகழ்வதை நோக்குவோம் (படம் 10.2.b) தொடக்கத்தில் இணைப்பு E இலிருந்து தொடங்கி, ஒவ்வொரு உறுப்பாய் விசைகண்டுபிடித்துக்கொண்டுவர இயல்வதுபோல் தோன்றும். ஆனால், இணைப்பு B க்கு வந்தவுடன், உறுப்பு BG இல் விசை 0 எனத் தீர்வு பெறு வோம். ஏனெனில், இணைப்பு G இல், விசை AG யினைச் சமனிலையில் இருத்துதற்குரிய y திசைக் கூறு வேறேதுமில்லை. அதனால், உறுப்பு AG யில் விசையேதும் இருக்க முடியாது எனக் காண்கிறோம். ஆனால் இணைப்பு A ஐயும் சமனிலையிலிருந்த்த முடியாது எனவும், விளைவாய் இணைப்பு E இலும் சமனிலை இருக்க முடியாது எனவும் காணலாம். இதனால், சமனிலைக்குத் தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $2n - r$ க்குக் குறைவாயிருக்கக் கூடாது. இருப்பின், நிலைப் பிறழ்வை (Instability) தவிர்க்க முடியாது.

இனி உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $(2n - r)$ ஐ விட அதிகமாயிருப்பின் நிகழ்வதை நோக்கு வோம். (படம் 10.2.c). இதில் இணைப்பு E அல்லது K இலிருந்து விசை ஆய்வுகளைத் தொடங்க முடியும். E இலிருந்து தொடங்கி இணைப்பு B வரை தடங்கலின்றி ஆராய முடியும். ஆனால்,

இதனையடுத்து இணைப்பு C அல்லது H இரண்டில் எங்கு நோக்கிலும் அளவு தெரியாத உறுப்பு விசைகள் மூன்று இருக்கக் காண்கிறோம். அஃதாவது சட்டகத்தின் நிலைபேற்றுக்குத் தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைவிட மிகுதியாய் உறுப்புகள் இருக்கும்போது, சமனிலை விதிகளைமட்டுமே வைத்துக் கொண்டு உறுப்பு விசைகளைக் காணல் இயலாது. (நலிவுசார் முறைகளில் தீர்வுகளை காண முடியும். இவற்றைக் கட்டுமான ஆய்வியலில் காணலாம்.) எனவே, இத்தகைய சட்டகங்களின் ஆய்வுமுறைகளை இங்கு நாம் மேற்கொள்ளப்போவது இல்லை.

இனிச் சமன்பாடு 10.2 இன்படி உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை இருந்தால் மட்டும் நிலைபேறு உறுதியாகிவிடாது என்பதனைக் காணலாம். படம் 10.2.d ஐ நோக்க, இங்கும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 16 தான்; எனினும், இவ் அமைப்பு உறுதிச் சமனிலையில் இருக்க இயலாது என்பதை 10.2.b இன் ஆய்வுகளைக் கொண்டே உணரலாம். அதனால் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $2n - r$ என்னும் அளவில் இருந்தால்மட்டும் போதாது. அவை தேவையான இடங்களில் இணைக்கப்பட்டிருப்பது அவசியமே. அதனால் சமன்பாடு 10.2 ஐ மட்டும் வைத்துக்கொண்டு, நிலைபேறு பற்றி உறுதியாய்க் கூறமுடியாது. இச் சமன்பாட்டின்படி உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை இருப்பதை உறுதி செய்து கொண்டபின், சட்டகத்தில் விசையோட்டத்தை (Force flow in the frame), அஃதாவது, ஒவ்வோரிணைப்புகளின் விசைகளி லிருந்து அடுத்துள்ள உறுப்புகளின் விசைகளைக் காண முடியுந் தன்மையை, ஆய்ந்த பின்னரே சட்டகத்தின் நிலைபேறுபற்றி அறிய இயலும். படம் 10.2.e இலும், ஓர் உறுப்பு (GH) நீக்கப்பட்டு வேறொன்று (GC) சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. எனினும், இங்கு நிலைபேறு பிறழவில்லை என்பதை விசையோட்டத்தினை நோக்கி உணரலாம்.

பொதுவாய்ப் பெரும்பாலான கீல்ச் சட்டகங்களில் தாங்கிவிசைகள் மூன்றுதான் இருக்கும். அஃதாவது, புறவிசைகள் போதிய எண்ணிக்கையில் மட்டுமே இருக்கும். (மூன்றனுக்குக் குறைவாயிருப்பின் உள்ளமைப்பு எவ்வாறாயிருப்பினும் சட்டகம் உறுதிச் சமனிலையில் இருக்க முடியாது). தாங்கி வினைகள் மிகையாயிருப்பின் மிகைத்தாங்கி அமைந்துள்ள இணைப்பில் உறுப்புகள் குறைக்கப்படலாம். படம் 10.2.f காண்க. இங்குத் தாங்கி E இன் எதிர்வினை EA அல்லது AE இன் திசையில்தான் இருக்க முடியும். அதனால், அச் சட்ட கத்தை, உறுப்பு EA ஐ நீக்கிவிட்டு அதற்குச் செங்குத்தாய் உருளைத் தாங்கியொன்றனை இணைப்பு A இல் இணைப்பதற்கு ஈடாயதாயும் கருதலாம். இது படம் 10.1.b இல் காட்டப் பட்டுள்ள விட்டத்தைப் போன்றே, அகநிலைப் பிறழ்வினைத் தாங்கிவினையால் ஈடுசெய்யும் அமைப்புகளில் ஒன்றாகும். எனவே, சமன்பாடு 10.2 அன்றியும், சட்டகத்தில் விசையோட் டத்தையும் ஆய்வதில் நன்கு பயிற்சி பெற்ற பின்னர்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன, அல்லது நாம் தேர்ந்தெடுத்த சட்டக அமைப்பு நிலைபேறும், நிலையியல்சார் தீர்வும் கொண்டதா என உறுதி செய்துகொள்ள முடியும். இத்தகைய (நிலைபேறும், நிலையியல்சார் தீர்வும் கொண்ட) சட்டகங்கள், நிறைசட்டகங்கள் (Perfect Frames) என்னும் அழைக்கப்படுகின்றன. ஒருசட்ட கம் நிறைசட்டகமென உறுதிசெய்துகொண்டபின்னர் உறுப்பு விசைகளை ஆராயப் புகலாம். இதற்குரிய முறைகளிற் சில,

1. இணைப்புச் சமனிலை முறை (Method of joints)
2. துண்டப் பகுப்பு முறை (Method of Sections)
3. நீள்விசைக்கெழு முறை (Method of Tension Colefficients)
4. வரைபட முறை (Graphical Method)

இவற்றை ஒவ்வொன்றாய்க் காண்போம்.

10.3 இணைப்புச் சமனிலை முறை (Methods of Joints):

இம் முறை கருத்தளவில் மிக எளியதொன்று; அஃதாவது, நாம் முன்னரே கண்டவாறு, ஒவ்வொரு இணைப்பிலும் சமனிலைச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தித் தெரியாத உறுப்பு களின் விசைகளைக் கணக்கிடுதலே இம் முறையின் சாரம். இதனைச் சில எடுத்துக்காட்டுகளாற் காண்போம்.

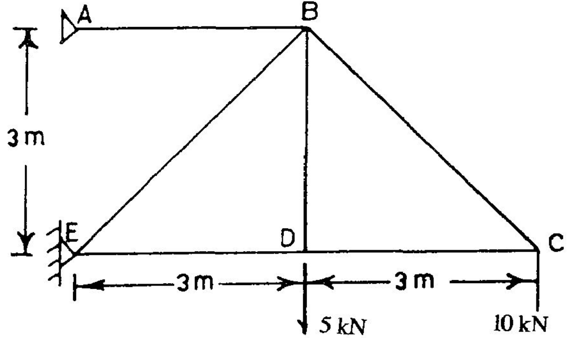
எ.கா. 10.1

படம் 10.3.a இல் தரப்பட்டுள்ள கீல்ச் சட்டகத்தில் உறுப்பு விசைகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

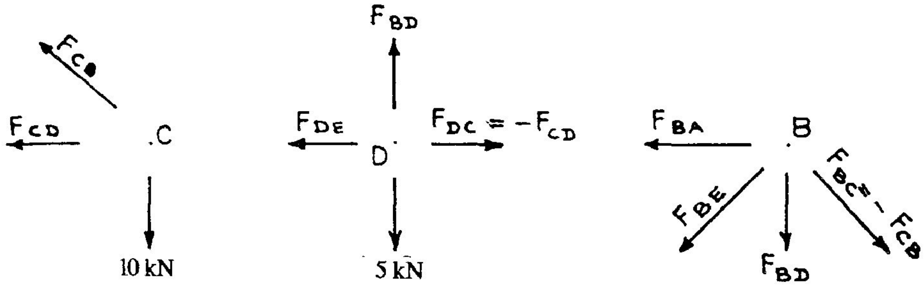
இச் சட்டகத்தின் ஒருமுனையில் (C) இரண்டு உறுப்புகள் மட்டுமே சந்திப்பதால், தாங்கி வினைகளைக் கண்டு பிடிக்காமலே தீர்வினைத் தொடங்கலாம்.

1. இணைப்பு C இன் சமனிலைச் சமன்பாடுகள்.



படம் 10.3 a கீல் சட்டகம்

இங்குச் சந்திக்கும் விசைகள் மூன்று (படம் 10.3.b காண்க). அவை, புறவிசை 10kN, உறுபபு விசைகள் F_C F_{CD} முதலியன. இவ் உறுப்புகள் x அச்சிலிருந்து θ_{CB}, θ_{CD} முதலிய கோணங்கள் சாய்ந்திருப்பதாய்க் கொள்வோம். உறுப்பு விசைகளின் தன்மைகள் தெரியுமுன் F_{CB}, F_{CD} முதலாய விசைகளை நீள்விசைகள் (Tensions) எனக் கருதியே இவற்றின் திசைகளைக் குறிப்போம். (தீர்வுகள் எதிர் மறையாய் வரின் அவை, இறுக்க விசைகள் என உணரலாம்). இதனால்,



படம் 10.3.b இணைப்புகளில் செயல்படும் விசைகள்

சமனிலைச் சமன்பாடுகள் கீழ்வருமாறு அமையும்.

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{CB} \cos \theta_{CB} + F_{CD} \cos \theta_{CD} = 0$$

அஃதாவது $F_{CB} \cos 135^\circ + F_{CD} \cos 180^\circ = 0$

$\therefore$ $-\frac{1}{\sqrt{2}} F_{CB} - F_{CD} = 0$ (a)

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{CB} \sin \theta_{CB} + F_{CD} \sin \theta_{CD} - 10 \text{ kN} = 0$$

அஃதாவது $\frac{1}{\sqrt{2}} F_{CB} - 10\text{kN} = 0$ (b)

எனவே $F_{CB} = (+10\sqrt{2}) \text{ kN}$ (c)

இதனை (a) இல் பயன்படுத்த, $F_{CD} = -\frac{1}{\sqrt{2}} F_{CB} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times 10 = -10 \text{ kN}.$

$\therefore F_{CB} = 10\sqrt{2}$ kN நீள்விசை; $F_{CD} = -10$ kN இறுக்கவிசை

இணைப்பு D இல் சமனிலைச் சமன்பாடுகள்

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{DC} + (-F_{DE}) \cos 180^\circ = 0$$

அல்லது $-10 - F_{DE}(-1) = 0$

$\therefore \quad F_{DE} = -10\ kN$ (இறுக்கவிசை)

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{DB} - 5\ kN = 0$

அல்லது $F_{DB} = 5\ kN$ (நீள்விசை)

இணைப்பு B இல் சமனிலைச் சமன்பாடுகள்:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{BC} \sin(-45^o) - F_{BD} + F_{BE} \sin 225^o = 0$$

$$10\sqrt{2}\ x - \frac{1}{\sqrt{2}} - 5 - \frac{1}{\sqrt{2}} F_{BE} = 0$$

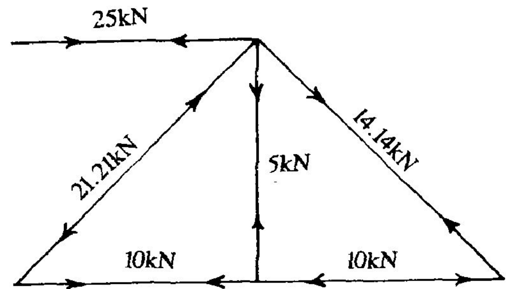
$$\therefore \quad F_{BE} = -15\ \sqrt{2}\ kN$$ (இறுக்கவிசை)

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{BA} \cos(180^o) - F_{BE} \cos 225^o + F_{BC} \cos 45^o = 0$$

$$-F_{BA} + (-15\ \ 2) - \frac{1}{\sqrt{2}} + 10\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\therefore \quad F_{BA} = 25\ kN$$ (நீள்விசை)

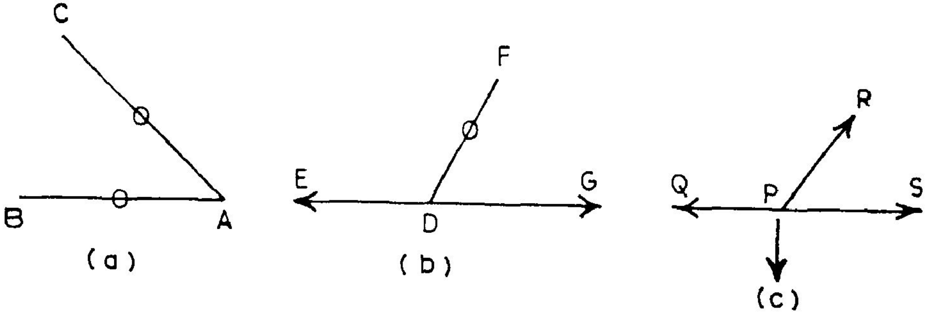
விடைகள் படம் 10.3.c யில் தரப்பட்டுள்ளன. முறையின் எளிமையை இவ் எடுத்துக்காட்டிற் காண்கிறோம். பிறிதொரு எடுத்துக்காட்டினைக் காணுமுன் ஆய்வினை எளிதாக்கும் மற்றொரு குறிப்பினையும் காண்போம். படம் 10.4 (a) இல் A என்னும் முனையில் சந்திக்கும் இரண்டு உறுப்புகளைக் காண்கிறோம். இணைப்பு A இல் வேறுவிசை ஏதும் செயல்படவில்லை. எளிமை கருதி BA (அல்லது BC) இன் திசையில் சமனிலைச் சமன்பாட்டை எழுதுவோம். விசை CA ஐ BA இன் திசையில் ஒரு கூறும் BA வுக்குச் செங்குத்தான திசையில் ஒருகூறுமாய்ப் பகுக்க, இச் செங்குத்துக் கூறினைச் சமனிலையில் இருத்த வல்ல விசைகள் ஏதுமில்லை எனக் காண்கிறோம். CA யில் விசைகள் செயல்பட முடியாதெனில் BA இன் திசையில் செயல்படும் விசை



படம் 10.3.c உறுப்பு விசைகள்

அவ் உறுப்புவிசை மட்டுமேயானால் அதனைச் சமனிலையில் இருத்தவும் வேறு விசைகள் இல்லை. அதனால் இன்மீதும் விசைகள் செலுத்த இயலாது. சுருங்கக் கூறின், இரண்டுறுப்புகள், தமக்கிடையே 180° தவிரப் பிற எக்கோணத்திலும் சந்திக்கும் இணைப்பில் வேறுவிசை ஏதும் செயல்படவில்லையெனில், இவ்விரு உறுப்புகளிலும் அகவிசைகள் இருக்க முடியாது.

படம் 10.4 (b) ஐ ஆய்ந்து மற்றொரு குறிப்பினையும் சேர்க்கலாம். அஃதாவது, மூன்று உறுப்புகளுள் இரண்டு 180° சாய்வில் சந்திக்கும் இணைப்பில் வேறு விசைகள் இல்லையேல் மூன்றாம் உறுப்பில் அகவிசையேதும் இருக்க முடியாது. இக் குறிப்புகளால் விசை தாங்க இயலாத உறுப்புகளை முதலிற் கண்டுபிடித்து அவற்றின்மீது 0 குறியிட்டுப் பின்னர், இவ் உறுப்புகளே இல்லாததுபோலக் கருதி ஆய்வுகளைத் தொடரக் கணக்கீட்டு வேலைகள் குறையும்.



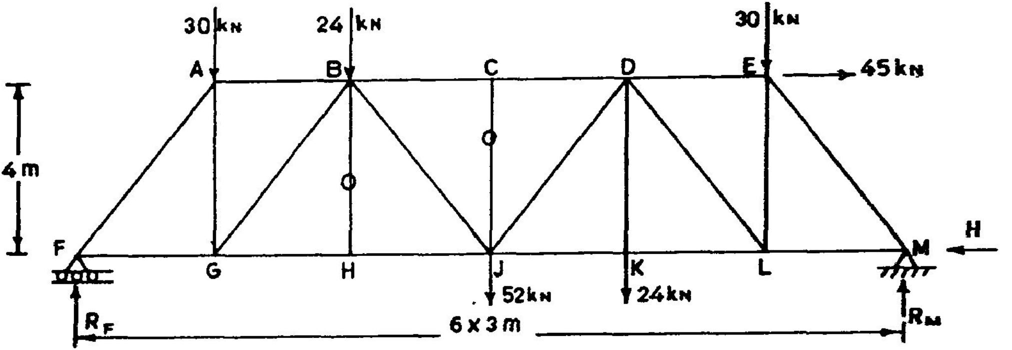
படம் 10.4 விசை தாங்காத உறுப்புகள்

உறுப்பு விசைகளைக் கூறுபடுத்தல் யாவர்க்கும் எளிதாய செயல்தான். எனினும், குறிப்பான ஒருமுறையைச் சீராய்ப் பயன்படுத்தல் எளிமை தரும். அதனால், இனி நாம் பின்பற்றப் போகும் சில குறியீட்டு முறைகளை இங்குக் காண்போம்.

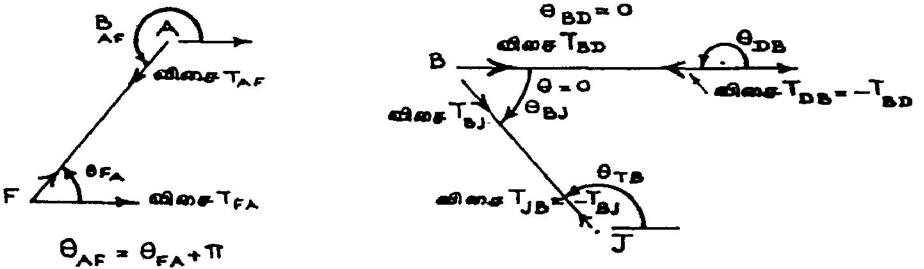
1. சமனிலைச் சமன்பாடுகளை எழுதும்போது, உறுப்புகளில் நீள்விசை செயல்படுவதாய்க் கொண்டே எழுத வேண்டும். இதனைக் குறிக்குமுகத்தான் உறுப்புவிசைகளை T_{AB}, T_{BC} எனபன போன்ற குறியீடுகள் கொண்டே குறிப்போம். பின்னர்ச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும்போது தெரிந்த விசைகளுக்குரிய குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

2. உறுப்பு விசைகளின் சாய்கோணங்களை அவற்றின் செயல்முனைகளிலிருந்து x இன் நேர் மறைத் திசை செல்லும் அச்சுகளை ஆதாரமாய்க்கொண்டே அளக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாய் படம் 10.5 இல் காணப்படும் FA என்ற உறுப்பினை நோக்குவோம்.

முனை F இல் செயல்படும் விசை T_{FA} எனக் கொள்ளின், இதன் சாய்கோணம், θ_{FA} = ∠ GFA; இதன் மறுமுனையில் செயல்படும் விசை T_{AF} இன் சாய்கோணம் θ_{AF} = ∠BAF இக் கோணங்களை எத் திசையில் அளப்பினும் தவறில்லை. இக் குறியீடுகளின் விளக்கங்களைப் படம் 10.6 இல் காணலாம். அதனால்,



படம் 10.5



படம் 10.6 உறுப்பு விசைக் கூறுகள்

3. சமனிலைச் சமன்பாடுகளை எழுதல் எளிய முறையில் அமையும். எடுத்துக்காட்டாய் இணைப்பு G இன் சமனிலைச் சமன்பாடுகள்

$$\Sigma F_x = 0 \qquad T_{GH} \cdot \cos\theta_{GH} + T_{GA} \cdot \cos\theta_{GA} + T_{GB} \cdot \cos\theta_{GB} + T_{GF} \cos\theta_{GF} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad T_{GH} \sin\theta_{GH} + T_{GA} \sin\theta_{GA} + T_{GB} \sin\theta_{GB} + T_{GF} \sin\theta_{GF} = 0$$

இவற்றுள் Sin θ அல்லது Cos θ வின் மதிப்பு 0 எனில் அவற்றைத் தவிர்த்து எழுதலாம்.

எ.கா **10.2**

படம் 10.5 இல் காட்டியுள்ள சட்டக உறுப்புகளின் அகவிசைகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

இதில் தாங்கி வினைகளை அறிந்த பின்னரே தீர்வு தொடங்க முடியும். தாங்கி F இன் எதிர்வினையின் திசை தெரியும். அதனால்,

$\Sigma M_A = 0$ என்னும் சமனிலை விதியைப் பயன்படுத்தலாம்.

$\therefore \quad -18 \times R_F + 30 \times 15 + 24 \times 12 + 52 \times 9 + 24 \times 6 + 30 \times 3 - 45 \times 4 = 0$

எனவே $\quad R_F = 70\ kN$

C, H, K - ஆகிய இணைப்புகளில் புறவிசைகள் இல்லையேல், CJ, BH, DK ஆகிய உறுப்புகளில் விசைகள் இருக்க முடியாது. ஆனால், K இல் புறவிசை செலுத்தப்படுகிறது. அதனால், BH, CJ ஆகிய உறுப்புகளைப் புறக்கணித்து, BD, GJ ஆகியவற்றை ஒரே உறுப்புகளாய்க் கருதி ஆய்வு செய்யலாம்.

இணைப்பு F இன் சமனிலை

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \quad 70 + T_{FA} \sin\theta_{FA} = 0$$

இதில் $\quad \sin\theta_{FA} = 0.8 ; \quad \cos\theta_{FA} = 0.6$

$\therefore \quad 70 + 0.8\ T_{FA} = 0$

அல்லது $$T_{FA} = -\frac{70}{0.8} = -87.5\text{ kN}$$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow$ $T_{FA}\cos\theta_{FA} + T_{FG}\cos\theta_{FG} = 0$

$-87.5 \times 0.6 + T_{FG} = 0$

$\therefore$ $T_{FG} = +\ 52.5\ \text{kN}$

இணைப்பு A இன் சமனிலை:

1. $\Sigma F_y = 0 \rightarrow$ $T_{AF}\sin\theta_{AF} + T_{AG}\sin\theta_{AG} - 30\text{ kN} = 0$

இங்கு $\sin\theta_{AF} = -0.8$; $\sin\theta_{AG} = -1$

$\therefore$ $-87.5 \times (-0.8) + T_{AG}(-1) - 30\text{ kN} = 0$

$T_{AG} = 0.8 \times 87.5 - 35 = +\ 40\text{ kN}$

2. $\Sigma Fx = 0 \rightarrow$ $T_{AF}\cos\theta_{AF} + T_{AB}\cdot\cos\theta_{AB} = 0$

$-\ 87.5 \times (-.6) + T_{AB} = 0$

$T_{AB} = -\ 52.5\ \text{kN}$

இணைப்பு G இன் சமனிலை:

1. $\Sigma F_y = 0 \rightarrow$ $T_{GA}\sin\theta_{GA} + T_{GB}\sin\theta_{GB} = 0$

இங்கு $\sin\theta_{AF} = -0.8\sin\theta_{AG} = -1$

$\therefore$ $40 + T_{GB} \times 0.8 = 0$

$$T_{AG} = \frac{-40}{0.8} = -50\text{kN}$$

2. $\Sigma Fx = 0 \rightarrow$ $T_{GB}\cos\theta_{GB} + T_{GF}\cos\theta_{GF} + T_{GH}\cos\theta_{GH} = 0$

$-\ 50 \times 0.6 + 52.5 \times (-1) + T_{GH} = 0$

$T_{GH} = 30 + 52.5 = +\ 82.5\ \text{kN}$

இவ்வாறே ஒவ்வொரு இணைப்பின் சமனிலையையும் ஆய்வதனால் உறுப்புகளின் அகவிசைகள் முழுவதையும் காண முடியும். அவ்வாறு கணக்கிடப்பட்ட விசைகளைக் கீழ்வரும் பட்டியலிற் காணலாம்.

உறுப்பு	நீள்விசை kN	உறுப்பு	நீள்விசை kN
FA	− 87.5	JD	+ 45.0
FG	52.5	JK	+ 67.5
AG	+ 40.0	DK	+ 20.0
AB	− 52.5	DL	− 75.0
GB	− 50.0	DE	− 22.5
GJ	+ 82.5	EL	+ 60.0
BD	− 94.5	KL	+ 67.5
BJ	20.0	LM	+ 22.5

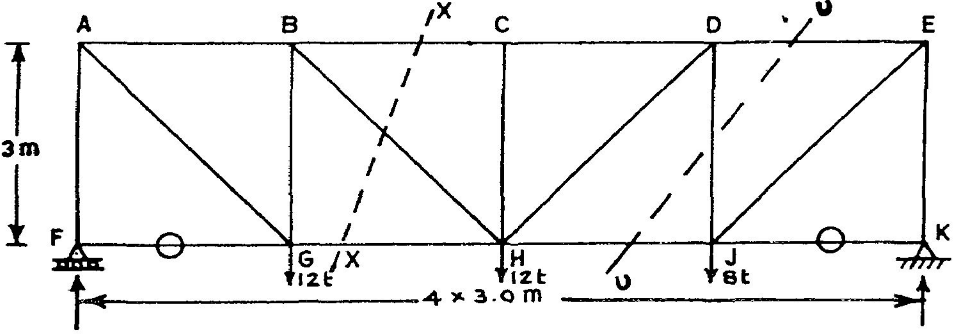
10.4 துண்டப் பகுப்பு முறை (Method of Section):

இம் முறையில் ஆய்வு செய்யப்பட வேண்டிய சட்டகத்தை இரு துண்டங்களாய்ப் பகுத்து , ஏதாவதொரு துண்டத்தின் சமநிலையை ஆய்வதனால் உறுப்பு விசைகளைக் கணக்கிடுகிறோம். ஐந்தாம் அத்தியாயத்தில், ஒரு விட்டத்திற்கு எந்த வெட்டுமுகத்தில் அகவிசைகள் (நறுக்கு விசை, வளைதிருப்புமை) தேவைப்படுகின்றனவோ அங்கு விட்டத்தை இருதுண்டங்களாய்ப் பகுத்து ஒருதுண்டத்தில் சமனிலையை ஆய்ந்து அகவிசைகளைக் கணக்கிட்டோம். (அம் முறைகளை நினைவு கூர்தல் உதவியாயிருக்கும்). அவ்வாறு கருதும்போது, ஒருதுண்டத்தின் மீது செயல்படும் புறவிசைகள் அனைத்தும், வெட்டுமுகத்தில் செயல்படும் அகவிசைகள் அனைத்துடனும் சேர்ந்து, துண்டத்தைச் சமனிலையில் இருத்துகின்றன என்ற கருத்தைப் பயன்படுத்தினோம். இக்கருத்தைச் சட்டகங்களில் எவ்வாறு பயன்படுத்துவது என்பதை அறியக் கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டு உதவுகிறது.

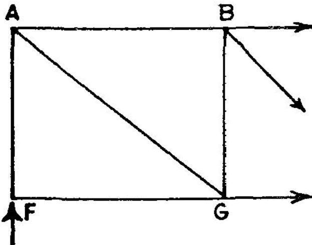
எ.கா. 10.3: படம் 10.7 ஐ நோக்குவோம். இதில் (10.7.a) காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகத்தை XX என்னும் அச்சினால் பகுக்கப்பட்ட இரண்டு துண்டங்களைப் படங்கள் 10.7 b, 10.7.c காட்டுகின்றன.

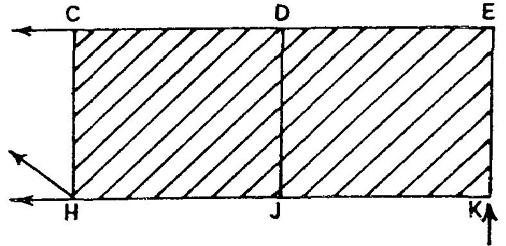
முதலில் இடப்புறத் துண்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இதன்மீது செயல்படும் புறவிசைகள் தாங்கி எதிர்வினை R_F (17kN) இணைப்பு G இல் செலுத்தப்படும் சுமை 12 kN. ஆகியன. இவற்றுடன் வெட்டப்பட்ட உறுப்புகளின் அகவிசைகளாய T_{BC}, T_{BH}, T_{GH} ஆகியவையும் சேர்ந்து ABGF என்னும் துண்டத்தைச் சமனிலையில் இருத்துகின்றன. இணைப்புகளையும் அவற்றில் செயல்படும் விசைகளையும் மட்டுமே சரியாய் எடுத்துக் கொள்ளல் தேவை.

அன்றித் துண்டத்தின் உள்ளமைப்புப்பற்றிப் பொருட்படுத்த வேண்டுவதில்லை. காட்டப் பட்ட வலப்புறத் துண்டப் பகுதிபோல் (10.7 c) துண்டப்பகுதியை ஒருமுழுமையாக உறுப் பாய்க் கருதினாற்போதும். ஒவ்வொரு துண்டத்தின்மீதும் செயல்படும் விசைகளில் புறவிசைகள் தெரிந்தவை; அகவிசைகள் தெரியப்பட வேண்டியவை. இவ் விசைகளின் சமனிலைச் சமன்பாடு களைப் பயன்படுத்தி அகவிசைகளைக் கணக்கிடலாம். முதலில் துண்டம் ABGF ஐ நோக்கு வோம்.



(a) சட்டகமும் சுமைகளும்





(b) இடத்துண்டம்

(c) வலத்துண்டம்

படம் 10.7 துண்டப்பகுப்பு முறை

தாங்கிவிசைகள்,

$$R_F = 17\ kN.$$

$$R_K = 15\ kN.$$

(கணக்கிட்டுச் சரிபாக்கவும்).

சமனிலைச் சமன்பாடுகள்,

$$\Sigma M = 0,\ \Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0$$

என்பனவே. எப் புள்ளியில், விசைகளின் திருப்புமைகளைக் கணக்கிட்டினும்

$$\Sigma M = 0$$

என்பது பொருந்தும். எனினும், இணைப்பு B இன் வழியே T_{BC}, T_{BH} ஆகிய விசைகள் செயல்படுவதால் B இல் இவற்றின் திருப்புமைகள் 0 ஆக, T_{GH} மட்டும் கொண்ட எளிய சமன்பாட்டைப் பெற முடியும். இவ்வாறே தக்கமுறையில் திருப்புமை சமன்பாட்டை முதலிற் பயன்படுத்துவோம்.

$$M_B = T_{GH} \times 3 - R_F \times 3 = 0$$

$$\therefore \quad T_{GH} = R_F = 17\ kN$$

அடுத்து $\Sigma F_y = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்த,

$$R_F + T_{BH} \sin\theta_{BH} - 12\,kN = 0$$

$$17\,kN + T_{BH} \times (-.707) - 12\,kN = 0$$

$$\therefore \quad T_{BH} = \left(\frac{-12 + 17}{+0.707}\right) = +\ 7.07\ kN$$

மற்றும் $\Sigma F_x = 0$ $\quad T_{GH} + T_{BH} \cos\theta_{BH} + T_{BC} = 0$

அஃதாவது, $\quad 17\ kN + 7.07 \times 0.707 + T_{BC} = 0$

$$\therefore \quad T_{BC} = -17 - 7.07 \times 0.707 = -\ 22\ kN$$

வலத் துண்டத்தின் சமனிலையைக் கருதி, இதே முடிவுகளை அகவிசைகள் T_{CB}, T_{HB}, T_{HG} யாகப் பெறலாம்:

மாற்றுமுறை

வலத் துண்டத்தில்,

$\Sigma M_H = 0$ என்பதால்

$T_{BC} \times 3 + 15 \times 6 - 8 \times 3 = 0$ என உரைத்து

$$T_{BC} = \frac{15 \times 6 - 8 \times 3}{-3} = 22 \text{ kN}$$

எனத் திருப்புமை சமனிலையிலிருந்தே T_{BC} கணக்கிட முடியும்.

அவ்வாறே

$\Sigma M_C = 0$ எனில்

$$15 \times 6 - T_{GH} \times 3 - T_{BH} \times \frac{3}{\sqrt{2}} - 8 \times 3 = 0$$

அஃதாவது, $15 \times 6 - 17 \times 3 - T_{BH} \times \frac{3}{\sqrt{2}} - 24 = 0$

எனவே $T_{BH} = \frac{(15 \times 6 - 17 \times 3 - 24)\ \sqrt{2}}{3} = 7.07 \text{ kN}$

வலத் துண்டத்தைப் பயன்படுத்தும் முறைக்கு மற்றொரு எடுத்துக்காட்டாகச் சட்டகத்தை YY என்னும் அச்சுக் கொண்டு இருதுண்டங்களாக்குவோம் (துண்டமாக்கித் *தனிப்படங்கள் வரைய வேண்டியதில்லை). மனத்தளவில் கருதினாற்போதும். எனினும்,* இவ் வகைத் துண்டப் பகுப்பு படம் 10.7 (c) யில் காட்டப்படுகிறது.) வலப்புறத் துண்டம் DEKJ இன் மீது செயல்படும் புறவிசைகள், தாங்கி எதிர்வினை R_K, இணைப்பு J இல் புறச்சுமை 8 kN; அக விசைகள் T_{DC}, T_{DH}, T_{JH} ஆகியன். இணைப்பு D இல் திருப்புமை சமனிலை காண்போம்.

$$M_D \quad = \quad R_K \times 3 - T_{JH} \times 3 = 0$$

எனவே, $15 \times 3 - T_{JH} \times 3 = 0$

$$T_{JH} \quad = \quad +15 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_Y \quad = \quad 0 \qquad R_K - 8 \text{ kN} + T_{DH} \cdot \sin 225^\circ = 0$$

$$15 \text{ kN} - 8 \text{ kN} + T_{DH} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

எனவே

$$T_{DH} = \frac{(15-8)}{+.0707} = +9.9 \text{ kN.}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad T_{DC} \cdot \cos 180^{o} + T_{JH} \cos 180^{o} = 0$$

$$\therefore \quad T_{DC} = -T_{JH} = -15 \text{ kN}$$

இவ்வாறே உறுப்புகள் அனைத்திலும் அகவிசைகளைக் கணக்கிட முடியும். விடைகள் பட்டியலிற் காண்க.

உறுப்பு	நீள்விசை kN	உறுப்பு	நீள்விசை kN
AB	− 17.00	CH	0
AF	− 17.00	HD	9.90
AG	+ 24.04	HJ	5.00
FG	0	DJ	− 7.00
BC/BD	− 22.00	DE	− 15.00
BH	7.07	JE	21.21
GH	17.00	JK	0
		EK	− 15.00

(நீள்விசையின் அளவு எதிர்மறையெனில், அஃது இறுக்கவிசையைக் குறிப்பிடும். எ.கா. உறுப்பு AB இல் செயல்படுவது, 17 kN இறுக்க விசையே)

இம்முறையைப் பயன்படுத்தும்போது எந்தவொரு சட்டத்திலும் தெரிந்த புறவிசைகளைக் கொண்டு ஒருதுண்டத்தின்மீது செயல்படும் தெரியாத அகவினைகளைச் சமனிலை விதிகளைப் பயன்படுத்திக் காண்கிறோம். சமனிலை விதிகள் மூன்று; ஆதலின், துண்டம் செய்யும் அச்சு (இது நேர்க்கோடாக இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை) மூன்று உறுப்புகளை வெட்டும்படி நாம் துண்டம் செய்ய வேண்டும். சட்டகத்தை இவ்வச்சு இருதனிப் பகுதிகளாய்ப் பிரிக்க வேண்டுமாகலின், சட்டகத்திற்கு ஒருபுறம் வெளியே தோன்றி மறுபுறம் வெளியே முடிய வேண்டும். மூன்று உறுப்புகளுக்குமேல் வெட்டப்பட்டால் அச்சு ZZ போன்று. தெரியாத அகவிசைகள் அனைத்தையும் கண்டுபிடிக்கப் போதிய சமன்பாடுகள் இல்லாமையால் தீர்வு

காணமுடியாது. நிலைபேறு கொண்ட சட்டகங்களில் தாங்கிகளுக்கு அண்மையிலன்றி மூன்றனுக்கும் குறைவான உறுப்புகள் வெட்டுறும்படி துண்டம் செய்ய முடியாது. படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு UU அச்சுப்போன்று வளைவாயிருப்பது பிழையன்று. ஆனால், இங்குத் துண்டம் என்பது BEKGF என்னும் பகுதி என்பதனை கவனத்திற்கொள்ள வேண்டும். எவ்வாறு பிரிக்க வேண்டும் என்பதனை ஆய்வுகளின் எளிமை நோக்கியே தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அடுத்து ஒவ்வொரு துண்டத்தின் சமனிலையை ஆயும்போதும், எந்தவொரு கட்டத்திலும் தெரியாத விசை, ஒன்றுமட்டுமே இருக்குமாறு சமனிலைச் சமன்பாடுகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும் (நாம் கண்ட எடுத்துக்காட்டில் $\Sigma M = 0$, என்பதை முதலிலும், $\Sigma F_y = 0$ என்பதை அடுத்தும் $\Sigma F_x = 0$ என்பதைக் கடைசியாகவும் பயன்படுத்தியதை நோக்குக.

இணைப்புச் சமனிலைமுறையொடு ஒப்பிடும்போது, இம் முறையில் இரண்டு முக்கிய நன்மைகளை நோக்கலாம். முதலாவதாய்க் குறிப்பிட்ட சில உறுப்புகளின் அகவிசைமட்டும் தெரிந்தால் போதுமெனில், இம் முறையில் தேவையான கணக்கீடுகள் குறைவு. இரண்டாவதாய் இணைப்புச் சமனிலை முறையில் ஒரு முனையிலிருந்து தொடங்கி, ஒவ்வொரு இணைப்பாய் விசை ஆய்வுகளை நடத்திச் செல்வதால், ஏதாவதொரு கட்டத்தில் செய்யப்படும் பிழைகள் மற்றைய கணக்கீடுகளையும் பாதிக்கும். எண்ணிக்கை மிகுந்த உறுப்புகள் கொண்ட சட்டகங்களில் இது மிகுந்த இடர்ப்பாடாகும். ஆனால், துண்டப் பகுப்பு முறையில் ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் புறவிசைகளைமட்டுமே தெரிந்த விசைகளாய் கொண்டு ஆய்கின்றோமாதலின், இப் பாதிப்பு இருப்பதில்லை. ஆனால், எல்லா உறுப்புகளுக்குமே விசைகள் கண்டுபிடிக்க வேண்டுமெனில், இம் முறையில் கணக்கீடுகள் சற்று மிகுதி. பெரிய சட்டகங்களை ஆராயும்போது பிற முறைகளைப் பயன்படுத்தி ஆய்வு மேற்கொண்டபின் சிற்சில பகுதிகளில் துண்டப் பகுப்புமுறை கொண்டு விடைகளைப் பரிசோதித்தல் உண்டு.

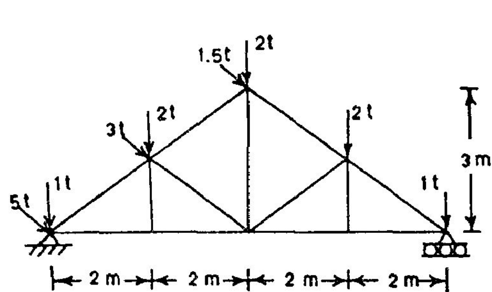
மேலும், பாலங்கள் போன்ற சுமைகளின் இடங்கள் மாறக்கூடிய சட்டகங்களின் உறுப்புவிசை ஆய்தற்குத் துண்டப் பகுப்புமுறையொன்றே எளிதிற் பயன்படுத்தக் கூடியது. (விரிவு, கட்டுமான ஆய்வியலிற் காண்க.)

பயிற்சிகள்:

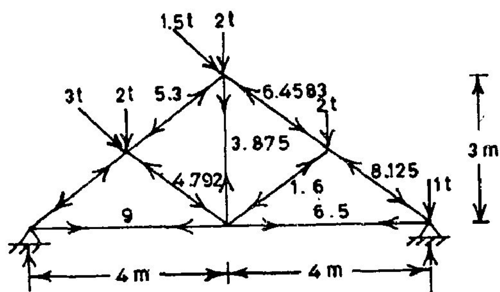
10.1 : படங்கள் 10.8 முதல் 10.12 வரை காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகங்களுக்கு உறுப்புகளின் அகவிசைகளைக் கணக்கிடுக. (இரண்டு தீர்வுகள் இணைப்புச் சமனிலை முறைப்படியும், மீதியைத் துண்டப் பகுப்புமுறையிலும் தீர்வு செய்யலாம்)

விடைகளைப் படங்கள் 10.16–10.20 இல் நோக்கிச் சரிபார்க்கவும்.

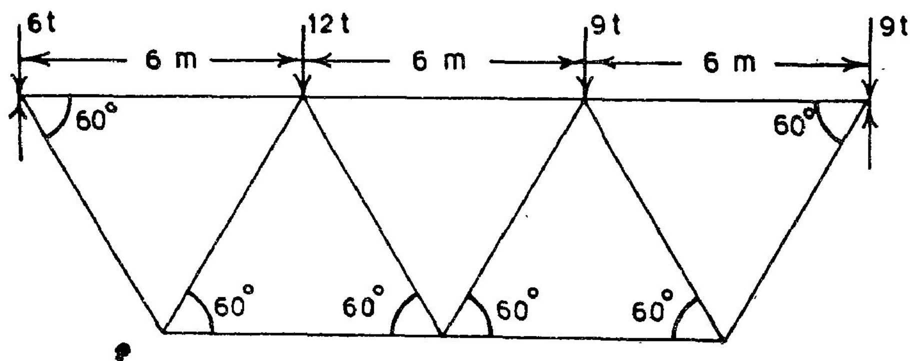
குறிப்பு: படம் 10.8 இல் சாய்வாய்க் காட்டப்பட்டுள்ள விசைகள், உறுப்புகளுக்குச் செங்குத்தான திசையில் செயல்படுவதாய்க் கருதவேண்டும்.



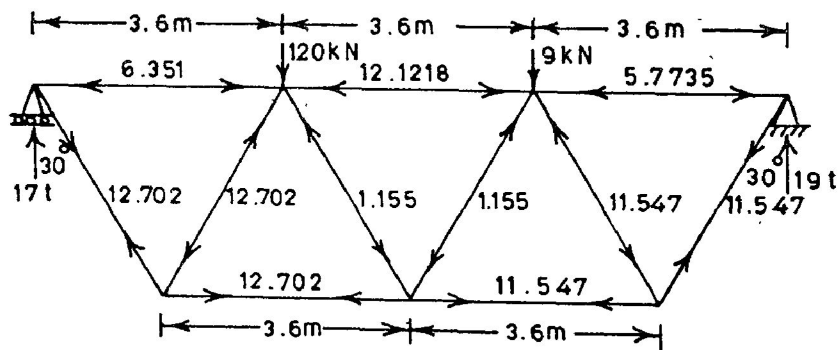
படம் 10.8



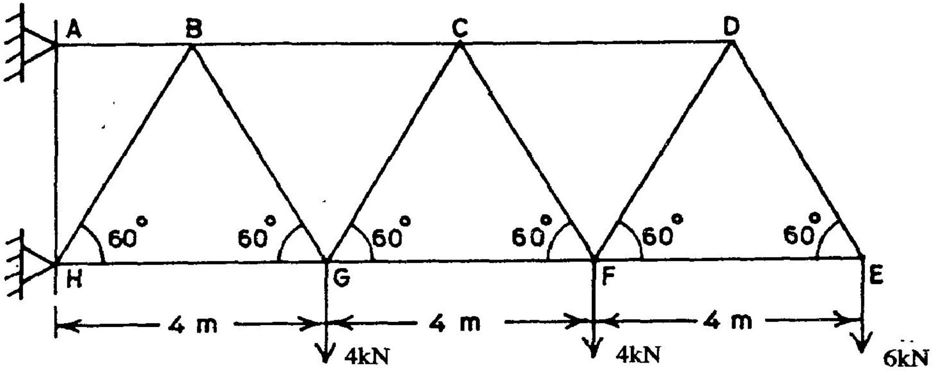
படம் 10.16



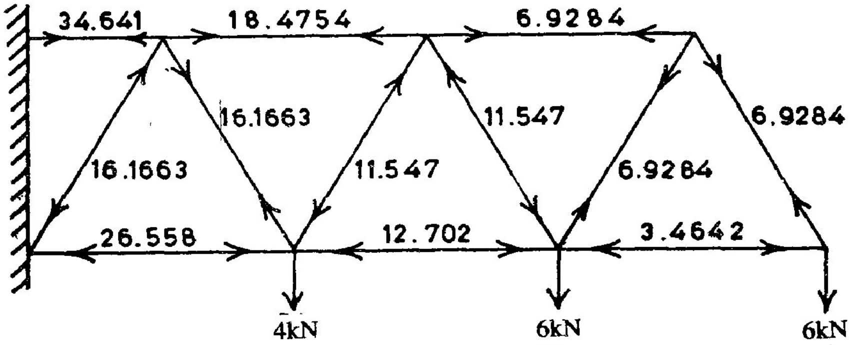
படம் 10.9



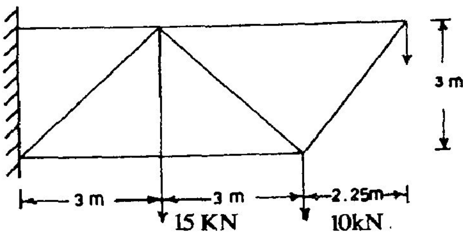
படம் 10.17



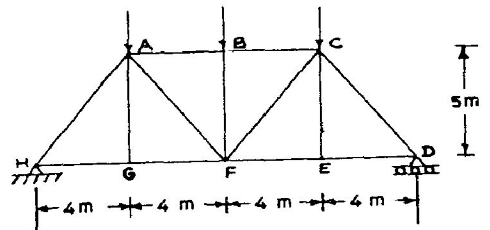
படம் 10.10



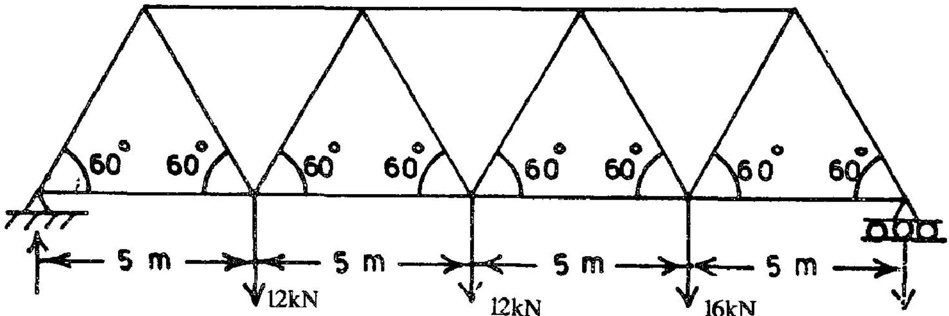
படம் 10.18



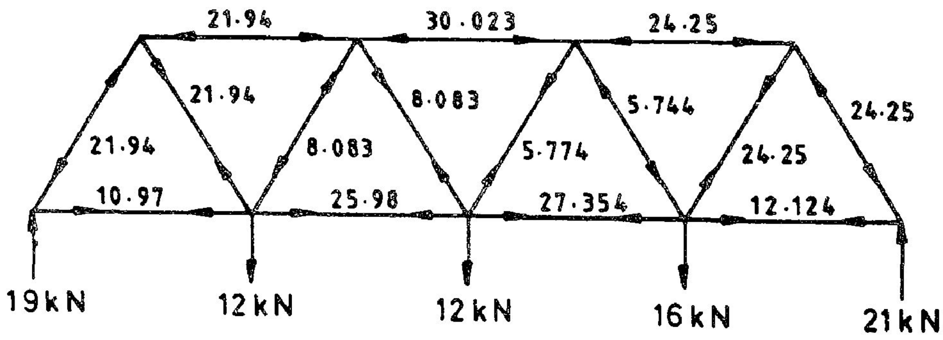
படம் 10.12



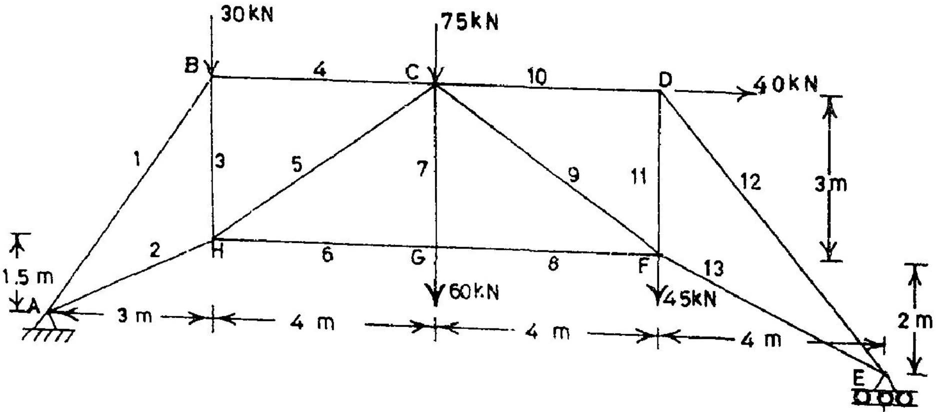
படம் 10.13



படம் 10.11



படம் 10.14



படம் 10.20

10.5 நீள்விசைக் கெழுமுறை (Method of Tension Coefficients)

இஃது ஒருபுதிய முறை அன்று; இணைப்புச் சமனிலைச் சமன்பாடுகளை எளிமையாய் எழுதப் பயன்படும் ஒருமாற்றுமுறையே இது.

நீள்விசைக் கெழு: ஓர் உறுப்பில் செயல்படும் நீள்விசையை அதன் நீளத்தால் வகுக்க வரும் எண்ணே நீள்விசைக்கெழு (Tension Coefficient) என அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாய் 5m நீளமுள்ள உறுப்பு ஒன்றனில் செயல்படும் அகவிசை 27 kN இறுக்கம் என்றால், இவ் உறுப்பின் நீள்விசைக்கெழு

$$t = -27/5 = -5.4 \text{ kN/m}.$$

நீள்விசைக்கெழுக்களை ஓர் இடைநிலை அளவீடுகளாய் மட்டுமே பயன்படுத்துவோமாதலின் இவற்றுக்கு அலகுகள் குறிப்பிடுதல் அவசியம் இல்லை; $t = -5.4$ எனக் குறிப்பிட்டாலே போதும். இவ் வரையறை, ஆய்வில் எவ்வாறு உதவுகிறது என்பதனைக் காண்போம்.

ஓர் உறுப்பின் நீள்விசைக்கெழு t எனில் அதன்மீது செயல்படும் மொத்தவிசை = நீளம் × t அவ் உறுப்பின் நீளம் L எனவும், x, y அச்சுகளின்மீது, இந் நீளத்தின் வீழல் (Projection) L_x, L_y எனவும் கொண்டால்,

உறுப்பின் அகவிசை	T	=	$L.t$
இவ் விசையின் x திசைக்கூறு		=	$L_x.t$
இவ் விசையின் y திசைக்கூறு		=	$L_y.t$

இக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்திச் சமனிலைச் சமன்பாடுகளை எழுதும்போது, கோணச் சார்பலன்கள் (Sinθ, Cosθ முதலியன) பயன்படுத்தத் தேவையில்லை. கணக்கீடுகள் எளிமையாகின்றன. எடுத்துக் காட்டாகப் படம் 10.5 இல் இணைப்பு A இன் சமனிலைச் சமன்பாடுகளை,

$$L_{x\,AF}\, t_{AF} + L_{xAG}\, t_{AG} + L_{x\,AB}\, t_{AB} + F_x = 0$$

அல்லது $$-3t_{AF} + 0 + 3\,t_{AB} + 0 = 0$$

$$L_{y\,AF}\, t_{AF} + L_{y\,AG}\, t_{AG} + L_{y\,AB}\, t_{AB} + F_y = 0$$

அல்லது $$-4\,t_{AF} - 4\,t_{AG} + 0 - 30 = 0$$

என எழுதலாம். ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் sinθ, cosθ முதலாய கோணச் சார்பலன்களைவிட அவற்றின் வீழல்களைக் காணுதல் எளிது. அவ் வீழல்களைக் கருதப்படும் இணைப்பினை ஆயமாய்க்கொண்டே, நேர்மறைத் திசைகளில் நேர்மறையாயும், எதிர்மறைத் திசைகளின் எதிர் மறையாயும் குறிப்பிட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாய் உறுப்பு AF இன் கிடைவீழல், L_x



இணைப்பு A இன் சமனிலைச் சமன்பாட்டை எழுதும்போது எதிர்மறையாய் (–3) வரும்; இணைப்பு F-இன் சமனிலைச் சமன்பாட்டை எழுதும்போது நேர்மறையாய் (+3) வரும். இக் குறிகளைச் சரியாய்ப் பயன்படுத்தினால் இணைப்புச் சமனிலை முறையைவிட எளிதில் விடைகள் பெறலாம்.

எ.கா 10.4

படம் 10.20இல் காணப்படும் கீல்ச் சட்டகத்தை நீள்விசைக்கெழு முறையில் ஆய்ந்து உறுப்பு விசைகளைக் காண்க.

முதலில் குறியீடுகளில் சில மாற்றங்கள் செய்து, கீழடைகளைக் குறைப்போம். உறுப்புகள் 1, 2, 3 எனப் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு குறிப்பிடப்பட்டால், அவற்றின் நீளங்கள்

L_1, L_2, L_3 ... எனவும்

நீளங்களின் x திசை வீழல்கள் x_1, x_2, x_3... எனவும், y திசை வீழல்கள் y_1, y_2, y_3.... எனவும், நீள்விசைக் கெழுக்கள் t_1, t_2, t_3.... எனவும் நீள்விசைகள் T_1, T_2, T_3,.... எனவும் குறிப்பிடப்படும். தாங்கி வினைகளின் குத்துக் கூறுகள் V எனவும் கிடைக்கூறுகள் H எனவும் குறிப்பிடப்படும். முதலில் தாங்கி எதிர் வினைகளைக் காண்போம்.

இணைப்பு A இல் $\Sigma M_A = 0$ என்பது

$$V_E \times 15 - 30 \times 3 - 75 \times 7 - 40 \times 4.5 - 60 \times 7 - 45 \times 11 = 0$$

எனவே,

$$V_E = 114 \text{ kN}$$

$$V_A = 30 + 75 + 60 + 45 - 114 = 96 \text{ kN}$$

$$H_A = -40 \text{ kN}$$

இணைப்பு A இல் சமனிலைச் சமன்பாடுகள்

$$3t_1 + 3t_2 - 40 = 0$$

$$4.5\,t_1 + 1.5\,t_2 + 96 = 0$$

தீர்வுகள் $t_1 = -38.66$, $t_2 = +52.0$

இணைப்பு B இல் சமனிலைச் சமன்பாடுகள்

$$-3\,t_1 + 4\,t_3 = 0$$

$$-4.5\,t_1 - 3\,t_3 - 30 = 0$$

$t_1 = -38.66$ என்பதனைப் பயன்படுத்தத்

தீர்வுகள் $t_3 = +48.0, \quad t_4 = -29$

இணைப்பு H இல் சமனிலை

$$-3t_2 + 4t_5 + 4t_6 = 0$$

$$-1.5t_2 + 3t_3 + 3t_5 = 0$$

முந்தைய t_1, t_2 முதலாய அளவுகளைப் பயன்படுத்தத்

தீர்வுகள் $t_5 = -22, \quad t_6 = +61$

இணைப்பு G இன் சமனிலையைப் பயன்படுத்தி

$$t_8 = t_6 = 61$$

$t_7 = 60$ என நோக்கிலேயே அறிந்துகொள்ளலாம்.

இணைப்பு C இன் சமனிலைச் சமன்பாடுகள்:

$$4t_4 - 4t_5 + 4t_{10} + 4t_9 = 0$$

$$-3t_5 - 3t_7 - 3t_9 - 75 = 0$$

தீர்வுகள் $t_9 = -23, \quad t_{10} = -28$

இணைப்பு D இன் சமனிலை

$$-4t_{10} + 4t_{12} + 40 = 0$$

$$-3t_{11} - 5t_{12} = 0$$

தீர்வுகள் $t_{11} = +63.33, \quad t_{12} = -38$

இணைப்பு E இன் சமனிலை:

$$-4t_{12} - 4t_{13} = 0$$

எனவே,

$$t_{13} = -t_{12} = +38 \, .$$

இதனுடன் நமக்கு வேண்டிய தேர்வுகள் கிடைத்துவிட்டன. எனினும், மீதியுள்ள மூன்று சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி ஏற்கனவே கிடைத்த விடைகளைச் சோதிக்கலாம்.

எ.கா. இணைப்பு E இல் y திசைச் சமனிலை

$$5t_{12} + 2t_{13} + 114 = 0$$

அஃதாவது $5 \times -38 + 2 \times 38 + + 114 = 0$ பொருந்துகிறது.

இணைப்பு F இன் சமனிலைச் சமன்பாடுகளையும் சோதிப்போம். அவை

(i) $4t_8 - 4t_9 + 4t_{13} = 0$

அஃதாவது $-4 \times 61 -4 \times (-23) + 4 \times 38 = 0$ பொருந்துகிறது.

(ii) $4xt_9 - 4xt_{13} + 4xt_{11} = 0$

$3 \times (-23) - 2 \times 38 + 3 \times 6.3.33 - 45 = 0$ பொருந்துகிறது.

இவற்றால் எல்லா உறுப்புகளின் நீள்விசைக் கெழுக்களும் கிடைத்து விட்டன. உறுப்புகளின் நீளங்களால் இவற்றைப் பெருக்கி, அக விசைகளைக் காணலாம். இவற்றைக் கீழே வரும் பட்டியற் காணலாம்.

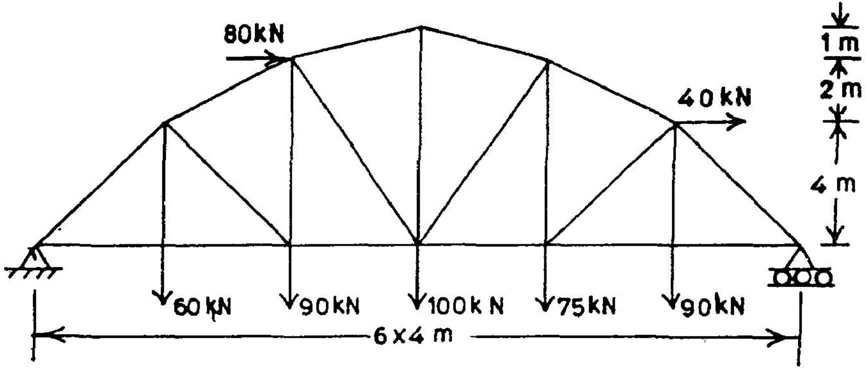
(தீர்வு தொடங்கு முன்னரே பட்டியலைத் தயாரித்து வைத்துக் கொண்டு அவ்வப்போது கிடைக்கும் விவரங்களை நிரப்பிக்கொண்டு வருதல் நல்லது).

உறுப்பு எண் k	இடை வீழல் x_k m	குத்து வீழல் y_k m	நீளம் $L_m = x^2k + y^2k$	நீள்விசை t_k	உறுப்புவிசை $T_k = t_k . L_k$ kN
1	3	4.5	5.408	− 38.66	− 209.09
2	3	1.5	3.354	+ 52.00	+ 174.41
3	0	3.0	3.000	+ 48.00	144.00
4	4	0	− 4.000	− 29.00	116.00
5	4	3.0	5.000	− 22.00	− 110.00
6	4	0	4.000	+ 61.00	244.00
7	0	3.0	3.000	20.00	60.00
8	4	0	4.000	+ 61.00	+ 244.00
9	4	3.0	5.000	− 23.00	− 115.00
10	4	0	4.000	− 28.00	+ 112.00
11	0	3.0	3.000	+ 63.00	+ 190.00
12	4	5.0	6.403	− 38.00	243.31
13	4	2.0	4.472	+ 38.00	+ 169.94

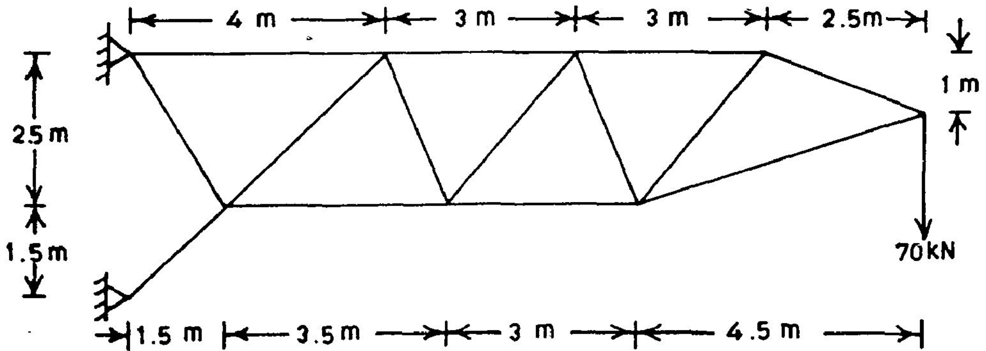
நீள்விசைக் கெழுமுறை மற்ற முறைகளைவிடச் சற்று எளிது என்பது தோன்றுகிறது. ஆனால், இருகணச் சட்டகங்களை ஆயும்போது இம்முறையில் சிறப்புத் தன்மை அவ்வள வாய்த் தெரிவதில்லை. முக்கணச் சட்டகங்களை (Three Dimensional Frames) ஆராயும்போது தான், நீள்விசைக் கெழு முறை மற்ற முறைகளைவிட எத்துணை சிறந்தது என்பது தெளிவாய்ப் புலப்படும். ஏனெனில், முக்கண இடவெளியில் கோணங்களை ஆய்ந்தறிவதைவிட, உறுப்பு களின் வீழல்களை எளிதிற் கண்டுபிடிக்க முடியுமன்றோ?

பயிற்சிகள்:

10.2 படங்கள் 10.21, 10.22 ஆகியவற்றில் காணும் கீல்ச் சட்டகங்களை நீள்விசைக்கெழு முறையில் ஆய்க.



படம் 10.21



படம் 10.22

10.6 வரைப்பட முறை (Graphical Method):

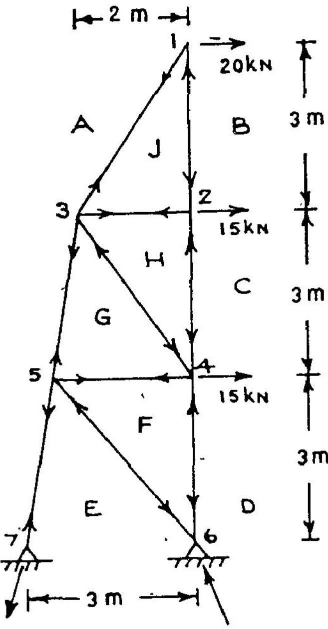
இந் நாளைப் போலன்றிக் கணக்கீட்டுக் கருவிகள் (Calculators) பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படாத காலங்களில் (1970ஆம் ஆண்டிற்கு முன்பு வரை) முந்தைய மூன்று முறைகளிலும் தீர்வு காண்பதற்குப் பெருமுயற்சிகள் தேவைப்பட்டபோது, வரைப்பட முறை ஒருசிறந்த மாற்றுமுறையாய்க் கையாளப்பட்டு வந்தது; மிக விரிவாய்க் கற்பிக்கப்பட்டும் வந்தது. ஆனால், தற்சமயம் அதனிற் சுமார் பத்திலொரு பங்கு முக்கியத்துவமே பெறுகிறது. இங்கு முறையை அறிமுகப்படுத்துதல் மட்டுமே இயலும். விரிவு வேண்டின் இதற்கெனத் தனி நூல்கள் உள்ளன. அவற்றை நோக்குக.

இம் முறையின் அடிப்படைக் கோட்பாடு, விசையியலில் நாம் கற்ற, விசைப் பலகோண விதி (Polygon Rule of Forces). ஒவ்வொரு விசையையும் வரைப்பட முறையில் குறிப்பிட விசையின் திசையில், அதன் அளவிற்கேற்ற விகிதத்தில் வரையப்படும் ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பயன்படுத்தலாம். அந் நேர்க்கோட்டில் விசையின் செயல்திசையில் அம்புக் குறி காட்டப்படும். ஒருபுள்ளியில் செயல்படும் விசைகள் அனைத்தும் சமனிலையில் இருப்பின், அவற்றை ஒவ்வொன்றாய், ஒருவிசையின் செயல் முனையில் அடுத்த விசை தொடங்கும்வண்ணம் வரைய, அவை ஒருபலகோணத்தின் பக்கங்களாய் விளங்கும் என்பதே இக் கோட்பாடு. இக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்திச் சட்டகங்களை ஆயும் முறையை எ.கா. 10.5 இல் நோக்குவோம்.

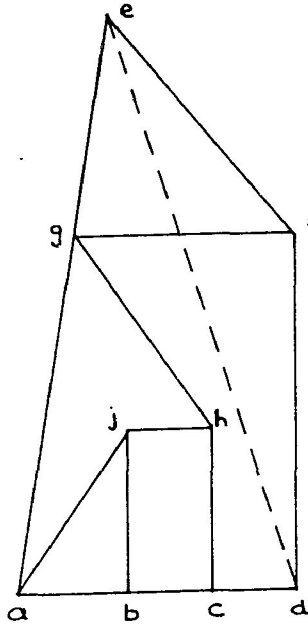
எ.கா. **10.5 :**

படம் 10.23 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகத்தை வரைப்படமுறையில் ஆய்வு செய்து உறுப்பு விசைகளைக் காண்க.

வரைபட முறையில் பயன்படும் ஒருமுக்கியக் கருத்து பவ் குறியீடு (Bow's Notation). சட்டகத்தையும் அதன்மீது செயல்படும் விசைகளின் திசைகளையும் குறிப்பிடும் முறையை இது வரையறுக்கிறது. படம் 10.23a ஐ நோக்குவோம். இங்குப் பத்து உறுப்புகள் கொண்டதொரு சட்டகம் காட்டப்பட்டுள்ளது. (உறுப்புகளின் அகவிசைகளைக் குறிக்கும் அம்புக் குறியீடுகள் தொடக்கத்தில் வரையப்படுவதில்லை, தீர்வின்போது அவை பெறப்படும்). இதில் செயல்படும் புறவிசைகளின் அளவுகளும் திசைகளும் நமக்குத் தெரியும். உறுப்புகளின் அகவிசைகளின் அளவுகள் தெரியாவிடினும் அவற்றின் செயல்கோடுகள் (Lines of action) நமக்குத் தெரியும். அவை உறுப்புகளின் அச்சுத் திசைகளே. தாங்கி எதிர்வினைகளின் செயல்முனைகள் மட்டுமே தெரியும். எனினும், அவற்றின் உத்தேச செயல்கோடுகள் இரண்டனைத் தொடர்ச்சியற்ற இரண்டு நேர்கோடுகளால் தற்காலிகமாய் குறித்துக் கொள்ளலாம். பவ் குறியீட்டு முறையில் மொத்தப் பரப்பினை விசைகளின் செயல்கோடுகள், பல சிறுபகுதிகளாய்ப் பிரிக்கின்றன. இப் பகுதிகளுக்குத் தனித்தனியே பெயரிட்டு (A,B,C.... என்னும் பெயர்கள்), இருபகுதிகளைப் பிரிக்கும் விசையை அப் பகுதிகளின் பெயர்களாலேயே குறிப்பிடுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாய்ச் சட்டகத்தின் உச்சியில் செயல்படும் 20kN விசை, பரப்புப் பகுதிகள் அல்லது புலங்கள் (Spaces), A, B இரண்டனையும் பிரிக்கிறது. அதனால் இவ் விசையை AB என அழைக்கலாம். படத்தில் J என்னும் புலத்தை நோக்குவோம். இணைப்புகள் 1, 3 இரண்டனையும் இணைக்கும் உறுப்பு



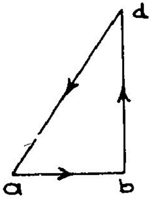
(a) புலப்படம்
Spacediagram 10mm = 1M



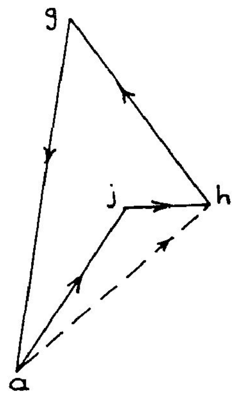
(b) விசைப்படம்
Vector Diagram 1mm = 1Kn

உறுப்பு	விசை kN
AJ	+36
BJ	−30
JH	+15
HC	−30
HG	−44
AG	+67
GF	+40
FD	−65
FE	−52
AE	+106
DE	+110

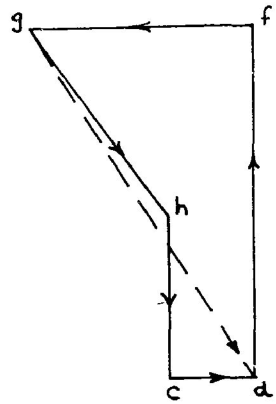
(c) விடைகள்



இணைப்பு 1ன் சமனிலை



(e) இணைப்பு 3ன் சமனிலை



(f) இணைப்பு 4ன் சமனிலை

படம் 10.23

இவ் வெளிகளைப் பிரிக்கிறது. அதனால், இவ் உறுப்பை AJ என்று குறிப்பிடலாம். இவ்வாறே மற்ற உறுப்புகளும் JB, JH முதலாய பெயர்களைப் பெறுகின்றன. இணைப்பு 6 இல் புலங்கள் D, E இரண்டனையும் பிரிப்பது தாங்கி எதிர்வினை. இது DE என்ற பெயர் பெறுகிறது. அவ்வாறே EA என்பது இணைப்பு 7 இன் தாங்கி எதிர்வினைக்குப் பெயராய்க் கொள்ளலாம். இங்கு ஒருகுழப்பம் உள்ளது. அஃதாவது E, A என்ற புலங்களுக்கிடையில் சட்டக உறுப்பு ஒன்றும் (75) உள்ளது. அதனால் நாம் ஒருமரபினைக் கையாளுவோம். ஒருபுள்ளியில் சந்திக்கும் விசைகளுக்குப் பெயரிட வேண்டுமெனில் அவை ஒவ்வொன்றும் பிரிக்கும் புலங்களின் பெயர்களைக் கடிகைச்சுழல் திசையில் (Clockwise Direction) குறிப்பிட வேண்டும். அம் மரபின் படி AE என்பது இணைப்பு 7 இல் உறுப்பின் அகவிசையையும், EA என்பது தாங்கி எதிர்வினை யையும் குறிக்கும் பெயர்களாகும்.

இனி விசைப் பலகோண விதியைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு இணைப்பின் சமனிலை யையும் ஆய்வதன்மூலம் உறுப்பு விசைகளைக் காண்போம்.

இணைப்பு 1 இன் சமனிலை:

இங்குச் செயல்படும் விசைகள் AB = 20 kN ; உறுப்பு விசைகள் BJ, JA காணப்பட வேண்டும். இவற்றின் திசைகள் தெரியும். அதனால் ஏதாவதொரு அளவீட்டில், AB ஐக் குறிப்போம். படம் 10.23.d இல் ab என இது குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் முனை b இலிருந்து விசை bj வரையப்பட வேண்டும். இதன் அளவு தெரியாது; ஆனால், செயல்கோடு (அல்லது பாதை) தெரியும். அனால், அதன் பாதையில் நேர்க்கோடு ஒன்று வரைவோம். அடுத்து, bj இன் செயல்முனை j இலிருந்து ja இன் பாதை தெரியும். இது a இல் சந்திக்க வேண்டுமாதலின் ja இலிருந்து a இன் பாதையில் ஒருநேர்க்கோடு வரைய, இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளியை bj இன் செயல்முனை j ஆகப் பெறுகிறோம். சமனிலை கருதி, ab, bj, ja என விசைக ளின் திசைகள் இருக்க வேண்டும் என அறிகிறோம். இனி, உறுப்பு விசைகளின் தன்மை காணவேண்டும். ab, bj, ja என்னும் மூன்று விசைகளும் இணைப்பு 1 இன்மீது செயல்படும் விசை கள். அதனால் இவற்றின் இணைப்பினை இழுக்கும்விசை (அஃதாவது இதன் அம்புக் குறி இணைப்பிலிருந்து விடுபட்டுச் செல்லும் போக்கில் இருக்கும்), உறுப்பில் நீள்விசையையும், இணைப்பினை அழுத்தும் விசை, (அஃதாவது இதன் அம்புக் குறி இணைப்பினை நோக்கிய போக்கில் இருக்கும்) உறுப்பில் இறுக்கவிசையையும் சுட்டும். அதனால், bj இறுக்கவிசை எனவும் ja நீள்விசை எனவும் அறிகிறோம். உறுப்புகளில் இவற்றைச் சுட்டும் அம்புக் குறிகளை இரு முனைகளிலும் குறித்து, விசைகளின் அளவுகளை அளந்து, தனியே பட்டியலில் காட்டுவது பெரும்பாலும் பின்பற்றப்படும் முறை. (படங்கள் 10.16_10.19) இல் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோல் உறுப்புகளின் மீதேகூட எழுதி விடலாம்).

இனி, உறுப்பு விசைகள் bj, ja என்பன இணைப்புகள் 2, 3 ஆகியவற்றை ஆயும்போது தெரிந்த விசைகள். (அங்கு இவை jb, aj என அழைக்கப்படும்) இணைப்பு 2 இன் சமனிலையைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறே உறுப்பு விசைகள் ch, hj காணப்படலாம். அடுத்து, இணைப்பு 3 இன் சமனிலையை நோக்குவோம். இங்கு aj, jh இரண்டும் தெரிந்த விசைகள். இவற்றை முதலில் வரைந்து கொள்வோம். (படம் 10.23.e). h இலிருந்து HG இன் பாதைக்கு இணையாய நேர்க் கோடு ஒன்றும், a இலிருந்து GA இன் பாதைக்கு இணையாய நேர்க்கோடு ஒன்றும் வரைந்து

இவை சந்திக்கும் புள்ளியை g எனக் குறித்து, நாற்கரம் ajhg ஐப் பெறுகிறோம். (தெரிந்த விசைகள் அனைத்தின் பயனிலையாய் ah ஐக் கொள்ள, தெரியாதவை இரண்டுதான் விஞ்சு மாதலின், இதனை ahg என்னும் விசை முக்கோணமாகவும் கருதலாம்).

புதிதாய்க் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட விசைகள் hg, ga. (விசைபடத்தில் திசைகளைக் கவன மாகக் குறிப்பிடுக.) hg, h இலிருந்து g ஐ நோக்கிய அம்புக் குறியாலும் ga, g இலிருந்து a ஐ நோக்கிய அம்புக் குறியாலும் குறிப்பிடப்பட வேண்டும். இவற்றில் hg இணைப்பினை நோக்கிய திசையிலும், ga இணைப்பிலிருந்து விடுபடும் திசையிலும் உள்ளன. அதனால், உறுப்பு HG இல் இறுக்கவிசையும், GA இல் நீள்விசையும் செயல்படுவதை அறிகிறோம். இதற்கேற்பப் புலப் படத்தில் அம்புக்குறிகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. இதே முறையில் இணைப்பு 4, 5 இவற்றுக்குரிய சமனிலைப் படங்கள் வரையலாம். (4 இன் சமனிலைப் படம் 10.23 f இல் காண்க) .

இவ்வாறு ஒவ்வொரு உறுப்பின் சமனிலையையும் குறிக்கும் விசைப் பலகோணங்களை வரைவதனால் உறுப்புகள் அனைத்தின் அகவிசைகளையும் காணமுடியும். ஆனால், இதற்குப் பதிலாய் இவையனைத்தையும் தொடர்ச்சியாய ஒரேவிசைப் படமாய் வரைதல் (படம் 10.23.b) மிக எளிது. இறுதியில் தாங்கி விசைகளாய de, ea இரண்டும் விசைப் படத்திலிருந்து கிடைக்கப் பெறலாம்.

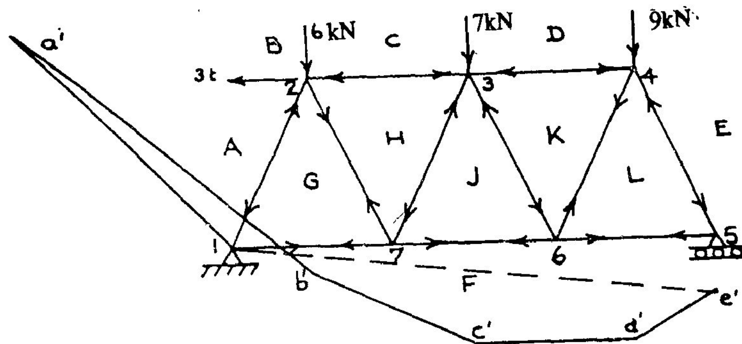
படம் 10.23 இல் காணப்பட்ட சட்டகத்தில் தெரியாத விசைகள் இரண்டே கொண்ட இணைப்பு ஒன்றிலிருந்து தொடங்கிப் படிப்படியாய எல்லா இணைப்புகளின் சமனிலை களையும் ஆராய முடிந்தது. ஆனால், பெரும்பாலாய சட்டக வகைகளில் தாங்கி எதிர்வினை களைக் கண்டறிந்த பின்னரே இணைப்புச் சமனிலையைப் பயன்படுத்த முடியும். தாங்கி எதிர் வினைகளையும் வரைவியல் முறையிலேயே கண்டு, உறுப்பு விசைகளுக்குத் தீர்வு காணும் முறைக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டுக் காண்போம்.

எ.கா. **10.6**

படம் 10.24 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகத்தின் உறுப்பு விசைகளை வரைவியல் முறையின் காண்க.

தீர்வு:

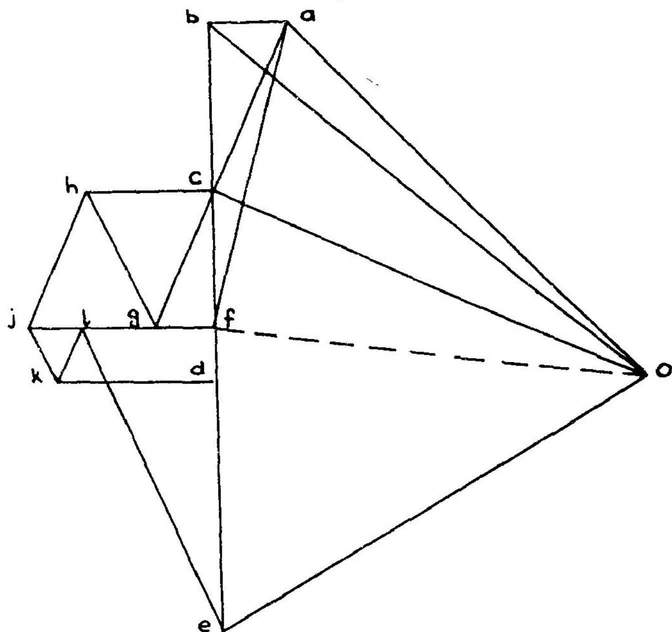
முதலில் தாங்கி எதிர்வினைகள் காணப்பட வேண்டும்; இதற்குச் சட்டகத்தின் திருப்புமை சமனிலையைப் பயன்படுத்த வேண்டும் என அறிவோம். செலுத்தப்படும் விசைகள் அனைத்துமே நேர்க்குத்துத் திசையில் இருப்பின், ஏதாவது ஒரு தாங்கியின் திருப்புமை சமனிலையைக் கருதலாம். ஆனால், கிடைத்திசையிலும் விசையிருப்பதால் தாங்கி எதிர்வினையின் திசை கீல்தாங்கியில் தெரியாது; உருளைத் தாங்கியில் தெரியும். அதனால், கீல்தாங்கி (Hinge அல்லது pin)யில் $\Sigma M = 0$ என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி உருளைத் தாங் கியின் எதிர்வினையை முதலிற் கண்டு, பின், விசைச் சமனிலையைக் கொண்டு கீல்தாங்கியின் எதிர்வினையைக் காணமுடியும். இவற்றை வரைவியல் முறையில் செய்யத் திருப்புமைப் பல கோணம் (Funicular polygon) பயன்படுகிறது. வரைமுறை வருமாறு:



(a) சட்டக அமைப்பு

உறுப்பு	நீள்விசை
AG	-12.3
GF	+ 2.2
GH	+ 5.6
HC	- 4.8
HJ	- 5.6
JF	+ 7.2
JK	- 2.4
KL	+ 2.4
DK	- 6
FL	+ 5
EL	-16

(c) விடைகள்



(b) விசைச் சமனிலைப் படம்

(d) தாங்கி எதிர் வினைகள் FA = 11kN EF = 11.4 kN

(மாக்ஸ்வெல் படம்)

படம் 10.24

1. முதலில் தெரிந்த புறவிசைகளை மட்டும் கொண்டு விசைப்படம் abcde (படம் 10.24.b) வரைந்து கொள்வோம்.

2. அடுத்து விசைப்படத்திலிருந்து சற்றுத் தொலைவில் முனைப்புள்ளி (pole) ஒன்றனைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இப் புள்ளியிலிருந்து விசைப் படத்தின் பல்வேறு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் oa, ob, oc, od, oe முதலாய கதிர்களை வரைந்து கொள்ள வேண்டும். இவற்றைப் புலக் கதிர்கள் என அழைப்போம். (விசைகள் EF, FA முதலியவற்றின் பாதைகள் தெரியுமெனில் of என்ற கதிரையும் வரையலாம்).

3. எல்லா விசைகளின் பாதைகளும் தெரிந்தால், ஏதாவதொரு விசையின் பாதையில் தொடங்கி, அடுத்துள்ள புலத்தில், அதன் புலக் கதிருக்கு இணையாய நேர்க்கோட்டை வரைய வேண்டும்.

4. இக் கதிர் புலத்தின் விளிம்பில், அஃதாவது அடுத்த விசையின் பாதையைத்தொடும் புள்ளியில், தொடங்கி, அடுத்த புலக் கதிர் வரையப்படவேண்டும்.

5. இவ்வாறு வரையப்பட்ட புலக் கதிர்கள் யாவும் சேர்ந்து ஒரு (முழுமையாய்) பலகோண உருவத்தில் அமைந்தால் மொத்தத்திருப்புமை $\Sigma M = 0$. (விளக்கம் வரைவியலில், வரைத் தொகுப்புப் (Graphical Integration) பகுதியில் காண்க.) இந் நிபந்தனையைப் பயன் படுத்தியே தாங்கி எதிர்வினைகள் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன.

இவ்வாறு வரையப்படும் பலகோணமே திருப்புமைப் பலகோணம் (Funicular polygon) என அழைக்கப்படுகிறது. இனிப் படத்தினை நோக்குவோம்.

எங்கிருந்து தொடங்குவது? நமக்குப் புறச் சுமைகளின் பாதைகளோடு, உருளைத் தாங்கியின் எதிர்வினையின் பாதையும் தெரியும். கீல்தாங்கி எதிர்வினையின் பாதை தெரியாவிட்டாலும், அஃது இணைப்பு 1 எனும் புள்ளி வழியே செல்லும் என்பது தெரியும். அதனால் இப் புள்ளியிலிருந்தே தொடங்குதல் எளிது.

6. புள்ளி 1 இலிருந்து புலக்கதிர் oa க்கு இணையாய், A என்ற புலத்தில் கதிர் வரையவேண் டும். இது விசை AB யின் பாதையைச் சந்திக்கும் புள்ளியை a′ எனக் குறிப்போம்.

7. a′ இலிருந்து புலக்கதிர் ob க்கு இணையாய் வரையப்படும் புலக் கதிர்விசை BC யின் பாதையைச் சந்திக்கும் புள்ளியை b′ எனக் கொள்வோம்.

8. b′ இலிருந்து தொடங்கி அவ்வாறே புலக்கதிர் oc க்கு இணையாய் வரைந்து, இக் கதிர் விசை CD இன் பாதையை வெட்டும் புள்ளியை c′ எனக் குறிப்போம். இவ்வாறே தொடர இறுதியாய்ப் புலக்கதிர் oe, விசை EF (தாங்கி எதிர்வினை) இன் பாதையை வெட்டும் புள்ளி e′ ஐ அடைவோம்.

9. இனி வரையப்படவேண்டிய ஒரே கதிர் of. இக் கதிருக்கு இணையாய் e′ இலிருந்து வரையப்படும் கோடு புள்ளி 1 இல் போய்ச் சேரவேண்டும். இக் கோட்டினை (e′1)

விடுபட்ட கோட்டால் வரைந்து கொள்வோம். இப்போது திருப்புமை பலகோணம் முழுமையடைகிறது. அதனால், e'1 என்பது உண்மையில் e'f' ஆதல் வேண்டும்.

10. விசைப்படத்தில் முனைப்புள்ளி o இலிருந்து e'f' க்கு இணையாய்ப் புலக் கதிர் வரைய, அது விசைப்படத்தில் ef இன் பாதையைச் (இது e இலிருந்து தொடங்கும் நேர்க்குத்துக் கோடென அறிவோம்) சந்திக்கும் புள்ளியே f ஆகும்.

இனி ef, தாங்கி 5 இல் எதிர்வினையையும் fa தாங்கி, 1 இல் எதிர்வினையையும் தருகின்றன.

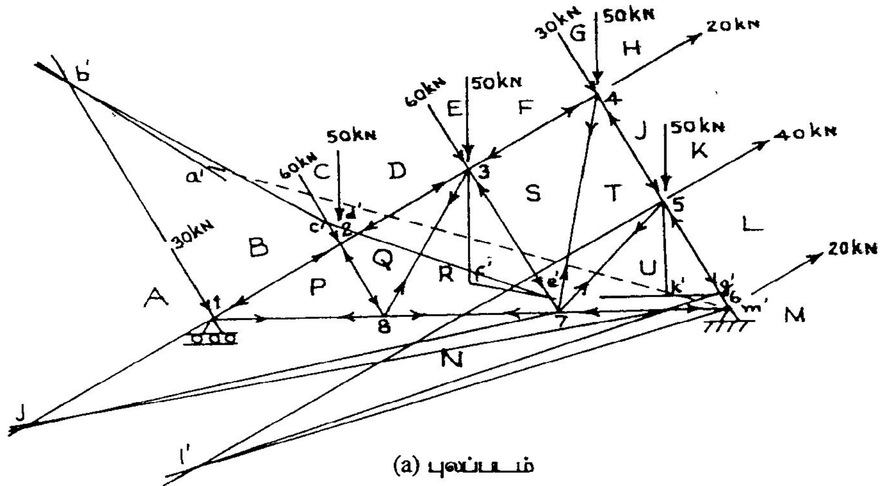
11. இப்போது புறவிசைகள் அனைத்தும் தெரிந்துவிட்டபடியால், ஏதாவதொரு தாங்கியில் தொடங்கி, ஒவ்வொரு இணைப்பின் விசைச் சமனிலையையும் வரைவியல் முறையில் (முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் விளக்கியுள்ளவாறே) ஆராய்ந்து, உறுப்புகள் அனைத்தின் அகவிசைகளையும் காணமுடியும்).

முழுமையான விசைப்படமும், விடைகளும் படங்கள் 10.24 b, c, இவற்றில் காணலாம். உறுப்பு விசைகளின் தன்மைகளும் 10.24. a இலேயே அம்புக் குறிகளால் சுட்டப் பட்டுள்ளன.

குறிப்பு: மொத்த விசைகளின் கிடைக்கூறு கீல் தாங்கியின் மீதுதான் செலுத்தப்பட வேண்டும், இக் கூறு தொடக்கத்திலேயே தெரியாவிட்டாலும், தெரிந்த விசைகளைக் கொண்டு மாக்ஸ்வெல் படம் (விசைப்படம்) வரைந்து முடித்தவுடன் தெரியும். அதனால், கீல் தாங்கி எதிர்வினையை இரண்டு விசைகளாய்க் கருதி, அவற்றுள் கிடைக்கூற்றினைத் தெரிந்த விசையாய்க் கொண்டு புலக் கதிர்கள் வரைந்தால் திருப்புமை பலகோணத்தை எங்கிருந்து வேண்டுமானாலும் தொடங்கலாம்

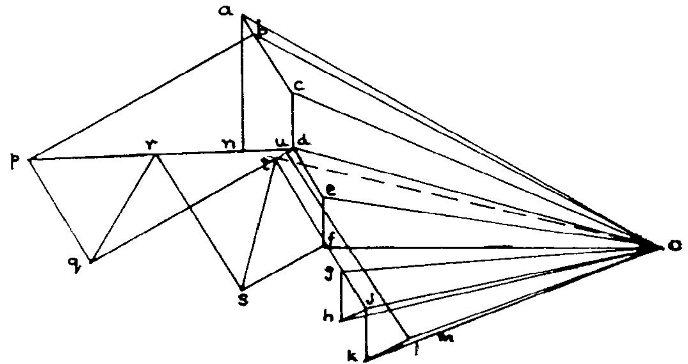
எ.கா. **10.7.**

காற்றினால் தோற்றுவிக்கப்படும் அழுத்தம் (Pressure), புடைப்பு விசைகள் (Suction forces) போன்றவை செலுத்தப்படும் முனைகளில் வெளி உறுப்புகளின் அச்சுகளுக்குச் செங்குத்தாய திசையில் செயல்படும். இத்தகைய விசைகள் செலுத்தப்படும் சட்டகம் ஒன்றனைப் படம் 10.25 இல் காணலாம். இத்தகைய சட்டகங்களை ஆய்தற்குரிய முறைகள் மேலே விவரிக்கப்பட்டவற்றினின்று சற்றும் மாறுபட்டனவல்ல. ஆனால், வரைவியல் முறையிலுள்ள சில இடர்பாடுகளைச் சுட்டுதற்காக இவ் எடுத்துக்காட்டு தரப்பட்டுள்ளது. சாய்ந்துள்ள விசைகள் செயல்படும் சட்டகங்களின் ஆய்வில் முனைப்புள்ளி O ஐத் தேர்ந்தெடுப்பதில் கூர்ந்த கவனம் செலுத்த வேண்டும். இல்லையேல் திருப்புமை பலகோணத்தின் பக்கங்கள் பெரிய வரைவு தாள்களிலும் அடங்காது நீண்டு செல்லலாம். சில புலக் கதிர்கள் அவை சந்திக்க வேண்டிய விசைப் பாதைகளுக்கு இணையாயமைந்தால், திருப்புமை பலகோணம் வரைதலே இயலாது போகலாம். படம் 10.25 இல் அத்தகைய நிலைகள் காணப்படவில்லை. ஏனெனில், அத்தகைய இடர்ப்பாடுகள் தந்த முனைப்புள்ளிகள் பல மாற்றப்பட்டுக் கடைசியாய்த் தக்கதொரு முனைப்புள்ளி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளது. (வேறு முனைப் புள்ளிகளைக்கொண்டு பயிற்சி செய்து நோக்குக). மேலும் இவையன்றிப்



(a) புலப்படம்

உறுப்பு	நீள் விசை
BP	– 302
PN	+ 260
PQ	– 120
DQ	– 280
QR	+ 130
RN	+ 85
RS	– 165
FS	– 90
ST	+ 135
JT	– 180
TU	+ 20
LU	– 230
NU	– 40



(b) விசைப் படம்

தாங்கி விசைகள் NA = 140 kN MN = 307 kN

படம் 10.25

புலக்கதிர்களுக்கு இணையாய பாதைகள், அஃதாவது பலகோணத்தின் அண்டைப் பக்கங்கள் (m′ l′, l′ k; k′ j′, j′ h′ முதலியன) ஏறத்தாழ இணைகோடுகளாய் விளங்குவதால் இவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிகளைத் துல்லியமாய் அடைதல் எளிதன்று. இதனால், பிழைகள் மலிய வாய்ப்பு மிகுதி. அதனால், செயல்படும் தெரிந்த விசைகள் எல்லாவற்றின் பயனிலையை (வரைவியல் முறையிலே) கண்டு, அதனை ஒரே விசையாய்க் கொள்ள மொத்தத்தில் விசைகளின் எண்ணிக்கையும் வரைவியல் சிக்கல்களும் மிகுதியாய்க் குறைந்துவிடும். இவ் எடுத்துக்காட்டில் ab, bd, df, fj, jl, lm என ஆறுவிசைகளை மட்டும் கொண்டு ஆய்வினைப் பயிற்சியாய் மேற் கொள்ளல் இக் கருத்தினைத் தெளிவு செய்யும்.

பயிற்சிகள்:

படங்கள் 10.8 முதல் 10.13 வரையுள்ள சட்டகங்களின் உறுப்பு விசைகளை வரைவியல் முறையிற் கண்டுபிடிக்க.

11. ஆற்றல் கோட்பாடுகள்
(Energy Principles)

11.1 முன்னுரை

ஆற்றல் பற்றிய பொதுவான கோட்பாடுகள் அடிப்படை விசையியலில் இடம் பெறுகின்றன. பொருள்வலிமை இயலில் இக் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்து முன்னர், இங்கு அடிப்படைக் கோட்பாடுகளைத் தொகுத்துரைப்போம்.

1. ஒருவிசை, அது செயல்படும் புள்ளியைத் தன் திசையில் இடம்பெயரச் செய்யும்போது, அது வேலை செய்கிறது எனக் கருதுகிறோம். இவ்வாறு செய்த வேலையின் அளவினை, விசையின் அளவு, இடம் பெயர்த்த தூரம் (விசையின் திசையில்) இரண்டன் பெருக்குத் தொகையாய் வரையறுக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாய் 1N விசை அது செயல்படும் புள்ளியை அதன் திசையில் 1m தூரம் இடம் பெயரச் செய்யும்போது, அது 1 mN அலகு வேலை செய்கிறது.

2. வேலை செய்தற்கு ஆற்றல் தேவை. இவ் ஆற்றலின் அளவும் வேலையின் அலகுகளாலேயே உரைக்கப்படுகிறது. அஃதாவது, 1 mN வேலை செய்தற்குத் தேவையான ஆற்றலின் அளவும் 1 mN.

3. ஆற்றல் பொருள்களில் நிலையாற்றல், இயக்க ஆற்றல், வெப்ப ஆற்றல் முதலாய பல்வேறு வடிவங்களில் தேக்கி வைக்கப்பட்டு, வேலை செய்யும் போது செலவாகின்றது. விரயம் இல்லாத அமைப்புகளிற் செய்யப்படும் வேலையின் அளவினதாகவே ஆற்றல் செலவாகிறது.

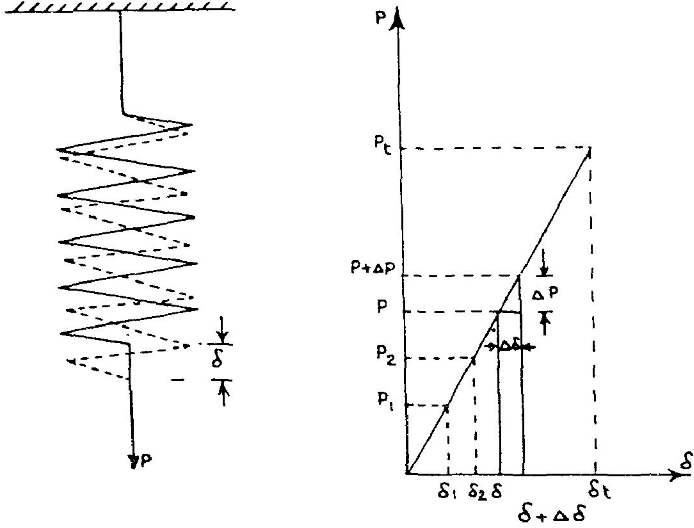
4. விரயமில்லாத ஆற்றல் செலவு என்பது, ஒரு பொருளினின்று செலவாகும் ஆற்றல் (ஆற்றல் குறைவு), மற்றொரு பொருளின் ஆற்றல் அதிகரிப்பாய் மாறலேயாகும். எடுத்துக்காட்டாய், 1 லிட்டர் நீரை 10 மீட்டர் உயரத்திற்கு இறைக்கச் செலவாகும் ஆற்றல் 98.1 mN எனில், இறைக்கப்படும் நீரின் நிலையாற்றல் 98.1 mN அளவிற்குக் கூடுகிறது.

மேற்கண்ட பொதுவாய கோட்பாடுகளிலிருந்து, நாம் மீள்மைப் பண்பு கொண்ட திண்மங்களின் ஆற்றல் மாறுபாடுகள் பற்றிய கோட்பாடுகளையும், பொருள் வலிமையியலில் இவற்றின் பயன்களையும் கற்போம்.

11.2 விகல ஆற்றல் (Strain Energy)

மீள்மைப் பண்பு கொண்ட திண்மங்களின்மீது விசைகள் செலுத்தப்படும்போது திண்மத்தின் நலிவுகளால், விசைகளின் செயல் முனைகள் இடப் பெயர்ச்சியடைதலையொட்டி, இவ் விசைகள் வேலை செய்கின்றன என உணரலாம். இவ்வேலை பயன்படும் விதத்தை விளங்கிக்கொள்ள முதலில் ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டினைக் காண்போம்.

படம் 11.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ள சுருள்வலயவில் (Helical Spring) ஒன்றன் மீது P அளவு விசை செயல்படும்போது தோன்றும் நீட்சி, δ எனக் கொள்வோம். இவ்விடப் பெயர்ச்சியின்போது, விசை P வேலை செய்கிறது. இதனால் செலவாகும் ஆற்றல் விரயமாவதில்லை ; வில்லில் சேமித்து வைக்கப்படுகிறது. வில்லின் நீட்சி நீங்கும்போது, இவ்வாற்றல் வெளியிடப்பட்டு வேலை செய்யப் பயன்படுகிறது. அஃதாவது, வில் விகலமடையும்போது சேமித்து வைக்கப்படும் ஆற்றல், விகலம் நீங்கும்போது வெளிப்படுகிறது. அதனால் இதனை விகல ஆற்றல் (Strain Energy) என அழைக்கிறோம். இனி இதன் அளவினை நோக்குவோம்.



படம் 11.1

இவ் அமைப்பில் விசை P செய்யும் வேலையின் அளவினை P . δ எனக் கணக்கிட்டுவிட முடியாது. ஏனெனில், δ என்னும் இடப்பெயர்ச்சியைத் தோற்றுவிக்கும் விசை P முழுமையும் தொடக்கத்திலிருந்தே செயல்படுவதில்லை. விசையின் அளவினையொட்டி, விசையுடன் கூடவேதான் நீட்சியின் அளவும் மிகுந்துள்ளது. இதனைப் படம் 11.1 (b) விளக்குகிறது. மொத்த விசை P_3 தோற்றுவிக்கும் நீட்சி $δ_3$ எனில், இடையே அதன் சிறுபகுதிகளாய P_1, P_2 முதலாய

அளவு விசைகளால் தோற்றுவிக்கப்படும் நீட்சிகள் δ_1, δ_2 எனக் கொள்வோம். விசையின் அளவு P_1 ஐ எட்டும் போது, தோற்றுவிக்கப்பட்டுள்ள நீட்சி δ_1, எனில், விசை P_2 ஐ எட்டுதற்குச் செலுத்தப்படும் கூடுதல் விசை $(P_2 - P_1)$ இடப்பெயர்ச்சி δ_1 இன்போது வேலை செய்திருக்க இயலாது. அடுத்து கூடுதல் இடப்பெயர்ச்சியாய $(\delta_2 - \delta_1)$ நடைபெறும் போது, விசை P_1 முழுமையாய் $P_1(\delta_2 - \delta_1)$ அளவு வேலை செய்கிறது. ஆனால், இவ் இடப் பெயர்ச்சியின் போது $(P_2 - P_1)$ தொடக்கத்திலிருந்தே முழுமையாய் தோற்றுவிக்கப்படவில்லையாகலின், இது முழுவேலை செய்தல் இயலாது. அதனால், செய்யப்படும் வேலையின் அளவினைச் சராசரி விசை × மொத்த இடப் பெயர்ச்சி என்று கணக்கிடலாம். அஃதாவது,

$$\text{செய்யப்பட்ட வேலை} = \frac{P}{2} \cdot \delta = \frac{1}{2} P \delta$$

விசைச் செயல்பாட்டின் சராசரித் தன்மையை நுண்கணித முறையாலும் விளக்க முடியும். பொருள் மீட்சி எல்லைக்குள் இருப்பதால் விசையும் நீட்சியும் நேர்விகித உறவு கொண்டிருக்க வேண்டும்.

$$\text{அஃதாவது,} \quad P = k \, . \, \delta \qquad (11.1)$$

இங்கு k என்பது ஒரு மாறிலி (constant),

மொத்த விசையாய, P_t யில் ஒரு பகுதியான விசை P செலுத்தி, அதன் விளைவாய் நீட்சி தோற்றுவிக்கப்பட்ட நிலையில், வில்லின் தொடர்ந்த விளைவுகளை நோக்குவோம். விசையின் அளவினை ΔP என்னும் மிகச் சிறிதளவு கூட்டுவோம். இதனால், தோன்றும் கூடுதல் நீட்சியை (இதுவும் மிகச் சிறிதளவினதே), $d\delta$ என்போம். இந் நீட்சி $\Delta \delta$ இன் தொடக்கத்திலிருந்தே விசை P செயல்படுவதால் விசை P இக் கட்டத்தில் செய்யும் வேலையின் அளவு $P \, . \, d\delta$ என்பதில் ஐயமில்லை. கூடுதல் விசையாய dP செய்யும் வேலையின் அளவு $dP \, . \, d\delta$ என்னும் பெருக்குத் தொகையைவிடக் குறைவாகவே இருக்க வேண்டும். (முழுவிசையும் தொடக்கத்திலிருந்தே செயல்படுவதில்லை என்பதால்). இவ் அளவு மிகமிகச் சிறிதே ஆதலின், இதனைப் புறக்கணிப்பதால் விளையும் பிழை மிகச் சிறிதே. (அஃதாவது, இப் பிழை புறக்கணிக்கத்தக்க அளவிற் சிறிதாக dP, $d\delta$ ஆகியவற்றின் அளவுகளைக் கொள்ள வேண்டும்.

அதனால், கூடுதல் விசை dP செயல்படும் போது செய்யப்படும் வேலை

$$dW = P \, . \, d\delta \qquad (11.2)$$

இனிச் சமன்பாடு 11.1 ஐப் பயன்படுத்தி,

$$dP = k \, d\delta$$

$$\text{என உரைக்கின்,} \quad dW = P \frac{dP}{k} \qquad (11.3)$$

dP மிகச் சிறிதெனில், வேலையின் அளவு dW வும் அவ்வாறே மிகச் சிறிதாதல் வேண்டும். அதனால்,

$$dW = \frac{1}{k} P\,dP \qquad (11.4)$$

என உரைக்கலாம். விசையின் அளவு P_t ஐ எட்டும்வரை செய்யப்படும் மொத்த வேலை,

$$W = \int_0^{P_t} dW = \int_0^{P_t} \frac{PdP}{k} \qquad (11.5)$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{P^2}{2}\right)_0^{P_t}$$

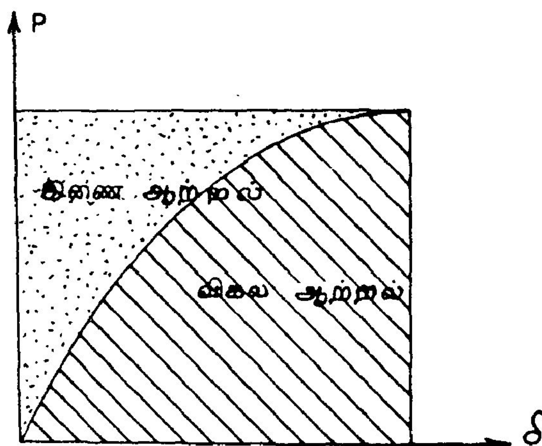
$$= \frac{P_t^2}{2k} = \frac{1}{2} P_t \cdot \frac{P_t}{k}$$

$\frac{P_t}{k} = \delta_t$ ஆதலின்

மொத்த வேலை $= \frac{1}{2} P_t \cdot \delta_t$ (11.6)

பொதுவாய்,

வேலை $W = \frac{P \cdot \delta}{2}$ (11.7)



படம் 11.2

இவ் வேலையே பொருளில் விகல ஆற்றலாய் சேமிக்கப்படுவதால் விகல ஆற்றல் $= \frac{P\delta}{2}$ எனவும் குறிப்பிடலாம். விகல ஆற்றல் U என்னும் குறியீட்டால் குறிப்பிடப்படும். சமன்பாடு 11.5 இல் காணப்படும் தொகையம் $P - \delta$ வரையில் கீழடங்கிய பரப்பளவு என்பதனை உணரலாம். $P - \delta$ உறவு நேர் விகிதத்தில் இல்லாதபோது சமன்பாடு (11.2)ஐயே தொகைப்படுத்தி,

$$U = \int P\,d\delta \qquad (11.8)$$

என உரைக்கலாம்.

இனி, P, δ இரண்டனையும் பக்கங்களாய்க் கொண்டு வரையப்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பு $P \cdot \delta$ இலிருந்து விகல ஆற்றல் U ஐக் கழிக்க $P - \delta$ வரைக்கு மேலுள்ள பரப்புக் கிடைக்கும். இதனை இணையாற்றல் (Complementary Energy) என அழைக்கிறோம்.

இணையாற்றல் $C = \int \delta \, . \, dP$ (11.9)

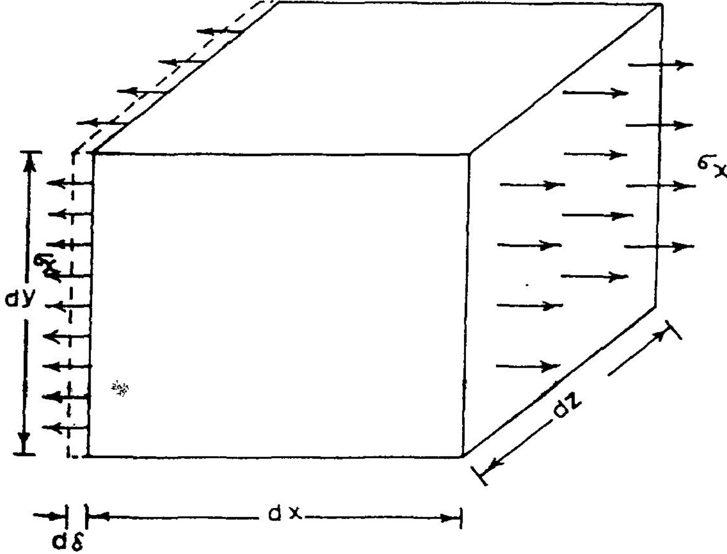
எனக் கணக்கிடப்படுகிறது

$P - \delta$ உறவு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்போது

$$U = C = \frac{1}{2} P\delta$$ என்பது தெளிவு.

11.3 விகல ஆற்றல் செறிவு (Strain Energy Density)

கடந்த பகுதி (11.2) இல் நாம் விகல ஆற்றலை நேரடியாய்க் கணக்கிடவில்லை. புறவிசை P செய்த வேலையின் அளவினையே கணக்கிட்டோம். இவ் வேலை செய்யச் செலவாய ஆற்றலே விகல ஆற்றலாய்ச் சேமிக்கப்படுவதால் இஃது அளவில் விகல ஆற்றலைக் குறிப்பிடுகிறதெனில், பிழையாகாது. இனி, விகல ஆற்றலை நேரடியாகவே கணக்கிடுதற்குரிய கோவைகளை நிறுவுவோம்.



நீள் நீள் தகைவுக்குட்பட்ட தெரு திண்மத் துணுக்கு

படம் 11.3

புறவிசைகள் செலுத்தப்பட்டதொரு திண்மத்தில் நீள, உயர, அகலங்கள் முறையே dx, dy, dz கொண்டதொரு மிகச்சிறிய துணுக்கினை நோக்குவோம்.

(துணுக்கு மிகச் சிறிதாயிருப்பின், அதனுள் தகைவின் அளவு மாற்றங்கள் மிகக் குறைவாயிருக்குமாதலின், தகைவினை நிலையானதாகவே கொள்ள முடியும்). இத்துணுக்கில் x திசையில் மட்டும் நீள் தகைவு σ_x செயல்படுவதாகக் கொள்வோம். இதனால், x திசையில் தோற்றுவிக்கப்படும் விகலம் ε_x எனக் கொள்வோம். (y, z திசையிலும் விகலங்கள் தோற்று விக்கப்படும்; ஆனால் இதனால் தோன்றும் இடப்பெயர்ச்சிகள் விசைக்குச் செங்குத்தாயிருக்கு மாதலால் இவ் இடப்பெயர்ச்சிகளால் வேலை செய்யப்படுவதில்லை).

துணுக்கின் மீது மொத்த அகவிசை = தகைவு × செலுத்தப்படும் பரப்பு

அதாவது,

$$dP = \sigma_x \, . \, dy \, . \, dz$$

$\sigma_x \, . \, dy \, . \, dz$ என்பது அகவிசையாகலின், இது செய்யும் வேலையைக் கணக்கிட்டு நேரடியாய் விகல ஆற்றலைப் பெற முடியும்.

x திசையில் இடப்பெயர்ச்சி, $d\,\delta = dx \, . \, \varepsilon_x$

சமன்பாடு 11.7 ஐப் பயன்படுத்த துணுக்கினுள் சேகரிக்கப்படும்

விகல ஆற்றல், $$dU = \frac{1}{2}\, dP \times d\,\delta$$

அல்லது, $$dU = \frac{1}{2}\, \sigma_x \, dy \, . \, dz \, . \, dx \, . \, \varepsilon_x \qquad (11.10)$$

இதில், dx.dy.dz என்பது, துணுக்கின் கன அளவு, dV என உரைக்க.

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \, \varepsilon_x \, dV \qquad (11.11)$$

என உரைக்கலாம்.

dU ஐ துணுக்கின் கனஅளவு dV ஆல் வகுக்க,

விகல ஆற்றல் செறிவு, $$u = \frac{1}{2}\, \sigma_x \, . \, \varepsilon_x \qquad (11.12)$$

என உரைத்து.

மொத்த விகல ஆற்றல் $$U = \int_V u.dV = \int = \int_V \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \, dV \qquad (11.13)$$

என உரைக்கலாம்.

சமன்பாடு 11.13 இன் வடிவம், σ_y, σ_z ஆகிய தகைவுக் கூறுகளுக்கும் பொருந்தும் என்பதை உணரலாம்.

σ_x, σ_y அல்லது σ_y மட்டும் தனியே செயல்படும்போது,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

என்னும் உறவுகளைப் பயன்படுத்தி,

$$U = \int_v \frac{\sigma_x^2}{2E} \, dV \qquad (11.14)$$

என்பன போன்ற உறவுகளை நிறுவலாம்.

அவ்வாறே, $$C = \int_v \frac{E\,\varepsilon_x^2}{2} \, dV \qquad (11.15)$$

முதலாய, இணை ஆற்றலுக்குரிய கோவைகளையும் நிறுவலாம்.

(σ_x அல்லாத பிற தகைவுக் கூறுகள் இருப்பினும σ_x செய்யும் வேலையின் அளவினைச் சமன்பாடு 11.13 இலிருந்து பெற முடியும். ஆனால் ε_x இன் மதிப்பு, σ_x ஐ அன்றிப் பிற தகைவுக் கூறுகளையும் சார்ந்திருக்குமாதலால், ε_x என்பது x திசையில் மொத்த விகலமாய் உரைக்கப்பட வேண்டும்.

அஃதாவது,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad (11.16)$$

என்பன போன்ற கோவைகளைப் பயன்படுத்தி,

ε_y, ε_z முதலிய விகலங்களுக்குச் சரியான கோவைகளுடன்,

மொத்த விகல ஆற்றல், $$U = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots \qquad (11.17)$$

என உரைக்கலாம்.

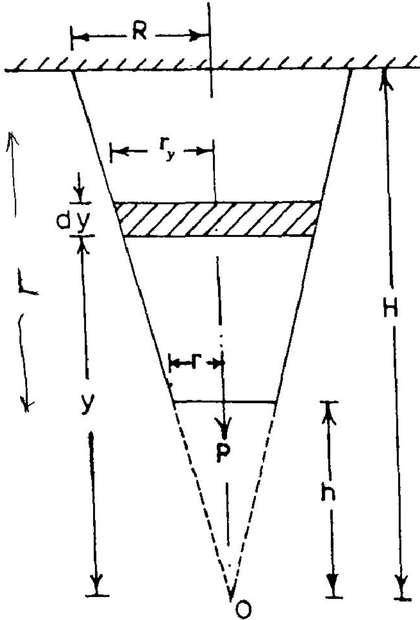
தகைவு மீட்சி எல்லைக்குள் இருக்கும்போது புறவிசைகள் செய்யும் மொத்த வேலையும், திண்மத்தினுள் சேமிக்கப்படும் மொத்த விகல ஆற்றலுக்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும். இக் கோட்பாட்டின் பயனுக்கு ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டுக் காண்போம்.

எ.கா. 11.1

படம் 11.4 இல் காட்டப்பட்டுள்ள குறைக்கூம்பின் மொத்த நீளம் H, தாங்கப்படும் முனையில் ஆரம் R, விசை செலுத்து முனையில் ஆரம் r மீள்மைக் கெழு E எனில், புறவிசை P ஆல் தோற்றுவிக்கப்படும் நீட்சியைக் காண்க.

தீர்வு :

குறைக் கூம்பினை நீட்டிக் கூம்பின் உச்சி O ஐப் பெற்று, O ஐ ஆய மையமாகக் கொள்ளின், எளிய கோவைகளைப் பெறலாம். O இலிருந்து விசை செலுத்து முனையின் தூரம் h எனவும், தாங்கியின் தூரம் H எனவும் கொள்வோம். O இலிருந்து y தொலைவில் உள்ள dy தடிப்புக் கொண்டதொரு மெல்லிய தட்டினைக் கருதுவோம். தடிப்பு dy மிகச் சிறிதெனில், தட்டினைச் சீரான ஆரங்கொண்ட உருளை (Cylinder) யாய்க் கருதலாம்.



படம் 11.4

சிறுஉருளையின் ஆரம் $r_y = \frac{R}{H} y$

சிறுஉருளையின் வெட்டுமுகப் பரப்பு $= \pi r_y^2$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2} y^2$$

சிறுஉருளையின் கன அளவு $= \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot y^2 \cdot dy$

உருளையில் தகைவு $\sigma = \frac{P}{\frac{\pi R^2 y^2}{H^2}}$

உருளையில் விகல ஆற்றல் செறிவு, $u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{P^2}{2E\left(\frac{\pi R^2 y^2}{H^2}\right)^2}$

உருளையில் மொத்த விகல ஆற்றல், $dU = u.dV$

$$= u.A.dy$$

$$= \frac{P^2}{2E\left(\frac{\pi R^2 y^2}{H^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{\pi R^2 y^2}{H^2}\right) dy$$

$$dU = \frac{P^2 H^2}{2E \pi R^2 y^2} dy$$

குறைக் கூம்பில் மொத்த விகல ஆற்றல்,

$$U = \int_V dU = \int_h^H \frac{P^2 H^2}{2E \pi R^2 y^2} dy$$

$$= \frac{P^2 H^2}{2E \pi R^2} \int_h^H \frac{dy}{y^2} = \frac{P^2 H^2}{2E \pi R^2} \left(-\frac{1}{y}\right)_h^H$$

$$= \frac{P^2 H^2}{2E \pi R^2} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{H}\right)$$

$$U = \frac{P^2 H^2 (H-h)}{2E \pi R^2 \; H.h}$$

$$= \frac{P^2 H (H-h)}{2E \pi R^2 h}$$

கூம்பின் வடிவியலில் இருந்து

$\frac{H}{h} = \frac{R}{r}$ என உரைக்கின்,

$$U = \frac{P^2 R (H-h)}{2E \pi R^2 r}$$

$$U = \frac{P^2 L}{2E \pi R r}$$

புறவிசை P செய்யும் வேலை $W = \frac{P\delta}{2}$

$$W = U \text{ எனில்}$$

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{PPL}{2E\pi Pr}$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{PL}{E\pi Rr} \qquad (11.18)$$

(மாற்று முறையில் δ வைப், பயிற்சியாய்ச் செய்து காண்க).

பயிற்சி 11.1

படங்கள், 3.11, 3.12, 3.13 ஆகியவற்றில் காணப்படும் திண்மங்களின் நீட்சிகளை ஆற்றல் கோட்பாடுகளின் அடிப்படையில் கணக்கிடுக.

11.4 நறுக்கத்தில் விகல ஆற்றல் (Strain Energy in Shear)

சமன்பாடுகள் 11.12, 11.14 ஆகியன, அச்சுத் தகைவுகளுக்குட்பட்டுள்ளதொரு திண்மத்தில் சேமிக்கப்படும், விகல ஆற்றலின் செறிவு, மொத்த விகல ஆற்றல் ஆகியவற்றைத் தருகின்றன. இனி, நறுக்குத் தகைவுகள் செலுத்தப்படும் திண்மம் ஒன்றனில் சேகரிக்கப்படும் விகல ஆற்றலின் அளவீடுகளை நோக்குவோம்.

படம் 11.5 இல் நறுக்குத் தகைவுகள் τ_{xy}, τ_{yx} செலுத்தப்பட்டிருக்கும் திண்மத்தினுள், dx, dy, dz முறையே நீள, உயர, அகலங்களாய்க் கொண்டதொரு துணுக்கின் படம் தரப் பட்டுள்ளது. இத் துணுக்கின் நலிவுகளும் (Deformations) விகலங்களும் காட்டப்பட்டுள்ளன. (தளம் ABCD எவ்விதப் பெயர்ச்சியும் அடைவதாய்க் காட்டப்படவில்லை; எனினும், இத் தளத்தில் பெயர்ச்சிகள் இருப்பின் அவற்றுக்கேற்பத் தளம் AEHD யின் பெயர்ச்சிகள் குறைந்து விடுமாதலின், விளைவுகளில் மாற்றமிராது.

செயல்படும் விசைகள்,

$$dF_x = \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz,$$

$$dF_y = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$$

ஆனால்,

τ_{xy} இன் திசைக்குச் செங்குத்தாகவே பெயர்ச்சிகள் இருப்பதால் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள நலிவுகளின் போது dF_y வேலையேதும் செய்வதில்லை. அதனால், dF_x ஒன்றே, வேலை செய்யும் விசை எனக் காண்கிறோம்.

$$dF_x = \tau_{yx} . dx . dx$$

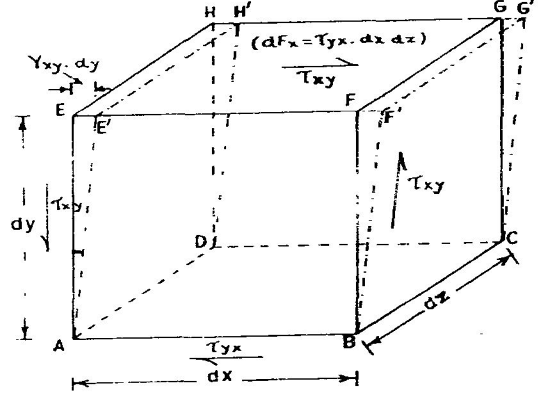
இதன் திசையில்
இடப்பெயர்ச்சி $= \gamma_{xy} . dy$

$\therefore dF_x$ செய்யும் வேலை
(துணுக்கு ABCDEFGH இல்
சேகரிக்கப்படும் விகல ஆற்றல்)

$$= \frac{d F_x}{2} . \gamma_{xy} dy$$

$$= \frac{\tau_{xy}}{2} \gamma_{xy} . dx . dy . dz.$$

$$= \frac{\tau_{xy} . \gamma_{xy}}{2} dV$$



படம் 11.5

விகல ஆற்றல் செறிவு $= \frac{\tau_{xy} . \gamma_{xy}}{2}$ (11.19)

தகைவுகள் மீட்சி எல்லைக்குள் இருப்பின்,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$ என உரைக்க,

விகல ஆற்றல் செறிவு $U = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$ (11.20)

மொத்த விகல ஆற்றல் $U = \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV$ (11.21)

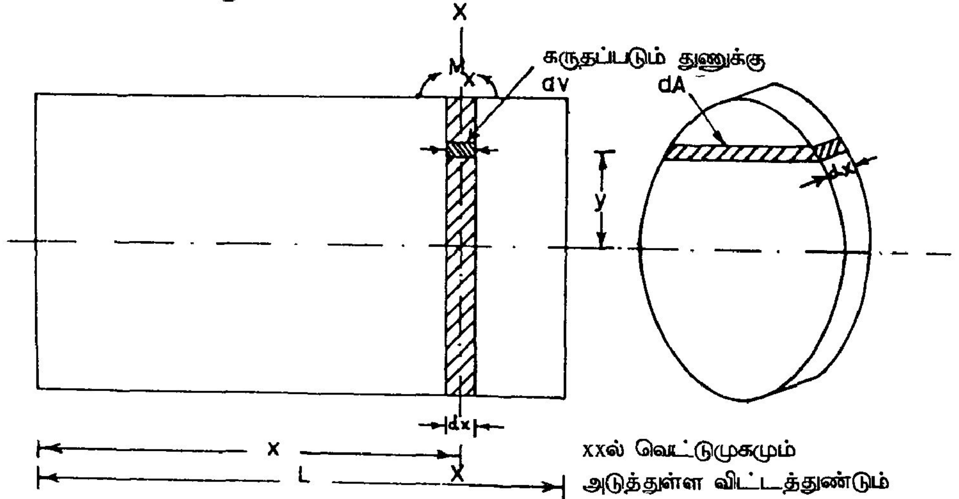
எனப் பெறுகிறோம்.

11.5 வளைதலில் விகல ஆற்றல் (Strain Energy in Bending)

ஒரு விட்டம் வளையும்போது வளை திருப்புமையால் அச்சுத் தகைவுகளே தோற்று விக்கப்படுகின்றன் எனக் கண்டோம். இனி, விட்ட வளைதலில் விகல ஆற்றலைக் காணல் மிக எளிது.

படம் 11.6 இல், நீளம் L கொண்டதொரு விட்டமும், ஆய மையத்திலிருந்து x தொலைவில் உள்ள xx என்ற வெட்டுமுகமும் காட்டப்பட்டுள்ளன. xx ஐச் சூழ்ந்துள்ள dx

நீளமுள்ள சிறுவிட்டத் துண்டில், குறுக்குப் பரப்பு dA கொண்டதொரு சிறு துணுக்கில் சேகரிக்கப்படும் விகல ஆற்றலை நோக்குவோம்.



6 வளைதலில் விகல ஆற்றல்

படம் 11.6

விகல ஆற்றல் செறிவு $= \dfrac{\sigma_x^2}{2E}$

எனவே, துணுக்கில் விகல ஆற்றல் $= \dfrac{\sigma_x^2}{2E}\, dV$

xx என்னும் வெட்டுமுகத்தில் உறழ்திருப்புமை I_x எனவும் இங்குச் செயல்படும் திருப்புமை M_x எனவும், பரப்பு d A தகைவில் அச்சிலிருந்து y தொலைவில் உள்ளதெனவும் கொள்ள,

dA இன்மீது அச்சுத் தகைவு $\sigma_x = \dfrac{M_x}{I_x}\, y$

எனவே, துணுக்கில் விகல ஆற்றல் செறிவு $= \left(\dfrac{M_x\, y}{I_x}\right)^2 \dfrac{1}{2E}$

துணுக்கின் கனஅளவு $dV = dx.dA$

எனவே மொத்த விகல ஆற்றல் $U = \int_v \dfrac{\sigma_x^2}{2E}\, dV$

$$U = \int_{O}^{L} \int_{A} \frac{M_x^2\, y^2}{I_x^2\, 2E}\, dA.dx \qquad (11.22)$$

சமன்பாடு 11.22இல் M_x, I_x, E முதலியன வெட்டுமுகத்தைப் பொறுத்தவரை மாறிலிகள்; ஆனால், நீளப்போக்கில் இவற்றில் மாற்றமிருக்கலாம். அதனால், இச் சமன்பாட்டினை

$$U = \int_{O}^{L} \frac{M_x^2 dx}{2E\, I_x^2} \int_{A} y^2\, dA \qquad (11.23)$$

என உரைத்து, $\int_{A} y^2\, dA$ = வெட்டுமுகத்தில் உறழ்திருப்புமை I_x எனக் காண,

விட்டத்தில் விகல ஆற்றல் $$U = \int_{O}^{L} \frac{M_x^2}{2(EI)_x}\, dx \qquad (11.24)$$

விட்டங்களில் செயல்படும் நறுக்கு விசையின் அளவுகள் Q_x என x இன் சார்பலனாய்க் கொடுக்கப்படின், படம் 11.6 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத் துணுக்கில் தோற்றுவிக்கப்படும் நறுக்குத் தகைவு,

$$\tau = \frac{Q_x}{I_x}\left(\frac{A\,\bar{y}}{b}\right)$$

விகல ஆற்றல் செறிவு $$= \frac{\tau^2}{2G} = \frac{Q_x^2}{2G\,.\,I_x^2}\left(\frac{A\,\bar{y}}{b}\right)^2$$

அதனால், விட்டத்தில் மொத்த விகல ஆற்றல்,

$$U = \int_{v} \frac{\tau^2}{2G}\, dv = \int \int \frac{Q_x^2}{2G\, I_x^2}\left(\frac{A\,\bar{y}}{b}\right) dx.dA$$

$$U = \int_{o}^{L} \frac{Q_x^2}{2GI_x^2} \cdot dx \int_{A} \left(\frac{A\,\bar{y}}{b}\right)^2 dA \qquad (11.25)$$

வளைதிருப்புமையால் சேமிக்கப்படும் விகல ஆற்றலைப் போன்று 11.25-க்குப் பொதுவாய வடிவத்தைக் கொடுத்தல் இயலாது. $\int_A \left(\frac{A\bar{y}}{b}\right)^2 dA$ ஐ வெட்டுமுகப் பண்புகள் தெரிந்தால் மட்டுமே கணக்கிட இயலும். எடுத்துக்காட்டாய், அகலம் b, உயரம் h கொண்டதொரு செவ்வக வெட்டுமுகம் கொண்ட விட்டத்தில், தகைவில் அச்சிலிருந்து y தொலைவில் உள்ள தளத்தில்,

$$A = b\left(\frac{h}{2} - y\right)$$

$$\bar{y} = y + \frac{\left(\frac{h}{2} - y\right)}{2} = \frac{\left(\frac{h}{2} + y\right)}{2}$$

$$\frac{A\bar{y}}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\int \frac{(A\bar{y})^2}{b}\, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\right\}^2 b\,dy$$

$$= \frac{b}{4}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 y^2}{2} + y^4\right) dy$$

$$= \frac{b}{4}\left\{\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^3}{6} + \frac{h^5}{5}\right\} = \frac{b\,h^5}{120} = \frac{I\,h^2}{10}$$

$$U = \int_0^L \frac{Q_x^2}{2\,G\,I_x^2} \cdot \frac{I_x\,h^2}{10}\, dx = \int_0^L \frac{Q_x^2\,h^2}{20\,G\,I_x}$$

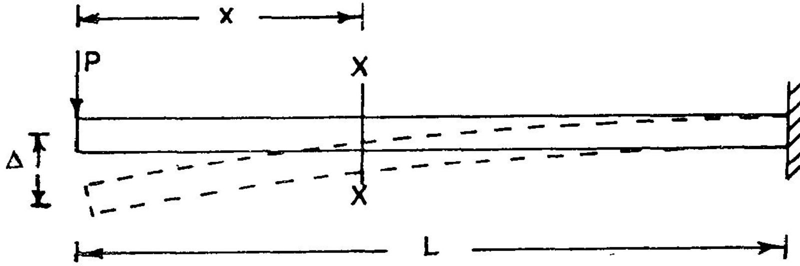
$$\because \quad I_x = \frac{1}{12}\, b\,h^3 = b\,h \cdot \frac{h^2}{12} = A\,\frac{h^2}{12}$$

$$U = \int_0^L \frac{12\,Q_x^2}{20\,G\,A}\, dx = \int_0^L \frac{0.6\,Q_x^2}{G\,A}\, dx \qquad (11.26)$$

பெரும்பாலான விட்டங்களில், நீளம் முழுவதிலும் EI நிலையாய் இருத்தலைக் காண்கிறோம். இவற்றில்

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^L M_x^2\,dx$$ எனக் கணக்கிடலாம்.

சமன்பாடு 10.24 இன் பயனுக்கு ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டாய்ப் படம் 10.7 இல் காட்டப்பட்டுள்ள துருத்துவிட்டத்தின் முனை விலக்கத்தைக் கணக்கிட முயல்வோம். விட்டத்தின் நீளம் L முழுவதிலும் EI சீராய் இருப்பதாய்க் கொள்வோம்.



படம் 11.7 துருத்து விட்டத்தின் முனை விலக்கம்

விட்டத்தின் முனையில் குவிசுமை = P

விட்டத்தின் முனையில் விலக்கம் = Δ

புறவிசை செய்யும் வேலை, $V = \frac{P\Delta}{2}$

விட்டத்தில் சேமிக்கப்படும்

மொத்த விகல ஆற்றல் $U = \frac{1}{2EI}\int_0^L M_x^2\,dx$

இதில் $M_x = P.x$

எனவே, $U = \frac{1}{2EI}\int_0^L P^2 x^2\,dx = \frac{P^2}{2EI}\cdot\frac{L^3}{3}$

$U = V$ எனில்

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2}{2EI}\cdot\frac{L^3}{3}$$

எனவே, முனை விலக்கம், $\Delta = \dfrac{PL^3}{3EI}$

இனிச் சமன்பாடு 11.26ஐப் பயன்படுத்தி நறுக்குத்தகைவால் சேமிக்கப்படும் விகல ஆற்றலைக் கணக்கிடுவோம். (இவ்வாறு கணக்கிட விட்டத்தின் I சீராயுள்ளது என்பது மட்டுமின்றி வெட்டுமுகம் செவ்வக வடிவிலும் உள்ளது எனக் கருதித் தீர்வு காண்போம்).

$$U = \int_0^L \frac{0.6\ P^2}{GA}\,dx$$

$$U = \frac{0.6\ P^2 L}{GA} \cdot \frac{0.6\ P^2 L}{G \cdot I \dfrac{l_2}{h^2}}$$

$G = 0.4E$ எனக் கொள்ள,

$$U = \frac{0.125\ P^2 L h^2}{EI}$$

இது வளைதிருப்புமை விளைக்கும் விகல ஆற்றலின் பின்னமாய் உரைக்கப்படின்,

$$\frac{U_{\text{நறுக்குவிசை}}}{U_{\text{வளைதிருப்புமை}}} = \frac{0.125\ P^2\ L h^2}{EI} \cdot \frac{P^2\ L^3}{6\ EI}$$

$$= 0.75\ \frac{h^2}{L^2}$$

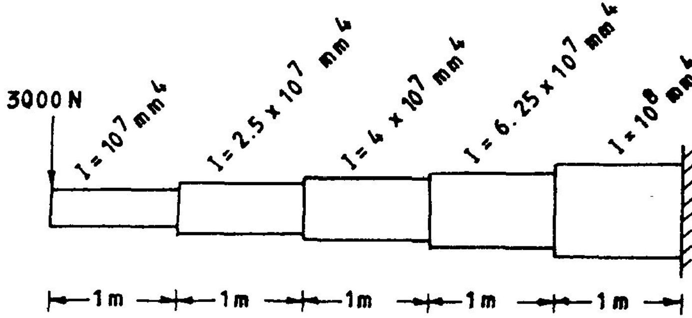
இதனால் உயரங் குறைந்த விட்டங்களில் இது புறக்கணிக்கப்படுவதில் பிழை மிகுதியில்லை.

எ.கா. **11.2**

படம் 11.8 இல் காட்டப்பட்டுள்ள துருத்து விட்டத்தின் முனை விலக்கத்தினைக் கணக்கிடுவோம்.

விகல ஆற்றல் $U = \displaystyle\int_0^L \frac{M_x^2}{2EI}\,dx$ என்பது பொது வாய்பாடு

ஆனால், இஃது எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதனை நோக்கும்போது,



படம் 11.8

$$U = \int_0^{L_1} \frac{M_x^2\, dx}{2EI_1} + \int_{L_1}^{L_2} \frac{M_x^2\, dx}{2EI_2} + \ldots\ldots$$

என்னும் வடிவில் உரைத்தல் எளிதெனக் காண்கிறோம்.

$$EI_1 = 2 \times 10^5 \text{ N mm}^2 \times 10^7 \text{ mm}^4 = 2 \times 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

அல்லது 2000 kNm^2 என உரைத்துப் பிற அலகுகளையும்

kN , m அலகுகளில் எழுதினால்

$$U = \frac{9}{4000}\left[\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{2.5}\int_1^2 x^2\,dx + \frac{1}{4}\int_2^3 x^2\,dx + \frac{1}{6.25}\int_3^4 x^2\,dx + \frac{1}{10}\int_4^5 x^2\,dx\right]$$

$$= 0.00225\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{2.5}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 + \frac{1}{6.25}\left[\frac{x^3}{3}\right]_3^4 + \frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}\right]_4^5\right\}$$

$$= \frac{0.00225}{3}\left[1 + 0.4(2^3 - 1) + 0.25(3^3 - 2^3) + 0.16(4^3 - 3^3) + 0.1(5^3 - 4^3)\right]$$

$$= 0.00075\ [1 + 2.8 + 4.75 + 5.92 + 6.1]\ \text{kNm}$$

$$= 0.75 \times 20.57\ \text{k N mm}$$

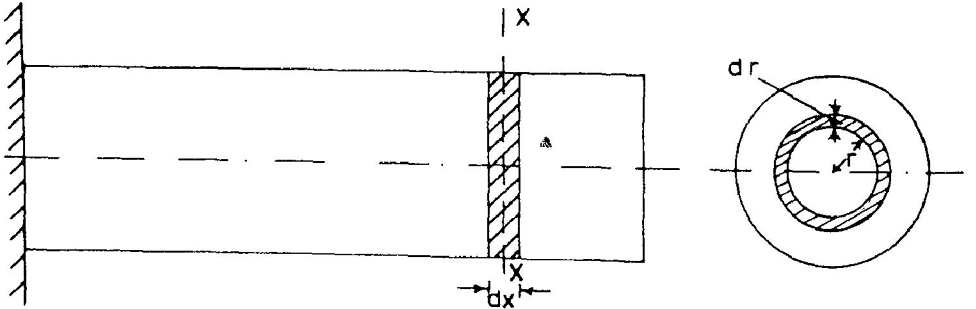
$$= 15.43\ \text{kN mm}$$

$$V = \frac{P\delta}{2} = 3\frac{\delta}{2} \text{ kNmm} = U$$

$$\therefore \delta = \frac{2U}{P} = \frac{15.43 \times 2}{3} = 10.3 \text{ mm}$$

11.6 முறுக்கத்தில் விகல ஆற்றல் (Strain Energy in Torsion)

முறுக்கத்தில் நறுக்குத் தகைவுகள் மட்டுமே தோற்றுவிக்கப்படுகின்றன என்பதனை முன்னர் (8.2) கண்டோம். அதனால் முறுக்கம் செலுத்தப்பட்டிருக்கும் தண்டு ஒன்றனில் (படம் 11.9) சேமிக்கப்படும் விகல ஆற்றலைக் கணக்கிட முயல்வோம். (விட்டங்களைப் போலன்றி இங்குச் சில வரம்புகளை நோக்க வேண்டும். வளைதல் சமன்பாடு, $\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I}$ போலன்றி, முறுக்கச் சமன்பாடு, $\frac{\tau}{r} = \frac{T}{J}$ என்பது வட்ட வடிவு வெட்டுமுகம் கொண்ட தண்டுகளுக்கே பொருந்தும் என்பதை நினைவுகூர வேண்டும்).



படம் 11.9 முறுக்கத்தில் விகல ஆற்றல்

XX என்னும் வெட்டுமுகத்தில் ஒருதுண்டினை எடுத்துக்கொண்டு, இத்துண்டில் மையத்திலிருந்து r தொலைவில் உள்ள dr தடிப்புக்கொண்டதொரு வளையத்தினைக் கருதுவோம்.

இவ் வளையத்தின் குறுக்குப் பரப்பு, $dA = 2\pi\, r.dr$

வளையத்தின் தடிப்பு $= dx$

$\therefore$ வளையத்தின் கன அளவு $dV = 2\pi\, r.dr\, dx = dA.dx$

வளையத்தின் நறுக்குத் தகைவு $\tau = \frac{T_x}{J} \cdot r$

வளையத்தில் விகல ஆற்றல் செறிவு $\frac{\tau^2}{2G} = \frac{T_x^2 r^2}{J^2 2G}$

வளையத்தில் மொத்த விகல ஆற்றல் $dU = \frac{T_x^2 r^2}{2GJ^2} \cdot dA \cdot dx$

தண்டில் மொத்த விகல ஆற்றல் $U = \int\int \frac{T_x^2 r^2}{2GJ^2} \, dx \, . \, dA$

$$= \int_0^L \frac{T_x^2 \, dx}{2GJ^2} \int_A r^2 \, dA$$

$$= \int_0^L \frac{T_x^2 \, dx}{2GJ^2} \cdot J$$

$$U = \frac{1}{2GJ}\int_0^L T_x^2 \, dx \qquad (11.27)$$

11.7 விசைத் தாக்கம் (Impact)

சமன்பாடு 11.6 ஐப் பெறும்போது, விசை P படிப்படியாய்ச் (0 விலிருந்து P வரை) செலுத்தப்படுவது ; விசை P யின் செயல்முனையின் இடப்பெயர்ச்சியாய δ என்பது விசை P யால் உறுப்பின்மீது தோற்றுவிக்கப்படும் நீட்சி (குறுக்கம் அல்லது விலக்கம்) யின் அளவேயாகும் என்னும் கற்பிதத்தை மேற்கொண்டோம். இனித் தொடக்கத்திலிருந்தே முழு விசையும் செலுத்தப்படும் சூழ்நிலைகளில் விகல ஆற்றலின் அளவினைக் காண்போம்.

படம் 11.10 ஐ நோக்குக. இதில் மீள்மைக் குணகம E, நீளம், L, குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு A கொண்ட சீர்க் கம்பியின் ஒருமுனை உறுதியாய்ப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. மறுமுனையில் ஒருமெல்லிய உறுதியாய தட்டு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. எடை W கொண்டதொரு கனத்த எடைக் கட்டி, தட்டின் மட்டத்திலிருந்து h உயரத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இக் கட்டியின் தாங்கி விடுவிக்கப்பட்டு இது கீழே விழும்போது, இதன் எடை P தட்டின்மூலம் சீர்கம்பியில் அச்சுத் திசையில் செலுத்தப்படுகிறது. இந் நிகழ்ச்சியில் இரண்டு புதிய கூறுகளை நோக்குவோம்.

1. செலுத்தப்படும் விசை தொடக்கத்திலிருந்தே முழுமையாய்ச் செயல்படுகிறது.

2. விசை செலுத்தப்படுமுன் ஒருவேகத்துடன் இலக்கை வந்தடைகிறது. இத்தகைய விசைச் செலுத்துகையை விசைத்தாக்கம் (Impact) என அழைக்கிறோம்.

விசை இவ்வாறு செலுத்தப்படுவதன் விளைவுகளை நோக்குவோம். சீர்க் கம்பியில் தோற்றுவிக்கப்படும் நீட்சியை δ எனக் கொள்வோம்.

$$\text{எடையின் நிலையாற்றல் வீழ்ச்சி} = W(h+\delta)$$

ஆனால், கம்பியில் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுகள் (குறுகிய நேரத்திற்குள் தானென்றாலும்) தொடக்கத்தில 0 இலிருந்து படிப்படியாய்த்தான் உச்சத் தகைவுவரை செலுத்தப்படுகின்றன. நமது கருத்து வசதியை முன்னிட்டு, W இன் விசைத் தாக்கத்திற்கு ஈடான விளைவுகளைத் தோற்றுவிக்கக் கூடிய, ஈட்டு நிலைவிசை (Equivalent Static Load) யின் அளவினை P எனக் கொண்டு, சீர்க்கம்பியில் விகல ஆற்றல் $U = \frac{P\delta}{2}$ எனக் கொண்டால், சீர்க் கம்பியில் தகைவு, $\sigma = P/A$ எனக் கொள்ளல் இயலும். இனி, சீர்க் கம்பியில் விகல ஆற்றல் U = விகல ஆற்றல் செறிவு × கன அளவு

$$U = \frac{\sigma^2}{2E}\cdot A\cdot L\cdot$$

எனவே, $$\frac{\sigma^2}{2E}\cdot AL = W(h+\delta) \qquad (11.28)$$

சமன்பாடு 11.28 இல் $\delta = \frac{\sigma L}{E}$ எனக் கொள்ள

$$\sigma^2 - \frac{2W}{A}\sigma - \frac{2EWh}{AL} = 0 \qquad (11.29)$$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பெறுகிறோம்.

இதிலிருந்து தகைவு $$\sigma = \frac{W}{A}\left(1+\sqrt{1+\frac{2AEh}{WL}}\right) \qquad (11.30)$$

என்னும் தீர்வினைப் பெறலாம்.

$\sigma = \frac{W}{A}\left(1-\sqrt{1+\frac{2AEh}{WL}}\right)$ என்னும் தீர்வு பொருந்தாமையால் விடப்படுகிறது.

தோராயமான தீர்வு போதுமெனில் சமன்பாடு (11.28) இல் h உடன் ஒப்பிடுங்கால் δ மிகச் சிறிதெனக் கொள்ள

$$\frac{\sigma^2 A L}{2E} = Wh$$

அல்லது, $$\sigma = \sqrt{\frac{2\,E\,W\,h}{AL}} \qquad (11.31)$$

இதிலிருந்து P, δ இவற்றின் மதிப்புகளைத் தோராயமாய்க் காணலாம். இத் தகைவினைத் தாக்கத்தின் விளைவு எனக் கொள்ளலாம்.

இனி, சமன்பாடு 11.28 இல் h = 0 எனில் தோற்றுவிக்கப்படும் விளைவுகளை நோக்குவோம். இங்கு விசைத்தாக்கம் (Impact) இல்லை. (அஃதாவது, விசை வேகத்துடன் செலுத்தப்படவில்லை). ஆனால், தாக்கத்தினால் தோன்றும் தகைவினையறிதல் இன்றியமையாததே.

11.28 இல் $h = 0$, $\delta = \frac{\sigma \,.\, L}{E}$ எனக் கொள்ள,

$$\sigma = \frac{2W}{A} \qquad (11.32)$$

அல்லது, $P = 2W$

என்னும் தீர்வைப் பெறுகிறோம். விசைகள் திடீரெனச் செலுத்தப்படின் தோன்றும் விளைவுகளையும் ஆய்ந்து வடிவமைத்தலே பாதுகாப்பினை உறுதி செய்யும்.

எ.கா. 11.3

படம் 11.10 இல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பில் சீர்க் கம்பியின் நீளம் = 800mm, குறுக்குப் பரப்பு = 400mm^2, மீள்மைக்கெழு = 1.21x10^5 N/mm^2 எனில், எடை W = 20 N, 500mm உயரத்திலிருந்து விழும்போது தோற்றுவிக்கப்படும், சீர்க்கம்பியின் நீட்சி, தகைவு இவற்றைத் தோராயமாயும், சரியாயும் கணக்கிட்டு ஒப்பிடுக.

தீர்வு :

முதலில் தோராயமாய்த் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

தகைவு, $$\sigma = \sqrt{\frac{2\,E\,W\,h}{A\,L}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 1.2 \times 10^5 \;20\;500}{400 \times 800}} = 86.6 \text{ N/mm}^2.$$

$$\text{நீட்சி, } \sigma = \sigma \cdot \frac{L}{E} = \frac{86.6 \times 400}{1.21 \times 105}$$

$$= 0.577 \text{ mm}$$

அடுத்து , சரியான தீர்வுகளைக் காண்போம்.

$$\text{தகைவு, } \sigma = \frac{W}{A}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2AEh}{WL}}\right)$$

$$= \frac{20}{400}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 400 \times 1.2 \times 10^5 \times 500}{20 \times 800}}\right)$$

$$= 86.653 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{நீட்சி, } \delta = \frac{86.653 \times 800}{1.2 \times 10^5} = 0.5777 \text{ mm}$$

படம் 11.10

இரண்டு தீர்வுகளையும் ஒப்பிடப் பிழை 0.06% தான் எனக் காண்கிறோம். வீழும் உயரத்தைப் பொறுத்து இதில் மாறுபாடுகள் சிறிதளவு இருக்கலாமெனினும், மொத்தத்தில் பிழை மிகக் குறைவாகவே இருப்பதால், பெரும்பாலோர் தோராயமான தீர்வுடன் அமைகின்றனர்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், W = 200 N, h = 50 mm, எனில் பிழை = 0.57% எனவும், W = 500 N, h = 20 mm, எனில் பிழை = 1.436% எனவும் கணக்கிட்டுக் காண்க.

ஆனால், ஓரளவுற்குக் கீழ் உயரம் குறையின் பிழை நூறு விழுக்காட்டிற்கு மேலும் தாண்டக்கூடுமென்பதால் வீழ்ச்சி உயரம் நீளதத்தில் பத்திலொரு பங்குக்குக் குறைவாயிருப்பின், சரியான தீர்வினையே பயன்படுத்த வேண்டும்.

பயிற்சிகள்:

11.2 சமன்பாடு 11.28 இலிருந்து, $\delta = \frac{WL}{AE} + \frac{2WLh}{AE}$ எனக் காட்டுக.

11.3 (i) 1.5m நீளமுள்ள சீர்க் கம்பியொன்றன் குறுக்வெட்டுப் பரப்பு 500 mm², E = 2× 10⁵ N/mm², நீள்வலிமை 150 N/mm². இது ஒருமுனையில் உறுதியாய்த் தாங்கப்பட்டு மறுமுனையில் தாக்குவிசை செலுத்தற்குரியவகையில் இணைக்கப்பட்டிருப்பின்,

ஒருமீட்டர் உயரத்திலிருந்து இதன் மீது விழக் கூடிய எடையின் அளவினைக் கணக்கிடுக. (விடை 42.14N)

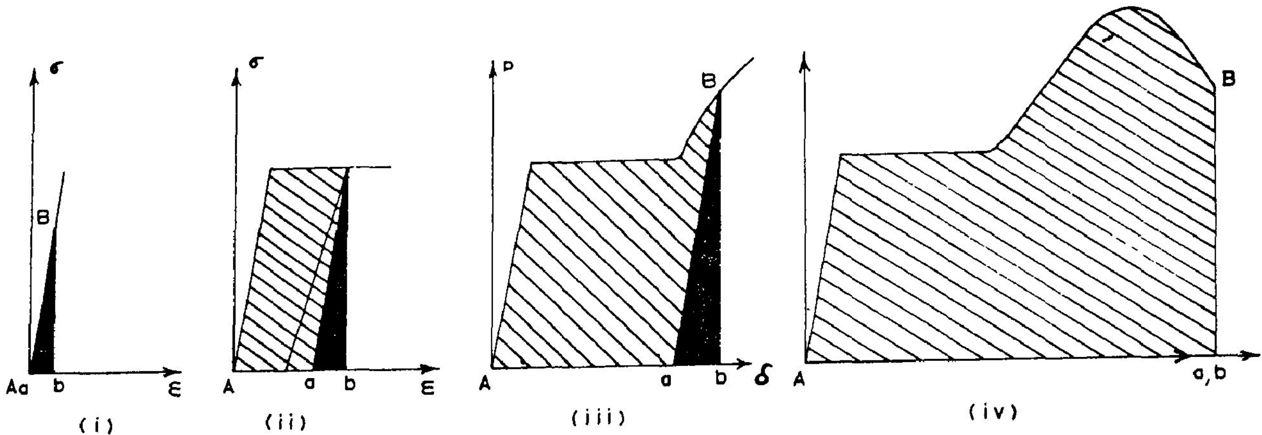
(ii) இதே கம்பி 0.5m நீளத்திற்கு 600 mm^2 குறுக்குப் பரப்பும், மற்றும் 0.5m நீளத்திற்கு 500 mm^2 குறுக்குப் பரப்பும், மீதி நீளத்திற்கு 400 mm^2 குறுக்குப் பரப்பும் கொண்டிருப்பின், இதன்மீது 1 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து விழக்கூடிய அதிகூடிய எடையின் அளவினைக் கணக்கிட்டுச் சீர்க் கம்பியின் வலிமையுடன் ஒப்பிடுக. (விடை 27.72N)

சில வரையறைகள்

திண்மங்கள் மீட்சி எல்லைக்குள் தகைவுறுத்தப்படும்போது புறவிசை செய்யும் வேலை முழுமையும் திண்மத்தினுள் விகல ஆற்றலாய் சேமிக்கப்படுகிறதென அறிவோம். தகைவு மீட்சி எல்லையைத் தாண்டினால், நிலையான நலிவுகள் தோற்றுவிக்கப்படுகின்றன. புறவிசை செய்யும் வேலையின் (அஃதாவது, புறவிசை செலுத்தும் சாதனம் செலவழிக்கும் ஆற்றலில்) ஒருபகுதி இந் நிலையான நலிவுகளைத் தோற்றுவிப்பதிற் செலவாக, எஞ்சியுள்ள ஆற்றலே விகல ஆற்றலாய்ச் சேமிக்கப்படுகிறது. இப் பகுதியைத்தான் புறவிசைகளை நீக்கும்போது மீட்க முடியும். இதனை மீள்ஆற்றல் (Resilience) எனலாம். விசை – நீட்சிப் படத்தின் (விசை செலுத்தப்படும் வரம்புவரை) பரப்பளவு , செலவழிந்த மொத்த ஆற்றலின் அளவினைத் தரும். அல்லது தகைவு விகலப் படத்தின் பரப்பினைத் திண்மத்தின் கன அளவால் பெருக்கியும் இதனையே பெறலாம். அஃதாவது, தகைவு விகலப் படத்தின் பரப்பளவு ஓர் அலகு கனஅளவு திண்மத்திற்குச் செலவாய ஆற்றலைக் குறிப்பிடும். (படங்கள் 11.11 ஐ நோக்குக). பொதுவாய் தகைவுகள் மீட்சி எல்லைக்குள் இருக்கும்வரை சேமிக்கக்கூடிய ஆற்றலே நடைமுறையில் பயன்படுத்தக்கூடியதாகலின், மீட்சி எல்லைக்குள் திண்மத்துள் சேமிக்கக்கூடிய மொத்த ஆற்றலை மீள்திறம் (Proof Resilience) என வழங்குகிறோம். இந் நிலைக்குரிய உச்சத் தகைவின் அளவினை மீள்மைத் தகைவு (Proof Stress) என அழைக்கிறோம்.

ஒருதிண்மத்தின் மீள்திறத்தைக் கன அளவால் வகுக்க, அலகு கனஅளவுத் திண்மத்தின் மீள்திறத்தினைப் பெறலாம். இது மீள்திறக் குணகம் (Modulus of Resilience) என அழைக்கப்படுகிறது.

திண்மம் முறிவு அடையும்வரை விசை தொடர்ந்து செலுத்தப்படின், பொருள் முறிவடையும்போது, அளிக்கப்பட்ட ஆற்றல் முழுமையாய் செலவாக்கப்பட்டு விடுகிறது. இவ்வாற்றல் பொருளை முறிப்பதில் செலவழிக்கப்படுமானால் முறிவு ஆற்றல் (Fracture Energy) எனப்படுகிறது. முறிவுவரை தகைவு-விகலப் படம் வரைந்து (படம் 11.11 (ii) அதன் பரப்பினைக் காணின் அது ஓர்அலகு கனஅளவு திண்மத்திற்குத் தேவையான முறிவு ஆற்றலின் அளவினைத் தரும். இவ் அளவு பொருளின் உரப்பு (Toughness)க்கு ஓர் அளவீடாகக் கருதப்படுகிறது. இவற்றை உயர்நிலை நூல்களில் விரிவாய்க் காணலாம்.



A – தகைவு விகலப் படத்தின் ஆயமையம்

B – விகல முறுக்கப்படும் அளவு

a – புறவிசை முழுமையாக நீக்கபபடும்போது மீளும் தகைவு விகல வரை

b – தோற்றுவிக்கப்படும் விகல அளவு (B யின் வீழல்)

பரபபு ABb – புறவிசை செயத மொத்த வேலை

பரப்பு aBb – மீள் ஆறறல்

பரப்பு ABa – நிலையான நலிவுகளைத் தோற்றுவிப்பதில் செலவாகும் ஆறறல (படம் iv இல முறிவு ஆறறல)

படம் 11.11 மீள ஆற்றல, செலவான ஆறறல, முறிவு ஆறறல்

படம் 11.11 மீள் ஆற்றல், மொத்த ஆற்றல், முறிவு ஆற்றல்

ஆற்றல்மாறா, ஆற்றல்மாறு அமைப்புகள் (Conservative and Non Conservative Systems)

விசைகள் செலுத்தப்படும் அமைப்புகள் ஆற்றல்மாறா அமைப்புகள் (Conservative Systems), ஆற்றல்மாறு அமைப்புகள் (Non Conservative Systems) என இருவகையாய்ப் பகுக்கப்படுகின்றன. ஒரு அமைப்பின் மொத்த நிலை ஆற்றல் Π எனக் கொள்வோம். இவ்வமைப்பின்மீது செயல்படும் விசைகள் செய்யும் வேலைகள், ஆற்றல் செலவாகும். அமைப்பில் தேக்கப்படும் விகல ஆற்றல், ஆற்றல் சேமிப்பாகும். அதனால், நிலை ஆற்றலின் (Potential Energy) மாற்றத்தை $\Pi + U - W$, எனக் குறிப்பிடலாம்.

ஆற்றல் மாற்றம், $\delta \Pi \;=\; U - W$

படம் 11.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ள வில் போன்ற அமைப்புகளில் புறவிசைகள் செய்யும் மொத்த வேலை (W)யும் விகல ஆற்றல் (U) ஆகத் தேக்கப்படுகிறது. அதனால், ஆற்றல் மாற்றம் $\delta \Pi = 0$; இவ்வாறு மொத்த நிலையாற்றலின் மாறுபாடில்லாத அமைப்புகளை **ஆற்றல் மாறா அமைப்புகள்** (Conservative Systems) என்றும், இவ்வாறு செயல்படும் விசைகளைச் ஆற்றல் மாற்றா விசைகள் (Conservative Forces) என்றும் அழைக்கிறோம்.

மாறாய்ப் படம் 11.11 இல் சுட்டப்பட்டுள்ள அமைப்பில் புறவிசைகள் செய்யும் வேலையில் ஒருபகுதியே தேக்கப்பட, எஞ்சியதே செலவாவதனால், இதில் நிலையாற்றல் மாற்றம் $\delta \Pi = U - W \;\neq\; 0$;

இத்தகைய அமைப்புகளை **ஆற்றல் மாறு அமைப்புகள்** (Non Conservative Systems) என்றும், இவ்வாறு செயல்படும் விசைகளை **ஆற்றல் மாற்று விசைகள்** (Non-Conservative Forces) என்றும் அழைக்கிறோம்.

11.8 கற்பனை வேலை (Virtual Work)

விசைகள் செய்யும் வேலைகளையும் செலுத்தப்படும் திண்மங்களில் சேமிக்கப்படும் விகல ஆற்றலையும் சமப்படுத்தி, இடப்பெயர்ச்சிகளைக் கணக்கிடும் முறைகளைக் கண்டோம். இம் முறையின் பயன்பாடு சிறுவரம்பிற்குட்பட்டது. அஃதாவது, ஒரேயொரு விசை செலுத்துமிடத்து, விசை செலுத்தும் புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சியைக் கணக்கிடவே இம் முறையைப் பயன்படுத்தினோம். ஆனால், பொதுவாக, எந்தவொரு புள்ளியிலும் இடப்பெயர்ச்சியைக் கணக்கிட இம் முறை உதவாது. அதனால், கற்பனை வேலை என்னும் கருத்தினைப் பயன்படுத்தும் முறைகளை இனிக் காண்போம்.

கற்பனை இடப்பெயர்ச்சி (Virtual Displacement)

ஒருபுறவிசை செய்யும் (உண்மை) வேலையைச் சராசரி விசை × அது விளைத்த இடப்பெயர்ச்சி என்னும் பெருக்கத் தொகையாகக் கணக்கிட்டோம். அஃதாவது, விசையால்

தோற்றுவிக்கப்படும் இடப் பெயர்ச்சிகளைப் பொறுத்தமட்டில் இது சரியே. ஆனால், புறவிசைகள் செலுத்தப்பட்டு அவற்றால் தோற்றுவிக்கப்பட்ட இடப்பெயர்ச்சிகளும் நிகழ்ந்து விட்ட நிலையில், மேலும் இடப்பெயர்ச்சிகள் நிகழப்பெறின், அவ் இடப்பெயர்ச்சிகளின்போது முன்னரே செலுத்தப்பட்டிருந்த புறவிசைகள் தொடக்கத்திலிருந்தே முழுமையாய்ச் செயல்படுவதால், வேலை = விசை × இடப்பெயர்ச்சி என்றே கணக்கிடலாமன்றோ? (இத்தகைய இடப்பெயர்ச்சிகள் வெப்பநிலை மாற்றம், முதலாய காரணங்களால் உண்மையாகவே தோற்றுவிச்கப்பட்டாலும் ஒன்றுதான்). அதனால் உருவாகவிருக்கும் புதியதொரு கோட்பாட்டில், புறவிசைகள் செலுத்தப்பட்ட பின்னர், ஏதாவதொரு புள்ளியிலோ, அல்லது பல புள்ளிகளிலோ சிறிதளவு இடப்பெயர்ச்சி தோன்றுவதாய்க் கற்பனை செய்துகொள்ளல் அவசியமாகும். இதனையே **கற்பனை இடப்பெயர்ச்சி** (Virtual displacement) என அழைக்கிறோம். (சிறிதளவு என்று ஏன் குறிப்பிடுகிறோமெனில், அதன் விளைவாய் வடிவமைப்பில் மாற்றங்கள் ஏதுமில்லையெனக் கொள்ளற் பொருட்டே).

கற்பனை விசை (Virtual Force)

செலுத்தப்பட்ட புறவிசைகள் செயல்படத் தொடங்கு முன்னரே, திண்மத்தின்மீது ஒன்று அல்லது ஒன்றனுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகளில் சிறிதளவு விசைகள் செயல்பட்டுக் கொண்டிருப்பதாயும் கருதலாம். அவற்றைக் **கற்பனை விசைகள்** (Virtual Forces) என அழைக்கிறோம்.

கற்பனை வேலை (Virtual Work)

உண்மை விசைகளையும், இடப்பெயர்ச்சிகளையும், P, Δ என்னும் குறியீடுகளாலும், கற்பனை விசைகளையும் இடப்பெயர்ச்சிகளையும் δP, $\delta\Delta$ என்னும் குறியீடுகளாலும், குறிப்பிடு கிறோம். (இவை ஒன்றனுக்கு மேலிருப்பின்

$P_1, P_2 \ldots\ldots$ $\qquad \Delta_1, \Delta_1, \ldots\ldots$

$\delta P_1, \delta P_2, \ldots\ldots \qquad \delta\Delta_1, \delta\Delta_2 \ldots\ldots$

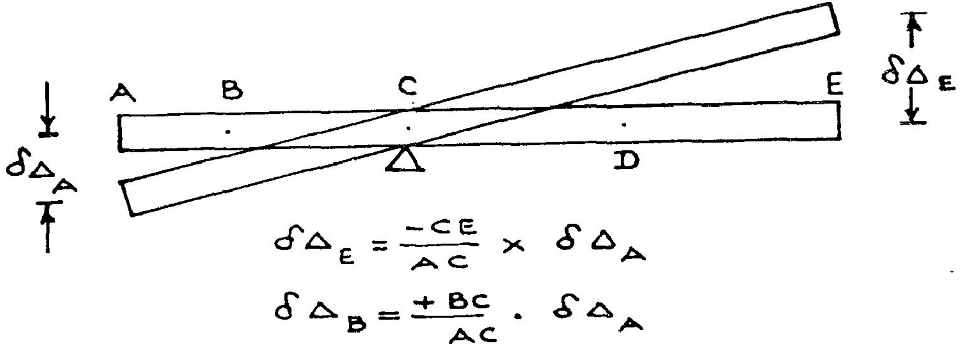
எனக் கீழடைகள் கொண்டு குறிப்பிடலாம்)

உண்மை விசைகள் $P_1, P_2 \ldots\ldots$ முதலியன செயல்பட்டுக்கொண்டிருக்கும் நிலையில், கற்பனை இடப்பெயர்ச்சிகள் நிகழ்வதாய்க் கொள்வோம். இவ்விடப் பெயர்ச்சிகள் P_1, P_2 முதலாய விசைகளின் செயல்முனைகளில் $\delta\Delta_1$, $\delta\Delta_2$ எனக் கொண்டால், இவ்விடப் பெயர்ச்சிகளின்போது விசைகள் செய்யும் வேலையைக் **கற்பனை வேலை** (Virtual Work) என்கிறோம். இதன்படி,

மொத்தக் கற்பனை வேலை $\delta W = P_1\,\delta\Delta_1 + P_2\,\delta\Delta_2 + \ldots$

$$\delta W = \Sigma P_I \, \delta \Delta_I \quad (11.33)$$

கற்பனை இடப்பெயர்ச்சி என்றாலும், இதனையும் திண்மத்தின் தாங்கி நிலைகளின் தண்மைகளையொட்டியே கற்பனை செய்தல் கூடும். இல்லையேல், நம் ஆய்வுகள் பொருளற்றனவாய் முடியும்.



படம் 11.12 கற்பனை இடப்பெயர்ச்சிகள்

எடுத்துக்காட்டாய்ப் படம் 11.12 இல் காட்டியுள்ள நெம்புகோலின் ஒருபுள்ளியில் கற்பனை இடப் பெயர்ச்சியை எந்த அளவில் வேண்டுமானாலும் கொள்ளலாம். ஆனால், அதன்பின் மற்றப் புள்ளிகளில் கற்பனை இடப்பெயர்ச்சிகள் நெம்புகோலின் இயக்கப் பண்புகளுக்கு ஒட்டியனவாகவே இருக்க முடியும். எடுக்காட்டாய் A என்ற புள்ளியின் கற்பனை இடப் பெயர்ச்சியை 10^{-8} mm என்றோ, 7×10^{-6} mm என்றோ எவ்வாறு வேண்டுமானாலும் கொள்ளலாம். ஆனால் A இல் 10^{-8} mm, B இல் 10^{-7} mm D - இல் 5×10^{-7} mm போன்று நம் விருப்பத்திற்குக் கற்பனை செய்துகொள்ள முடியாது. உண்மையான இடப் பெயர்ச்சிகள் எவ்வாறு நிகழ்க்கூடுமோ? அதே தன்மையில் தான் இவற்றைக் கற்பனை செய்ய வேண்டும். கற்பனை இடப்பெயர்ச்சிகள் $\delta\Delta_A$, $\delta\Delta_B$, முதலாயவற்றுக்கிடையிலுள்ள உறவுகளைப் படம் 11.12 காட்டுகிறது. அஃதாவது, இடப்பெயர்ச்சிகள் கற்பனையே எனினும் அவற்றுக்கிடையிலாய உறவுகள் உண்மையானவையாய் இருக்க வேண்டும்.

அடுத்து , கற்பனை விசைகள் செயல்பட்டுக்கொண்டிருக்கும் நிலையில், உண்மை விசைகள் செலுத்தப்படின், அவை தோற்றுவிக்கும் இடப்பெயர்ச்சிகளின்போது (உண்மை விசைகளும் வேலை செய்கின்றன), கற்பனை விசைகள் செய்யும் வேலையையும் கற்பனை வேலை என்றே அழைக்கிறோம். இங்கு மொத்தக் கற்பனை

வேலை $\delta W = \delta P_1 \Delta_1 + \delta P_2 \Delta_2 + \ldots\ldots$

அல்லது $\delta W = \Sigma \Delta_i \delta P_i \ldots$ (11.34)

கற்பனை வேலைக் கோட்பாடு (Principle of Virtual Work):

இனி P_1, P_2, P_3 ... முதலாய புறவிசைகளின் செயல்பாட்டின் கீழ்ச் சமனிலையில் இருக்கும் ஒருதிண்மத்தின்மீது (படம் 11.13) கற்பனை இடப்பெயர்ச்சிகள் $\delta \Delta_1$, $\delta \Delta_2$,... முதலியன நிகழும்போது செய்யப்படும் மொத்தக் கற்பனை வேலையைக் காண்போம். (புறவிசைகளிற் சில தாங்கி, எதிர்வினைகளாயும் இருக்கலாம் (எ.கா. P_2, P_3)

புறவிசைகளின் மொத்தக் கற்பனை வேலை δW எனில்

$$\delta W = P_1 \delta \Delta_1 + P_2 \delta \Delta_2 + \ldots + P_n \delta \Delta_n{}^{*})$$

P_1, P_2 .. முதலாய விசைகளின் பயனிலை (Resultant), R எனில், R செய்யும் கற்பனை வேலை P_1, P_2 முதலாய விசைகள் தனித் தனியே செய்யும் வேலைகளின் கூடுதலுக்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும். அஃதாவது,

$$\delta W = R \delta \Delta_R \quad (11.35)$$

ஆனால் P_1, P_2 முதலிய விசைகள் சமனிலையில் இருப்பதால்

$$R = 0;$$

படம் 11.13 மொத்தக் கற்பனை வேலை

எனவே, $\delta W = 0$ (11.36)

அஃதாவது, திண்மத்தின் இயக்கத் தன்மைகளுக்குட்பட்ட கற்பனை இடப்பெயர்ச்சிகளின்போது, திண்மத்தின்மீது சமனிலையில் செயல்படும் புற விசைகள் செய்யும்

---

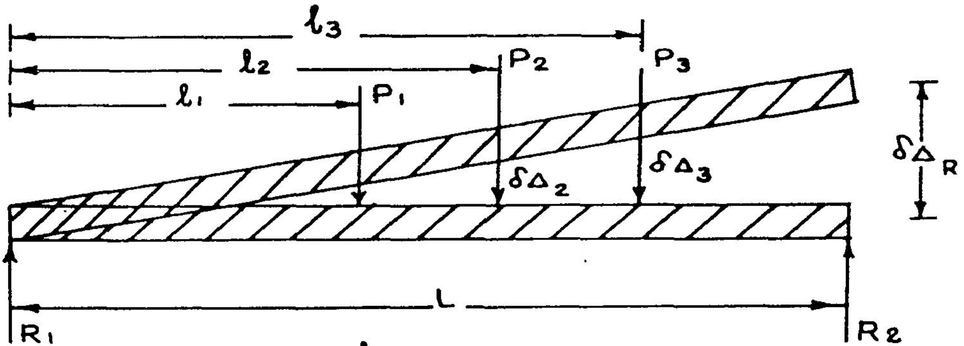
* இங்குக் கற்பனை இடப்பெயர்ச்சிகளில் சில 0 ஆக இருக்கலாம். (எ.கா. P_2, P_4) சில விசையின் திசைக்கு எதிர்திசையில் இருக்கலாம். (எ.கா. $\delta \Delta_3$; இதனை $-\delta \Delta_3$ எனக் கொள்க.) எனவே

$$\delta W = P_1 \delta \Delta_1 - P_3 \delta \Delta_3 + P_5 \delta \Delta_5 + P_6 \delta \Delta_6$$

மொத்தக் கற்பனை வேலை சுழிதான். இதனையே கற்பனை வேலைக்கோட்பாடு (Principle of Virtual Work) என்கிறோம்.

இக் கோட்பாட்டினைத் தளர்திண்மங்களுக்கும், தளராத் திண்மங்களுக்கும் பயன்படுத்தலாம்; எனினும், எளிமை வேண்டி முதலில் தளராத் திண்மங்களுக்கு (Rigid Solids) இவற்றைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

படம் 11.14 இல் காட்டிய விட்டத்தில் தாங்கி எதிர் வினைகளைக் காண, கற்பனை வேலைக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்துவோம். இதன் பொருட்டு விட்டத்தைத் தளராத்திண்மமாய்க் கொண்டு ஏதாவதொரு தாங்கிக்குப் பதிலாய் அதன் எதிர்வினையைப் புறவிசைகளில் ஒன்றாய்க் கருதி, அப் புள்ளியில் (படத்தில் வல முனை) கற்பனை இடப்பெயர்ச்சி, $\delta \Delta_R$ அய்த் தோற்றுவிப்போம்.



$$\delta \Delta_1 = + \frac{l_1}{L} \delta \Delta_R$$

$$\delta \Delta_2 = + \frac{l_2}{L} \delta \Delta_R$$

$$\delta \Delta_3 = + \frac{l_3}{L} \delta \Delta_R$$

படம் 11.14 விட்டத்தின் கற்பனை இடப் பெயற்சிகள்

இதன் விளைவால் மற்றப் புற விசைகளின் செயல்முனைகளின் கற்பனை இடப்பெயர்ச்சிகள் $\delta \Delta_1$, $\delta \Delta_2$, $\delta \Delta_3$ என்போம். இவற்றின் அளவீடுகளைப் படம் 11.14 காட்டுகிறது. இவற்றிலிருந்து மொத்தக் கற்பனை வேலை,

$$\delta W = R_2 \, \delta \Delta_R + (-P_1) \, \delta \Delta_1 + (-P_2) \, \delta \Delta_2 + (-P_3) \, \delta \Delta_3 = 0$$

அல்லது

$$\delta\,\Delta_R \cdot R_2 - P_1 \frac{L_1}{L}\,\delta\,\Delta_R - P_2 \frac{L_2}{L}\,\delta\,\Delta_R - P_3 \frac{L_3}{L}\,\delta\,\Delta_R \;=\; 0$$

அஃதாவது

$$R_2 - \left(P_1 \frac{L_1}{L} + P_2 \frac{L_2}{L} + P_3 \frac{L_3}{L} \right) \;=\; 0$$

இச் சமன்பாட்டை நீளம், L ஆல் பெருக்கத் திருப்புமைச் சமனிலைச் சமன்பாடு கிடைக்கப் பெறலாம். நிலையியல் சார் அமைப்புகளில் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் கண்டுபிடிக்க இது போதும். ஆனால், விட்டத்தின் வளைமையால் தோன்றும் இடப்பெயர்ச்சிகளை நாம் இங்குப் புறக்கணித்துள்ளோம். மாறாய் இவற்றையும் நாம் கணக்கிலெடுத்துக் கொள்ளும்போது, விட்டங்களின் (அல்லது பிற அமைப்புகளின்) விலக்கங்களைக் (Deflections) காண்பதற்குரியதோர் ஆற்றல்மிக்க கருவியாய் இக்கோட்பாடு விளங்கும். அமைப்புகளின் சமனிலையைக் கருதும்போது, அமைப்பின் ஒட்டுமொத்தமாய சமனிலை விதிகளைப் பயன்படுத்தித் தாங்கிஎதிர்வினைகளைக் கணக்கிடுகிறோம். இஃதன்றியும், அமைப்பினுள் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், சமனிலை நிலவ வேண்டும். ஆனால், இவ்வகைச் சமனிலைகளைக் கருதும்போது, அகவிசைகளையும் கணக்கிலெடுத்துக் கொள்ள வேண்டும் (கற்பனை விசைகளில் புறக்கற்பனை விசைகளுடன், அகக் கற்பனை விசைகளையும் கணக்கிற் கொள்ள வேண்டும்). கற்பனை வேலைக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்தி விலக்கங்களைக் காணும் முறைகளைப் பின்வரும் பகுதிகளிற் காண்போம்.

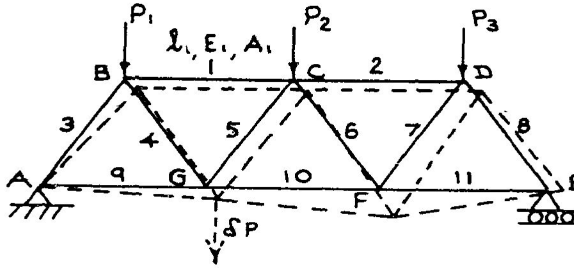
11.9 தூலக்கட்டுகளின் விலக்கங்கள்

படம் 11.15 இல் காட்டியுள்ள தூலக்கட்டு ஒன்றன்மீது P_1 , P_2 , P_3 ஆகிய விசைகள் செயல்படுகின்றன. இவற்றின் விளைவாய் G என்னும் இணைப்பில் தோற்றுவிக்கப்படும் கீழ்நோக்கிய விலக்கம் Δ_G எனக் கொள்வோம். இதனைக் காணக் கற்பனை வேலைக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்துவோம். இதன்பொருட்டு இப் புள்ளியில் கீழ்நோக்கிய திசையில் கற்பனை விசை δP செலுத்துவோம். இதன் அளவு '1' எனக் கொள்வோம். (இது 10^{-1000}N போன்று மிகச் சிறிய அலகாயிருக்கலாம்; அளவுபற்றிக் கவலையில்லை). இதன் விளைவாய்த் தோற்றுவிக்கப்படும் புறக் கற்பனை விசைகள் , δR_A , δR_E :

ஒவ்வொரு உறுப்பின்மீதும் செலுத்தப்படும் அகக் கற்பனை விசைகள்

δF_1 , δF_2 . . . . . δF_{11} எனக் கொள்வோம்.

(δF_i = 1 எனில், இவற்றை f_1 , f_2 , f_3 எனக் குறிப்பிடுதல் மரபு). இவ் விசைகள் செயல்பட்டுக் கொண்டிருக்கும் நிலையில் புறவிசைகள் செலுத்தப்பட, அதன் விளைவாய்ச் செய்யப்படும் கற்பனை வேலையைக் கணக்கிடுவோம். கற்பனை விசைகளால் தோற்றுவிக்கப்பட்ட இடப்பெயர்ச்சிகள் முன்னரே நிகழ்ந்து முடிந்தன (நம் கற்பனைப்படி).



உறுப்புகளின்

நீளங்கள் : L_1, L_2, . . .

நீள்மைக்கெழுக்கள்: E_1, E_2, . . .

வெட்டுமுகப் பரப்புகள் : A_1, A_2, . .

படம் 11.15

இவ் இடப் பெயர்ச்சிகளால் உண்மை விசைகள், .(கற்பனை) வேலையேதும் செய்வதில்லை; ஆனால் உண்மைவிசைகள் தோற்றுவிக்கும் இடப்பெயர்ச்சிகளின்பேர்து கற்பனை விசைகள் (புற அக விசைகள்* இரண்டும்) கற்பனை வேலை செய்கின்றன; இவற்றைக் கணக்கிடுவோம்.

உண்மை விசைகளில் R_A, R_B இரண்டன் மசயல்முனைகளின் கற்பனை இடப் பெயர்ச்சிகள் 0 ஆதலின், உறுப்புகளின் அகவிசையால் தோன்றும் கற்பனை இடப் பெயர்ச்சிகளே தேவை. உண்மைவிசைகளால் உறுப்புகளில் தோற்றுவிக்கப்படும் அகவிசைகள்

F_1, F_2, F_3 . . . F_{11} எனில்,

இவற்றின் விளைவாகத் தோன்றும் உறுப்புகளின் நீட்சி (குறுக்கங்)களே உண்மை இடப்பெயர்ச்சிகளாகும். அஃதாவது ,

$$\Delta_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1}, \qquad \Delta_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2}$$

முதலியனவாம். அதனால் மொத்தக் கற்பனை வேலை

$$\delta W^* = \delta P \times \Delta - (\delta F_1 \Delta_1 + \delta F_2 \Delta_2 + \ldots\ldots)$$

இங்கு $\delta P = 1$, அதற்கேற்ப $\delta F_1 = f_1$, $\delta F_2 = f_2$ . . . எனவும்

* புறவிசை செய்யும் வேலைகள் செலவு அகவிசைகள் செய்யும் வேலைகள் சேமிப்பு அதனால் இரண்டிற்கும் எதிரான குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்பட வேண்டும்.

$$\Delta_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1}, \qquad \Delta_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2}$$ எனவும் கொள்ள,

$$\delta W = \Delta - \left\{ \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1} f_1 + \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} \cdot f_2 + \ldots\ldots \right\} = 0$$

அஃதாவது $$\Delta = \Sigma \frac{F_i L_i}{A_i E_i} f_i \qquad (11.37)$$

சமன்பாடு 11.37 ஐப் பயன்படுத்தும்போது கவனிக்க வேண்டிய குறிப்புகள்:

1. கணக்கிடப்பட வேண்டிய விலக்கம் எப் புள்ளியில் எத் திசையில் தேவைப்படுகிறதோ, அப் புள்ளியில் அத் திசையிலேயே கற்பனை விசை δP (= 1) செலுத்தப்பட வேண்டும்.
2. Δ_1, Δ_2 முதலியன நீட்சிளாயின், f_1, f_2 முதலியன நீள்விசைகளெனில் இவற்றின் கற்பனை வேலைகள் நேர்மறையாயும் அன்றேல், எதிர்மறையாயும் இருக்கும்.
3. Δ_1, Δ_2 முதலான குறுக்கங்களாயினும் இதே முறையில் f_1, f_2 இறுக்கு விசைகளெனில் நேர்மறை வேலை செய்யப்படும். அதனால், பொதுவாய் F_i , f_i இரண்டும் ஒரேதன்மையனவெனில் கற்பனை வேலை நேர்மறையாயும், எதிரான தன்மையன வெனில், கற்பனை வேலை எதிர் மறையாயும் விளங்கும். சமன்பாடு 11.37 இன் பயன்பாட்டிற்கு எடுத்துக் காட்டுகள் சில காண்போம்.

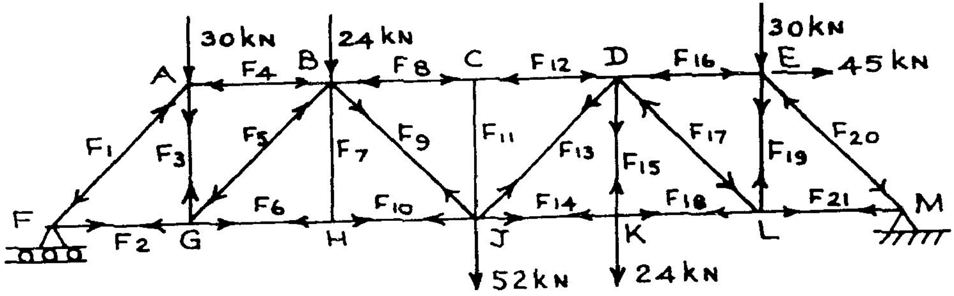
எ.கா. 11.4

படம் 11.16 இல் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகத்தில் இணைப்பு H இன் குத்து விலக்கம் (Vertical Deflection), இணைப்பு F இன் கிடை விலக்கம் (Horizontal Deflection) இவற்றைக் கற்பனை வேலைக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுக.

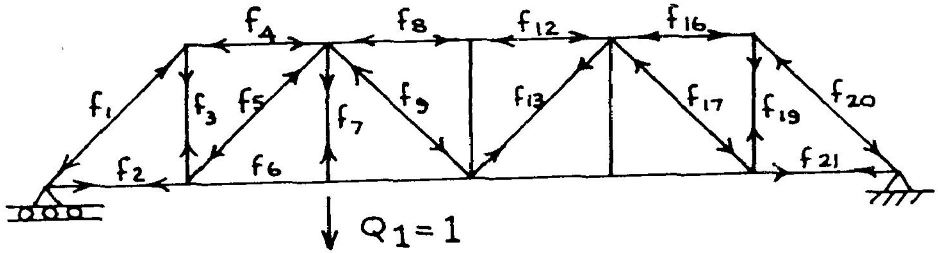
தீர்வு: கற்பனை வேலைக் கோட்பாட்டின்படி விலக்கங்களைக் காணுதற்குரிய வழிமுறைகள்:

1. புறச்சுமைகளால் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் தோற்றுவிக்கப்படும் அகவிசைகள் கணக்கிடப்பட வேண்டும்; இவையே F_1, F_2 . . . என்பன.
2. குறிப்பிட்ட புள்ளியில், எத் திசையில் விலக்கம் தேவையோ, அத் திசையில் ஓர்அலகு கற்பனைவிசை செலுத்தி, அதனால் உறுப்புகளில் தோற்றுவிக்கப்படும் கற்பனை அகவிசைகளைக் கணக்கிட வேண்டும். இவற்றை

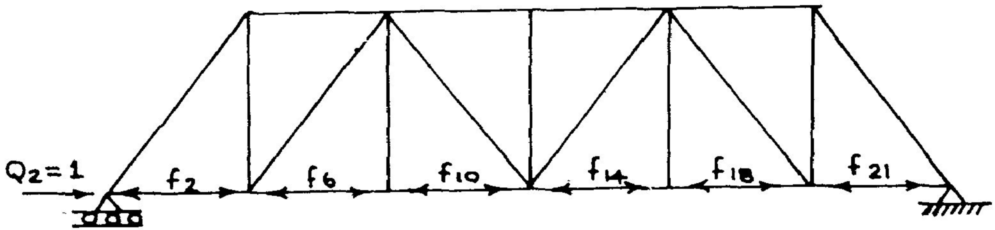
$$f_1, \quad f_2, \quad f_3 \quad \ldots.$$ எனலாம்.



a) புற விசைகளின் விளைவு



b) இணைப்பு H இல் அலகுக் கற்பனை விசை



c) இணைப்பு F இல் அலகுக் கற்பனை விசை

படம் 11.16

3. இனிக் கற்பனை வேலைக் கோட்பாட்டின்படி விலக்கம்

$$\Delta = \Sigma \frac{F_i\ L_i}{A_i\ E_i} f_i$$

பத்தாம் அத்தியாயத்தில் விவரிக்கப்பட்டுள்ள முறைகளில் ஏதாவதொன்றனைப் பயன்படுத்தி உறுப்பு விசைகள் முதலில் ஆயப்படவேண்டும். ஆய்ந்து காணப்பட்ட விடைகள், பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. (கணக்கிட்டுச் சரிபார்க்க) அடுத்து, இணைப்பு H இல் கீழ்நோக்கிய கற்பனை விசை, ஓர் அலகு அளவில் செலுத்தி, அதன் விளைவாய்த் தோற்றுவிக்கப்படும் அகவிசைகளையும், இணைப்பு F இல் இடமிருந்து வலம் நோக்கிய திசையில் ஓர் அலகு அளவில் கற்பனை விசை செலுத்தி, அதனால் தோற்றுவிக்கப்படும் அகவிசைகளையும் கணக்கிட்டு, அவற்றை முறையே f_1 , f_2 , f_3 . . . . எனப் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (படம் 11.16 நோக்குக) அலகு கற்பனை விசைகள் Q_1, Q_2 எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன (f_1, f_2 முதலிய கற்பனை அகவிசைகள் Q_1, f_2 முதலாய ஒவ்வொரு அலகு கற்பனை விசைக்கும் கணக்கிட்டு f_{11} , f_{12} , f_{13} என இரட்டைக் கீழடைகளால் குறிப்பிடப்படுதலும் உண்டு).

இப் பட்டியலில் உறுப்புகளின் அகவிசைகள் தரப்பட்டுள்ளன. விலக்கம் கணக்கிட ஒவ்வொரு உறுப்பின் நீளம் மட்டுமன்றி, குறுக்குப் பரப்பு A_i , நீள்மைக் கெழு E_i ஆகியனவும் தெரிய வேண்டும் என்பதனைச் சமன்பாடு 11.37 உணர்த்துகிறது. இங்கு (எல்லா உறுப்புகளுக்கும்) $E = 200$ kN/mm^2, $A=5000$ mm^2 எனக் கொண்டு விலக்கங்களைக் கணக்கிடுவோம்.

1. இணைப்பு H இல் குத்துத்திசை விலக்கம்

$$\Delta_{yh} = \Sigma \frac{F_i\ L_i}{A_i\ E_i} f_i$$

இதில் அளவுகள் அனைத்தும் சீரான அலகுகளால் குறிப்பிடவேண்டுமாதலின், உறுப்புகளின் நீளங்களும் mm அலகுகளால் உரைக்கப்படவேண்டும். ஆனால், பட்டியலில் இவை m அலகுகளால் உரைத்திருப்பதால் மொத்த விடையை ஆயிரத்தால் பெருக்க, விலக்கத்தின் அளவு mm அலகுகளில் கிடைக்கும்.

$$\Delta_{yh} = \frac{1000}{AE} \Sigma F_i\ f_i\ L_i$$

$$= \frac{1000}{5000 \times 200} \times 1436.36 = 1.4364 \text{ mm}$$

அவ்வாறே இணைப்பு F இல் கிடைவிலக்கம்,

உறுப்பு	நீளம்	புறச்சுமை களால் உறுப்பு விசை	இணைப்பு H இல் அலகு கற்பனை விசையால்		இணைப்பு A இல் அலகு கற்பனை விசையால்	
			உறுப்பு விசை		உறுப்பு விசை	
m_i	L_i	F_i kN	f_i	$F_i f_i L_i$	f_i	$F_i f_i L_i$
1	5	– 87.5	– .833	364.58	0	0
2	3	52.5	0.5	78.75	– 1	– 157.5
3	4	40.0	+ 0.667	106.72	0	0
4	3	– 52.5	– 0.5	78.75	0	0
5	5	– 50.0	– 0.833	208.33	0	0
6	3	82.5	0	0	– 1	– 247.5
7	4	0	1	0	0	0
8	3	– 94.5	– 0.75	212.63	0	0
9	5	+ 20.0	– 0.4166	– 41.66	0	0
10	3	82.5	0	0	– 1	– 247.5
11	4	0	0	0	0	0
12	3	– 94.5	– 0.75	212.63	0	0
13	5	45.0	0.4166	93.75	0	0
14	3	67.5	0	0	– 1	— 202.5
15	4	20.0	0	0	0	0
16	3	– 22.5	– .25	16.88	0	0
17	5	– 75.0	– 0.4166	156.25	0	0
18	3	67.5	0	0	– 1	– 202.5
19	4	60.0	0.333	80.00	0	0
20	5	22.5	– 0.4166	– 46.875	0	0
21	3	– 112.5	.25	– 84.38	– 1	– 337.5
			$\Sigma F_i f_i L_i$	1436.36		– 1395.0

பட்டியல் 1 (எ.கா. 11.4)

$$\Delta_{xf} = \frac{1000}{5000 \times 200} \times (-1395) = -1.395 \text{ mm}$$

Δ_{xf} எதிர்மறையாய் வருவதால், விலக்கம் அலகு கற்பனை விசையின் திசைக்கு எதிராயது எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 11.4 இல் எல்லா உறுப்புகளும் ஒரேயளவில் வெட்டுப் பரப்பு A, நீள்மைக் கெழு E இரண்டும் கொண்டனவாய்க் கருதி விலக்கங்களைக் கணக்கிட்டோம். ஆனால், இத்தகைய சட்டகங்களை நடைமுறையில் காணமுடியாது. இவ் எடுத்துக்காட்டிலேயே, அகவிசையேலாத உறுப்புகளும், 20 kN, 22.5 kN முதலாய குறைந்த அகவிசையேற்கும் உறுப்புகளும், 94.5 kN, 112.5 kN முதலாய மிக அக விசையேற்கும் உறுப்புகளும் இருக்க காண்கிறோம். இவையனைத்திற்கும் ஒரேயளவில் வெட்டுமுகப் பண்புகள் கொண்ட உறுப்புகளைப் பயன்படுத்தல் வீண்பொருட் செலவே. (ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் தேவையான வடிவமைப்புகளைக் கட்டுமானப் பொறியியலிற் கற்கலாம்). அதனால், பொதுவாய முறையைச் சுட்டும் எடுத்துக்காட்டு ஒன்றனைக் காண்போம்.

எ.கா 11.5

படம் 10.23 இல் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகத்தில் உறுப்புகள் JB, HC, FD இவற்றின் நீள்மைக்கெழு 120 kN/mm^2, AJ, AG, AE இவற்றின் நீள்மைக் கெழு, 210 kN/mm^2; ஏனைய உறுப்புகளின் நீள்மைக்கெழு, 80 kN/mm^2; உறுப்புகள் AE, EF, FD, இவற்றின் குறுக்குப் பரப்புகள் : 3000 mm^2; JB, JH, HC இவற்றின் குறுக்குப் பரப்புகள் : 1000 mm^2; ஏனை உறுப்புகளின் குறுக்குப் பரப்புகள், 2000 mm^2 எனில், இணைப்புகள் 1, 3 இவற்றின் விலக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

சட்டகத்தில் புறச்சுமைகள் தோற்றுவிக்கும் உறுப்பு விசைகளைக் கணக்கிட்டு, அவற்றை F_1, F_2 . . . . . எனக் கொள்வோம்; இணைப்பு 1 இல் x, y திசைகளில் விலக்கங்கள் முறையே Δ_1 , Δ_2 எனவும், இணைப்பு 3 இல் x, y திசைகளில் விலக்கங்கள் முறையே Δ_3 , Δ_4 எனவும் கொள்வோம். இவற்றின் திசைகளில் அலகு கற்பனை விசைகள் ($Q_{x1} = 1$, $Q_{y1} = 1$, $Q_{x3} = 1$, $Q_{y3} = 1$) செலுத்தி, அவை தோற்றுவிக்கும் (கற்பனை) உறுப்பு விசைகளும் கணக்கிடப்பட்டுப் பட்டியல் 2 இல் தரப்பட்டுள்ளன; உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றன் நீளம், குறுக்குப் பரப்பு நீள்மைக்கெழு, யாவும் இதே பட்டியலில் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றால் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் $\frac{FL}{AE} \cdot f$ அளவுகளும் ஒவ்வொரு கற்பனை அலகு விசைக்கும் தனித்தனியே கணக்கிடப்பட்டுள்ளன. இவற்றைக் கூட்ட, (உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை,)

உறுப்பு k	நீளம் L_k mm	குறுக்குப் பரப்பு A_k mm^2	நீள்மைக் கெழு E_k, kN/mm^2	F_k kN	$\frac{F_k \cdot L_k}{A_k \cdot E_k}$ (sk)	இணைப்பு 1 இல் அலகு விசை $Q_{x1} = 1$		இணைப்பு 1 இல் அலகு விசை $Q_{y1} = 1$		இணைப்பு 3 இல் அலகு விசை $Q_{x3} = 1$		இணைப்பு 3 இல் அலகு விசை $Q_{y3} = 1$	
						f_{1k}	$s_k f_{1k}$	f_{2k}	$s_k f_{2k}$	f_{3k}	$s_k f_{3k}$	f_{4k}	$s_k f_{4k}$
AJ	3606	2000	210	36.06	.3096	1.8	.557	0	0	0	0	0	0
JB	3000	1000	120	– 30	–.75	–1.5	1.125	+1	–.75	0	0	0	0
JH	2000	1000	80	+15	.375	0	0	0	0	0	0	0	0
HC	3000	1000	120	–30	–.75	–1.5	1.125	+1	–.75	0	0	0	0
GH	3606	2000	80	–43.3	–.977	–.3	.293	0	0	–1.202	1.174	–.3	.293
GA	3041	2000	210	66.91	.484	1.774	.859	0	0	1.014	.491	1.267	.613
GF	2500	2000	80	39	.609	.167	.102	0	0	.833	.508	.167	.102
AE	3041	3000	210	106.45	.771	1.943	1.498	0	0	1.859	1.433	1.833	1.413
FE	3905	3000	80	–50.77	–.826	–.217	.179	0	0	–1.085	.896	–.727	.6
FD	3000	3000	120	–66	–.55	–1.75	.963	+1	–.55	–1.0	.55	–.25	.14
		$\sum_{j=1}^{n} \frac{F_k \cdot L_k}{A_k \cdot E_K}$					6.692		–2.03		5.052		3.161

பட்டியல் 2 (எ.கா. 11.5)

(10 ஆம் அத்தியாயத்தில் (வரை படமுறை) காணும் தீர்வு தோராயமே. இங்குச் சரியான தீர்வு தரப்பட்டுள்ளன.

இணைப்பு 1 இல் x திசை விலக்கம், $\Delta_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k L_k}{A_k E_k} f_{1k} = 6.692$ mm

இணைப்பு 1 இல் y திசை விலக்கம், $\Delta_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k L_k}{A_k E_k} f_{2k} = -2.03$ mm

இணைப்பு 3 இல் x திசை விலக்கம், $\Delta_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k L_k}{A_k E_k} f_{3k} = 5.052$ mm

இணைப்பு 3 இல் y திசை விலக்கம், $\Delta_4 = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k L_k}{A_k E_k} f_{4k} = 3.161$ mm

11.10 விட்டங்களின் விலக்கங்கள் (Deflections of Beams)

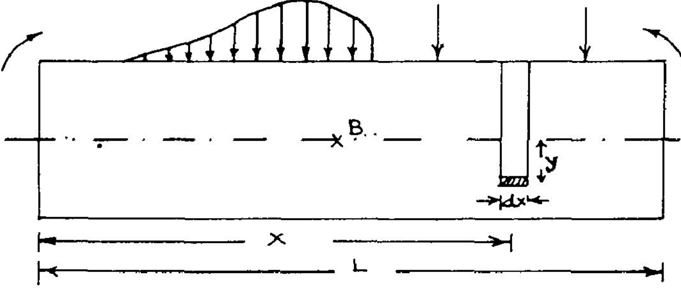
விட்டங்களின் விலக்கங்களைக் காண்பதற்கு எவ்வாறு கற்பனை வேலைக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்தலாம் என்பதனை இங்கு நோக்குவோம். படம் 11.17 இல் சுமையேற்றப்பட்டுள்ள விட்டமொன்றும் அதன் தகைவில் அச்சின் விலக்கங்களும் காட்டப்பட்டுள்ளன. அவ் விட்டத்தில் ஒவ்வொரு வெட்டுமுகத்திலும் செயல்படும் வளைதிருப்புமையை M_x , எனவும், நறுக்கு விசையை Q_x எனவும் குறிப்பிடுவோம். அவ் விட்டத்தின் ஒவ்வொரு வெட்டுமுகத்தின் விலக்கத்தையும் அதன் தகைவில் அச்சின் விலக்கத்திற்குச் சமமாகவே கொள்ளலாம். ஆயத்தொலை x கொண்ட வெட்டு முகத்தின் விலக்கத்தை Δ_x எனவும், இவ் விட்டத்தில் அச்சின் சாய்வினை θ_x எனவும் கொள்வோம். படத்தில் B என்னும் வெட்டுமுகத்தின் விலக்கமும் (Deflection), சரிவும் (Slope) முறையே Δ_B , θ_B எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவ் இரண்டன் அளவுகளுக்குரிய கோவைகளை நிறுவுதற்குக் கற்பனை வேலைக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்துவோம்.

Δ_B க்குரிய கோவை :

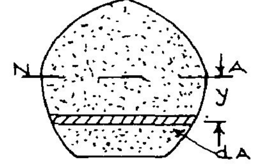
B என்னும் வெட்டுமுகத்தில் கீழ்நோக்கிய அலகு கற்பனை விசை ($\delta P_B = 1$) செலுத்துவோம். இவ் விசை செயல்பட்டுக்கொண்டிருக்கும்போது (இதன் விளைவாய் விட்டத்தினுள் அகவிசைகளும் செயல்பட்டுக்கொண்டிருக்கும்) புறவிசைகளைச் செலுத்துவதாய்க் கருதுவோம். இப் புறவிசைகள் தோற்றுவிக்கும் மெய்யான இடப்பெயர்ச்சி (Real Displacements) களின்போது, இக் கற்பனை விசைகள் செய்யும் கற்பனை வேலையின் மொத்தம் 0 என்னும் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்துவோம். (அஃதாவது, புறக் கற்பனைவிசை செய்யும் வேலையை அகக் கற்பனை விசைகள் செய்யும் மொத்த வேலைக்குச் சமன் செய்வதனால்)

(i) புறக் கற்பனை வேலை $= -\delta P_B \, \Delta_B = -\Delta_B$

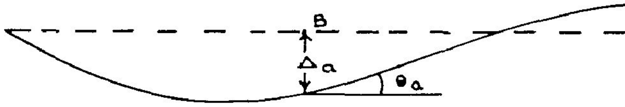
(ii) அகக் கற்பனை வேலை;



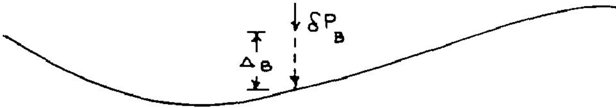
(a) விட்டமும் சுமைகளும்



(b) வெட்டுமுகம்



(c) தகைவில் அச்சின் விலக்கங்கள்



$\delta W = \Delta_B \; \delta P_B = \Delta_B$

(d) கற்பனை விசை $\delta P_B (=1)$ செய்யும் வேலை.



$\delta W = \theta_B \; \delta M_B = \theta_B$

(e) கற்பனைத் திறன் δM_B செய்யும் வேலை

படம் 11.17

இதனைக் காண ஆயத்தொலை x கொண்ட வெட்டுமுகத்தைச் சூழ்ந்த பகுதியில், தகைவில் அச்சிலிருந்து y தூரத்தில் உள்ள நீளம் dx உம், பரப்பு dA உம் கொண்டதொரு துணுக்கின் மீது செயல்படும் அகக்கற்பனை விசை செய்யும் வேலைக்கான கோவையை நிறுவி, அதனை விட்டத்தின் கனஅளவு முழுமைக்கும் தொகுப்போம்.

அலகுக் கற்பனைச் சுமை δP_B செலுத்தப்படும்போது விட்டத்தின் வெட்டுமுகங்களில் தோற்றுவிக்கப்படும் கற்பனை வளைதிருப்புமை m(x) என்று ஆயத்தூரத்தின் சார்பலனாக உரைத்து m_x என்று குறிப்பிடுவோம்.

x ஆயத்தொலைவில், தகைவில் அச்சிலிருந்து

y தூரத்தில் உள்ள துணுக்கில் கற்பனைத் தகைவு , $\delta\sigma = \dfrac{m_x\ y}{I_x}$

இத்துணுக்கில் கற்பனை விசை, $d\delta F = \delta\sigma . dA = \dfrac{m_x}{I_x} .y\ dA.$

இனி, துணுக்கில் கற்பனை விசை δF செயல்பட்டுக் கொண்டிருக்கும்போது புறச்சுமைகள் தோற்றுவிக்கும் உண்மையான இடப்பெயர்ச்சியைக் கணக்கிடுவோம்.

புறச்சுமைகள் இத்துணுக்கில்

தோற்றுவிக்கும் தகைவு $\sigma = \dfrac{M_x}{I_x} .y$

இதனால் துணுக்கின் நீட்சி, $\left(e = \dfrac{\sigma_x l}{E}\right) = \dfrac{M_x\ y}{I_x} . \dfrac{dx}{E_x}$

இந்நீட்சியின்போது கற்பனை விசை

$d\delta F$ செய்யும் கற்பனை வேலை, $d\delta U = d\delta F \times e$

$$= \frac{m_x . ydA}{I_x} \times . \frac{M_x\ y\ dx}{I_x . E_x}$$

எனவே விட்ட முழுவதிலும்

செய்யப்படும் கற்பனை அகவேலை, $\delta u = \int_v d\delta F . dV$

$$= \int_0^L \frac{M_x . m_x}{E_x . I^2_x} dx \int_A y^2 dA$$

$$= \int_0^L \frac{M_x . m_x}{E_x . I^2_x} I_x .dx$$

$$= \int_0^L \frac{M_x . m_x}{E_x . I_x} .dx \qquad (11.38)$$

மொத்தக் கற்பனை வேலை $= \delta U + \delta W = 0$

அல்லது $\int_o^L \frac{M_x . M_x . dx}{E_x} . I_x - \Delta_B = 0$

அஃதாவது $$\Delta_B = \int_o^L \frac{M_x . m_x . dx}{E_x . I_x} \qquad (11.39)$$

சமன்பாடு 11.39ஐ நிறுவும்போது, புறவிசைகள் தோற்றுவிக்கும் வளைதிருப்புமைகளை மட்டுமே கொண்டு துணுக்கின் நீட்சியைக் கணக்கிட்டோம். மேலும், இருக்கக்கூடிய நறுக்குவிசைகள், அச்சுவிசைகள் இவற்றைக் கருதவில்லை. பெரும்பாலாய விட்டங்களில் இவை மிகச் சிறிதளவேயிருக்குமாதலால், இவற்றைப் புறக்கணிப்பதால் பிழைகள் குறைவே. எனினும், துல்லியமான விடைகள் தேவையெனில் இவற்றையும் கணக்கிற் கொள்ளுதல் அவசியம்.

அடுத்து, வெட்டுமுகம் B இல் விட்ட அச்சின் சாய்வை θ_B எனக் கொள்வோம். இவ் வெட்டுமுகத்தில அலகு கற்பனைத் திருப்புமை δM_B (=1), செலுத்தப்பட்டுப் பின்னர், மெய்யான சுமைகள் செலுத்தப்படும்போது இக் கற்பனைத் திருப்புமை, δM_B செய்யும் கற்பனை வேலை

$$\delta W = - \theta_b . \delta M_B = - \theta_B$$

இக் கற்பனைத் திருப்புமையால் உறுப்பின் வெட்டுமுகங்களில் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமைகளை m_x என்னும் சார்பலனால் குறிப்பிட்டு மேற்கண்ட முறையிலேயே ஆய்வு செய்ய,

$$\theta_B = \int_o^L \frac{M_x . m_x}{E_x . I_x dx} \qquad (11.40)$$

என்று வெட்டுமுகத்தில் விட்டச் சாய்வு, θ வுக்குரிய கோவையைப் பெறுகிறோம். கோவைகள் 11.39, 11.40 இரண்டும் வடிவில் ஒன்றே. ஆனால், Δ_B க்குரிய கோவையில், (11.39), m_x என்பது, வெட்டு முகங்களில் அலகு கற்பனை விசை δP_B யால் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமை களைக் குறிக்க, இதே குறியீடு (m_x), θ_B க்குரிய கோவையில், அலகு கற்பனைத் திருப்புமை δM_B யால், வெட்டுமுகங்களில் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமைகளைக் குறிக்கிறது.

இக் கோவைகளைப் பயன்படுத்தும் முறையைச் சுருக்கமாய், ஒரு விட்டத்தின் ஏதாவது ஒருவெட்டுமுகத்தில் விலக்க (அல்லது சரிவு) அளவு இவ் விட்டத்தின்மீது புறச்சுமைகள் தோற்றுவிக்கும் வளைதிருப்புமைகள், M_x, விலக்கம் (அல்லது சாய்வு) தேவைப்படும் திசையில் ஓர்அலகு விசை (அல்லது திருப்புமை) செலுத்தப்படுவதால் வெட்டுமுகங்களில்

தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமைகள் m_x, ஆகியவற்றைக்கொண்டு விட்டத்தின் முழுநீளத்திற்கும் கணக்கிடப்படும் தொகையம்

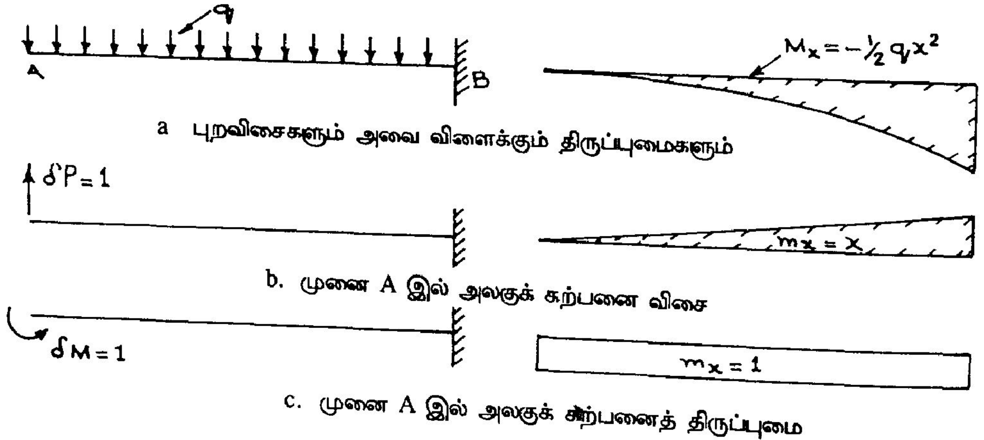
$$\int_{o}^{L} \frac{M_x . m_x dx}{B_x L_x} dx$$

ஆல் தரப்படுகிறது என உரைக்கலாம்.

இக் கோவைகளைப் பயன்படுத்தும் முறைக்கு இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

எ.கா. **11.6**

படம் 11.18 இல் காட்டப்பட்டுள்ள துருத்துவிட்டத்தின் நீளம் L, இதன் முழுநீளத்திலுமுள்ள வெட்டுமுகப் பண்புகள் சீரானவை; இவ்விட்டத்தின் முழு நீளத்திலும், சீரான தொடர்சுமை, q செலுத்தப்படுவதால், தொங்குமுனையில் தோற்றுவிக்கப்படும் விலக்கம், சரிவு இவற்றினைக் கணக்கிடுக.



a புறவிசைகளும் அவை விளைக்கும் திருப்புமைகளும்

b. முனை A இல் அலகுக் கற்பனை விசை

c. முனை A இல் அலகுக் கற்பனைத் திருப்புமை

படம் 11.18

தீர்வு:

புறச்சுமையால் வெட்டுமுகங்களில்

தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமை, $M_x = -q \frac{x^2}{2}$

தொங்குமுனையில் மேல்நோக்கிய அலகு விசை செலுத்தப்படுவதால்
தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமை, $m_x = +1.x = x$

முழு நீளத்திலும், E, I மதிப்புகள் நிலையாக உள்ளன. அதனால்

சமன்பாடு 11.39 இன்படி

$$\Delta_A = \int_o^L \frac{M_x \cdot m_x}{E_x \cdot I_x} \, dx = \int_o^L -q \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x}{EI} \, dx$$

$$\Delta_A = \frac{-q}{2EI} \left(\frac{x^4}{4} \right)_A^L = \frac{-q L^4}{8EI}$$

தொங்குமுனையில் கடிகை எதிர்திசையில் அலகு திருப்புமை செலுத்துவதால்
தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமை, $m_x = 1$

அதனால் தொங்குமுனையில் சரிவு,

$$\theta_A = \int_o^L \frac{-qx^2}{2EI} (-1) \, dx = + \frac{qL^3}{6EI}$$

எ.கா. **11.7**

படம் 11.8 (எ.கா. 11.2) இல் காணப்படும் தூருத்து விட்டத்தின் தொங்குமுனையின் விலக்கம், சரிவு ஆகியவற்றைக் கற்பனை வேலை முறையில் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

விட்டத்தின் புறவிசைகள் தோற்றுவிக்கும் வளைதிருப்புமைகள்

$$M_x = -300 \, x$$

தொங்கு முனையில் y திசையில் அலகுவிசை செலுத்துவதால் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமை, $m_{1x} = + x$ தொங்குமுனையில் கடிகை எதிர் (anticlockwise) திசையில் அலகு திருப்புமை செலுத்துவதால் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமைகள் $m_{2x} = -1$. அதனால் சமன்பாடு 11.39 இன்படி தொங்குமுனை விலக்கம்

$$\Delta = \int \frac{M_x \cdot m_{1x} \, dx}{E_x \, I_x}$$

$$= \int_{0}^{1000} \frac{-3000x\,.\,x\ dx}{E \times 10^{7}} + \int_{1000}^{2000} \frac{-3000x\,.\,x\ dx}{E \times 10^{7}} + \int_{2000}^{3000} \frac{-3000x\,.\times dx}{E \times 4 \times 10^{7}}$$

$$+ \int_{3000}^{4000} \frac{-3000x\,.x\ dx}{E \times 6.25 \times 10^{7}} + \int_{4000}^{5000} \frac{-3000x\,.\,x\ dx}{E \times 10^{8}}$$

$$= \frac{-3000}{2 \times 105 \times 10^{7}} \left[\int_{0}^{1000} x^2\,dx + \int_{1000}^{2000} \frac{x^2\,dx}{2.5} + \int_{2000}^{3000} \frac{x^2\,dx}{4} + \int_{3000}^{4000} \frac{x^2\,dx}{6.25} + \int_{4000}^{5000} \frac{x^2\,dx}{10} \right]$$

$$= \frac{-3}{2 \times 10^{9}} \left\{ \left(\frac{x^2}{3}\right)_{0}^{1000} + \left(\frac{x^3}{7.5}\right)_{1000}^{2000} + \left(\frac{x^3}{12}\right)_{2000}^{3000} + \left(\frac{x^3}{18.75}\right)_{3000}^{4000} + \left(\frac{x^3}{30}\right)_{4000}^{5000} \right\}$$

$$= -1.5 \left\{ \left(\frac{x^3}{3}\right)_{0}^{1} + \left(\frac{x^3}{7.5}\right)_{2}^{2} + \left(\frac{x^3}{12}\right)_{2}^{3} + \left(\frac{x^3}{18.75}\right)_{3}^{4} + \left(\frac{x^3}{30}\right)_{4}^{5} \right\}$$

$$= -1.5 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{7}{7.5} + \frac{19}{12} + \frac{37}{18.75} + \frac{61}{30} \right\} = -10.3\text{mm.}$$

இவ் எடுத்துக்காட்டின் தீர்வினை எ.கா. 11.2 இல் காணப்படும் தீர்வுடன் ஒப்பிடும்போது இரண்டும் ஏறத்தாழ ஒரேமாதிரி இருப்பதுபோல் தோன்றும். ஆனால் கட்டுரை 11.5 இல் சுட்டப்பட்டுள்ள முறையில் ஒரே ஒரு புறவிசை செயல்படும்போது அப் புறவிசையின் திசையில் விலக்கத்தைக் கணக்கிட மட்டுமே பயன்படும். ஆனால், கற்பனைவேலை முறையோ விட்டத்தின் எப்பகுதியிலும் விலக்கத்தைக் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது.

பயிற்சிகள்:

11.4 முறுக்கம் செலுத்தப்படும் தண்டு ஒன்றன் வெட்டுமுகத்தில் முறுக்கக் கோணத்தைக் கணக்கிட அங்கு, அலகு முறுக்குத் திருப்புமை செலுத்தி, அதனால் தண்டில் தோற்றுவிக்கப்படும் முறுக்குத் திருப்புமைகளை t_x என்றும், புறவிசைகளால் தோற்றுவிக்கப்படும் முறுக்குத் திருப்புமைகளை T_x என்றும் தண்டின் முனை உறழ்திருப்புமை நறுக்கக்கெழு G எனக் கொண்டு,

$$\theta_t = \int_{0}^{L} \frac{T_x . t_x . dx}{(GJ)} \qquad (11.41)$$

என நிறுவுக.

11.6 படம் 11.5 இல் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகத்தில் இறுக்கம் தாங்கும் உறுப்புகள் யாவும் $E = 72$ kN/mm^2, $A = 4000$ mm^2, கொண்டனவாகவும், நீள்விசை தாங்கும் உறுப்புகள் யாவும், $E = 208$ kN/mm^2, $A = 1800$ mm^2 கொண்டனவாகவும் இருப்பின் இணைப்பு C யின் விலக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

11.7 படம் 11.3 இல் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டகத்தின் உறுப்புகள் யாவும் $E = 120$ kN/mm^2 கொண்ட உலோகத்தால் ஆக்கப்பட்டவை. உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றன் குறுக்குப் பரப்பும், அவற்றுள் அச்சுத் தகைவுகள் 60 N/mm^2 இருக்குமாறு அமைக்கப் பட்டுள்ளனவெனில், இணைப்பு F விலக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

11.8 எ.கா. 11.2 இல் காணப்படும் விட்டத்தில் தொங்குமுனையின் சாய்வினைக் கற்பனை வேலை முறையில் கணக்கிடுக.

11.9 நீட்டம், L கொண்டதொரு எளிமை தாங்கி விட்டத்தில், அதன் இட முனையிலிருந்து, z தொலைவில் குவிசுமை P செலுத்தப்படுகிறது. இவ் விட்டத்தில் அதன் இட முனையிலிருந்து x தொலைவிலுள்ள வெட்டுமுகத்தில் விட்டத்தின் விலக்கத்தினை (Δx), $x < z$ எனக் கொண்டு

$$\Delta_x = \frac{P.x\,(L-z)}{6EIL}\,(2Lz - z^2 - x^2)$$ என நிறுவுக.

11.10 படம் 6.20 இல் காட்டப்பட்டுள்ள கூட்டுவிட்டத்தின் நீட்டம் முழுவதிலும் சீர்தொடர்சுமை $q = 20$ kN/m செயல்படின் $E = 200$ kN/mm^2 எனக் கொண்டு, விட்டத்தின் மைய விலக்கத்தையும் (Central Deflection), தாங்கிகளின் மீது விட்டத்தின் சாய்வினையும் கற்பனைவேலை முறையிற் கணக்கிடுக.

இவ் விட்டத்தின்மீது இடப்புறத் தாங்கியிலிருந்து 3m தொலைவில் குவிசுமை $Q = 240$ kN செலுத்தப்பட்டால், விட்டத்தின் மையத்தில் விலக்கத்தையும், விட்ட அச்சின் சாய்வையும் (Slope of Beam axis) கணக்கிடுக.

சமன்பாடுகள் 11.39, 11.40 இரண்டும் விட்டங்களில் விலக்கம், சரிவுகளைக் காணப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எனினும், இவற்றின் பயன் மிகப் பரந்தது. விட்டங்கள் மட்டுமின்றி உறுதி இணைப்புகள் (Rigid Joints) கொண்ட சட்டங்களின் விலக்கங்களைக் காண்பதிலும் இச்சமன்பாடுகளை, இதே வடிவில் பயன்படுத்தலாம். ஆனால், இவ்வகையில் பயன்படுத்து முன்னர் கொடுக்கப்பட்ட மெய்ச்சுமைகள், அலகு கற்பனை விசைகளால் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமைகளைக் கணக்கிடுவதில் தேர்ச்சி தேவை. இத்தகைய பயன்களைக் கட்டுமான ஆய்வியலில் (Structural Analysis) விரிவாயும் பரவலாயும் காணலாம்.

11.11 ஆற்றல் தேற்றங்கள் (Energy Theorems)

ஆற்றல் கோட்பாடுகளைப் பொருள்வலிமை இயலில் பயன்படுத்துதற்கு ஒருவழி கற்பனை வேலை முறை. இம் முறையின் பயன்களை நாம் விரிவாய்க் கண்டோம். இப் பகுதியில்

நாம் காணவிருக்கும் தேற்றங்கள் மூலம் ஆற்றல் கோட்பாடுகளை மேலும் செழுமைப்படுத்து வோம். இவ் அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்தில் நாம் கண்ட விகல ஆற்றல், இணை ஆற்றல் ஆகியவற்றின் சிறுமாறுபாடுகளை நோக்குவோம்.

$$\text{விகல ஆற்றல்} \qquad U = \int P\, d\Delta \qquad (11.8)$$

$$\text{இணையாற்றல்} \qquad C = \int dP\, \Delta \qquad (11.9)$$

எனக் கண்டோம். இவற்றுள் சமன்பாடு 11.8 ஐப் பயன்படுத்திச் சிற்சில அமைப்புகளில் விகல ஆற்றலினைக் கணக்கிட்டோம். இவ்வாறு கணக்கிடுகையில் விசை, நலிவு உறவினை (Force-Deformation Relationship) நேர்விகிதத்தில கற்பிதம் செய்துகொண்டு, நலிவுகளை விசை வழியாகவோ, $\left(\Delta = \frac{P}{k}\right)^*$ விசைகளை நலிவு வழியாகவோ ($P = k\,\Delta$) உரைத்தோம். இவ்வாறு கற்பிதம் செய்தல், கோட்பாட்டின் பயனிற்கு வரம்பு விதிக்கிறது. அஃதாவது கோட்பாட்டினை, அமைப்பின் எல்லாப் பகுதிகளிலும் (எல்லாத் துணுக்குகளிலும்) விகலங்கள் மீட்சி எல்லைக்குள் இருக்கும் அமைப்புகளுக்குமட்டுமே இவற்றைப் பொருத்தலாம். அதனால், இக் கற்பிதத்தை விட்டு விட்டுப் பொதுவாய அணுகுமுறையை மேற்கொண்டு எல்லா வகையான அமைப்புகளுக்கும் பொருந்தும் தேற்றங்கள் நிறுவப்பட்டுள்ளன.

இக் கண்ணோட்டத்தில் சமன்பாடு 11.8 ஐ நோக்குவோம். இதில் அடிப்படை மாறி, இடப்பெயர்ச்சி Δ தான். இடப்பெயர்ச்சியின் ஒவ்வொரு அளவிற்கும் உரிய புறவிசை P ஐ இடப்பெயர்ச்சியின் வழி உரைத்து, தொகையத்தைக் கணக்கிட $U = f(\Delta)$ எனப் பெறுவோம். அஃதாவது, இங்கும் P யை Δ வழி உரைக்க, $P = k\Delta$ என்னும் உறவைப் பயன்படுத்தித்தான் ஆகவேண்டும். ஆனால், k என்பது மாறா விகிதம் எனக் கொள்ளாமல், இதனையும் Δ இன் சார்பலனாய் ($k = f(\Delta)$) உரைக்க வேண்டும். ஓர் அமைப்பின் மொத்த இடப்பெயர்ச்சிக் கூறுகள் Δ_1, Δ_2, ... Δ_n எனில், விகல ஆற்றல் U ஐ

$$U = U(\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3 \ldots\ldots \Delta_n)$$

என உரைக்கலாம். இங்கு Δ_1, Δ_2 ..... Δ_n என்பன, புற விசைகள், $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ இவற்றின் செயல்முனைகளின் இடப் பெயர்ச்சிகளே. அதனால் U என்பது பலமாறிகள் சார்ந்த சார்பலன் (Function of Several Variables) எனக் காண்கிறோம். Δ_1, Δ_2, Δ_3 முதலாய இடப்பெயர்ச்சிக் கூறுகளின் சிறுமாற்றங்களை (உலைவுகளை) $d\Delta_1$, $d\Delta_2$, $d\Delta_3$ எனக் குறிப்பிட்டு அவற்றின் விளைவான ஆற்றல் மாற்றம் dU எனில் அதனை,

* $1/k = f$ எனக் கொண்டு $\Delta = f.p$ எனவும் உரைக்கலாம்.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} \cdot d\Delta_1 + \frac{\partial U}{\partial \Delta_2} \cdot d\Delta_2 + \ldots\ldots \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} d\Delta_i + \frac{\partial U}{\partial \Delta_n} d\Delta_n$$

என உரைக்கலாம். இவ்வாற்றல் மாற்றம் dU ஐத் தோற்றுவிக்கப் பல வழிகள் உள. அவற்றுள் ஒன்று, புறவிசைகள் P_1, P_2,....P_n ஆகியவற்றின் செயல்முனைகளுக்குச் சிறு இடப்பெயர்ச்சி களைத் தோற்றுவித்தல். இவ் இடப் பெயர்ச்சிகள் (இவை கற்பனையாயினும், மெய்யாயினும், நாம் கருதும் விசைகளால் தோற்றுவிக்கப்படாதவை) $d\Delta_1$, $d\Delta_2$, ... $d\Delta_n$ எனக் கொண் டால் விகல ஆற்றலின் மாற்றத்தை,

$$dU = P_1 d\Delta_1 + P_2 d\Delta_2 + \ldots P_n d\Delta_n$$

எனவும் உரைக்கலாம். ஒருகுறிப்பிட்ட விசையின் செயல்முனையில்மட்டும் இவ் இடப் பெயர்ச்சி தோற்றுவிக்கப்படுவதாய்க் கொண்டால், (அஃதாவது,

$$d\Delta_1 = d\Delta_2 = \ldots = d_{i-1} = d_{i+1} = \ldots d_n = 0$$

$d\Delta_i \neq 0$ எனவும் கொண்டால்)

ஆற்றல் மாறுபாடு $$dU = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} d\Delta_i = P_i \quad d\Delta_i$$

எனப் பெறுகிறோம். அல்லது

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \qquad (11.42)$$

சமன்பாடு 11.42, கேஸ்டிலியானோவின் முதல்தோற்றம் (Castigliano's first theorem) என வழங்கப்படுகிறது. சொற்களில் இதனை, ஓர் அமைப்பில் தேக்கி வைக்கப்பட்டுள்ள மொத்த விகல ஆற்றலின் பெயர்ச்சிசார் பகுதி வகைக்கெழு (**Partial Derivative with reference to displacements**) வகைப்படுத்தும் பெயர்ச்சியின் திசையில் செயல்படும் புறவிசையின் அளவுக்குச் சமமாயிருக்கும். என உரைக்கலாம்.

அஃதாவது, ஓர் அமைப்பின்மீது செயல்படும் புறவிசைகள் P_1, P_2 .... தெரியா நிலையில் (இவற்றுள் சில விசைகள் தெரிந்தனவாயிருக்கலாம்) இவ் விசைகளின் செயல்முனைகளின் இடப்பெயர்ச்சிகள் Δ_1, $\Delta_2 \ldots \Delta_n$ முதலியனவும், இவற்றின் சார்பலனாய் மொத்த விகல ஆற்றல் U உம் அறியப்படின், தெரியாத விசைகளைக் காண இத் தேற்றத்தினைப் பயன் படுத்தலாம்.

அடுத்து இணையாற்றல் C இன் மாற்றங்களை நோக்குவோம். சமன்பாடு 11.9 இல் அடிப்படை மாறிகள் $P_1, P_2 \ldots P_n$ முதலான புறவிசைகள் ; அதனால் இடப்பெயர்ச்சிக் கூறுகள் 1, 2 முதலியவற்றுக்கு,

$$\Delta_1 = f_1 P_1, \ \Delta_2 = f_1 P_2$$

முதலாய உறவுகளைப் பயன்படுத்தி (இங்கும் f_1, f_2 முதலிய விகிதங்களின் அளவுகள் புறவிசைகள் P_1, P_2 இவற்றின் சார்பலன்களாயிருக்கலாம்.) தொகையத்தினைக் கணக்கிட, இணை ஆற்றலைப் புறவிசைகளின் சார்பலனாய்,

$$C = C\ (P_1\ ,\ P_2 \ldots\ldots. P_n)$$

என உரைக்கலாம். இதன் மாறுபாடு dC ஐயும்

$$dC = \frac{\partial C}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial C}{\partial P_2} dP_2 + \ldots\ldots \frac{\partial C}{\partial P_n} dP_n$$

என உரைக்கலாம். மேலும் இவ் இணையாற்றல் மாற்றத்தினை dP_1 , dP_2 முதலாய விசை வேறுபாடுகள் இத் திசைகளின் பெயர்ச்சிக் கூறுகளாய Δ_1 , Δ_2 , .. முதலிய தூரங்கள் நகரும்போது செய்யப்படும் புறவேலையாயும் கொள்ளலாம். அஃதாவது,

$$dC = \Delta_1 dP_1 + \Delta_2 dP_2 + \ldots\ldots.. + \Delta_n dP_n$$

என உரைக்கலாம்.

விசை P_i இன் அளவு மட்டும் dP_i அளவு மாற்றப்பட்டு ஏனைய விசைகள் மாறாமலிருப்பதாய்க் கருத,

$$dC = \Delta_i dP_i = \frac{\partial C}{\partial P_i} dP_i$$

எனப் பெறுகிறோம். அஃதாவது,

$$\Delta_i = \frac{\partial C}{\partial P_i} \qquad (11.43)$$

சமன்பாடு 11.43, எங்கெசர் தோற்றம் (Engesser Theorem) என அழைக்கப்படுகிறது. இதனைச் சொற்களால், ஓர் அமைப்பில் செயல்படும் புறவிசைகள் P_1, P_2 .... முதலியவற்றின் சார்பலனாய் அமைப்பின் மொத்த இணையாற்றல் அறியப்பட்டால், இவ் இணையாற்றலின் விசைசார் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் (Partial Derivatives with reference to Forces), வகைப்படுத்தும் விசையின் திசையிலாய இடப்பெயர்ச்சிக் கூற்றிற்குச் சமமாயிருக்கும். என உரைக்கலாம். தகைவு-விகல உறவு அல்லது விசை-நலிவு உறவு நேர்விகிதப் பொருத்தமுடன் விளங்கி, விகலங்களும் மீட்சி எல்லைக்குள் இருக்கும்போது இணையாற்றல், விகல ஆற்றல் இரண்டும் சமமாயிருக்கும் என்பதனையுணர்வோம். அதனால், சமன்பாடு 11.43 இல் C = U என்னும் உறவினைப் பயன்படுத்த,

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \qquad (11.44)$$

சமன்பாடு 11.44 **கேஸ்டிலியானோவின் இரண்டாம் தேற்றம்** (Costigliano's Second Theorem) என அமைக்கப்படுகிறது. இத் தேற்றத்தைச் சொற்களால் உரைக்க எங்கெசரின் தேற்றத்தில், இணையாற்றல் என்பதற்குப் பதிலாய், விகல ஆற்றல் எனக் கொண்டாற் போதும். இவ்வாறு எங்கெசர் தேற்றத்தின் ஒருகிளைத் தேற்றமாய் (Corroery) கேஸ்டிலியானோவின் இரண்டாம் தேற்றத்தை உரைக்கிறோம். எங்கெசர் தேற்றம் நிறுவுதற்குப் பத்தாண்டுகளுக்கு முன்னரே (1879 இல்) கேஸடிலியானோவின் இரண்டாம் தேற்றம் நிறுவப்பட்டிருந்தது.

கேஸ்டிலியானோவின் இரண்டாம் தேற்றம் ஏற்கனவே புழக்கத்திற்கு வந்துகொண்டிருந்த பொழுதில், (அன்றைய ஆய்வுகள் யாவும் மீள்தன்மைக்குள் நேர்விகிதத்தில் தகைவு விகல உறவுகள் கொண்ட அமைப்புகளிலேயே கவனம் செலுத்தியமையால்), எங்கெசரின் தேற்றம் புதிய கருவி எதனையும் தந்து விடவில்லை. ஆனால், பொருளின் தகைவு-விகல உறவுகளின் பிற தன்மைகளையும் கொண்டு ஆய்வுகள் தொடங்கப் பட்ட போது தான் எங்கெசர் தேற்றத்தின் பயன் உணரப்படலாயிற்று.

கேஸ்டிலியானோவின் முதல்தேற்றம், எங்கெசர் தேற்றம் ஆகியவற்றின் பயன்களைக் காணுதல் தொடக்கநிலையில் கற்போர்க்கு வேண்டுவதில்லை. கேஸ்டிலியானோவின் இரண்டாம் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நலிவுகளைக் காணும் முறைக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள் காண்போம்.

எ.கா. 11.8

நீட்டம், L முழுவதிலும் சீரான EI கொண்ட துருத்துவிட்டம் ஒன்றன் தொங்கு முனையில் செயல்படும் குவிசுமையின் அளவு P எனில், தொங்குமுனையின் விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

தொங்குமுனையை ஆயமையமாய்க் கொண்டு விட்டத்தில் ஆயத்தொலைவு x கொண்ட வெட்டுமுகத்தில் வளைதிருப்புமையை

$$M_x = -Px$$

என உரைக்கலாம்.

விட்டத்தின் மொத்த விகல ஆற்றல் $U = \int_0^L \frac{M_x^2\,dx}{2EI}$

அஃதாவது
$$U = \int_0^L \frac{(-Px)^2}{2EI} = \frac{P^2}{2EI}\int_0^L x^2\,dx$$
$$= \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

தொங்குமுனையில் செயல்படும் புறவிசை P எனவே கேஸ்டிலியானோவின் இரண்டாம் தேற்றப்படி $\frac{\partial U}{\partial P}$ என்பது தொங்குமுனையில் P இன் திசையில் விலக்கத்தின் அளவினைத் தரும். அதனால்,

$$P = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{P^2 L^3}{6EI}\right) = \frac{PL^3}{3EI}$$

இவ் விடையை, முன்னரே, விட்டத்தில் தேக்கப்படும் விகல ஆற்றலையும் புறவிசை P செய்யும் வேலையையும் சமன்படுத்துவதனால் பெற்றிருக்கிறோம். எ.கா. 11.6 போன்று, முனையில் குவிசுமை செயல்படாத விட்டத்தில் விலக்கத்தைக் காண, கேஸ்டிலியானோவின் தேற்றம் எவ்வாறு பயன்படும் என்பதனை அடுத்த எடுத்துக்காட்டிற் காண்போம்.

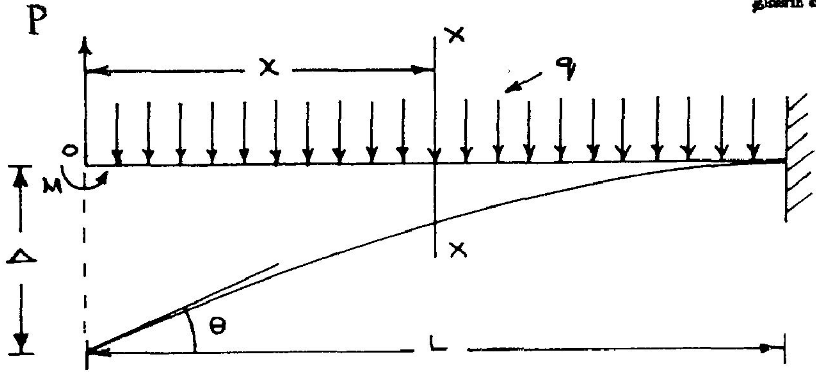
எ.கா. 11.9

நீட்டம், L முழுவதும் சீராய வெட்டுமுகப் பண்புகள் (EI) கொண்டதொரு துருத்துவிட்டத்தின் நீட்டம் முழுவதும், *சீர்தொடர்சுமை*, *q* செயல்பட்டால், விட்டத்தின் தொங்குமுனையில், விலக்கமும் சாய்வும் கேஸ்டிலியானோவின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு

விட்டத்தின் தொங்குமுனையில் விலக்கமும் *சாய்வும்* தேவைப்படுகின்றன. இங்குச் செயல்படும் குவிசுமை P, வளைதிருப்புமை M எனில் விலக்கம் $\partial U/\partial P$ எனவும், சாய்வு $\theta = \partial U/\partial M$ எனவும் கணக்கிடலாம். இவ் வெட்டுமுகத்தில் குவிசுமை P, வளைதிருப்புமை M இரண்டும் (P = 0, M = 0 என்ற அளவில்) செயல்படுவதாய்க்கொண்டு ஆற்றலைக் கணக்கிடலாம். இதன்பின் $\frac{\partial U}{\partial P}$, $\frac{\partial U}{\partial M}$ இவற்றுக்காய கோவைகளில் P = 0, M = 0 எனக் கொள்வதனால் Δ, θ இவற்றைக் காணலாம்.

விட்டத்தின் தொங்கு முனையை ஆயமையமாய்க் கொண்டு விட்டத்தின் சுமைகள் படம் 11.19 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. விட்டத்தின் தொங்குமுனையிலிருந்து x தொலைவிலுள்ள XX என்னும் வெட்டுமுகத்தில் வளைதிருப்புமை,



படம் 11.19

$$M_x = -M + Px - \frac{q}{2}x^2$$

அதனால், விட்டத்தில் விகல ஆற்றல்

$$U = \int_0^L \frac{M_x^2\,dx}{2EI} = \frac{1}{2EI}\int_0^L \left(-M + Px - \frac{q}{2}x^2\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\int_0^L \left(\frac{q^2}{4}\cdot x^4 - P\,.\,qx^3 + (P^2 + Mq)\,x^2 - 2PMx + M^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\left\{\frac{q^2}{20}L - \frac{PqL^4}{4} + (P + Mq)\frac{L^3}{3} - PML^2 + M^2L\right\}$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_{P=M=0} = \frac{1}{2EI}\left(-\frac{qL^4}{4} + \frac{2PL^3}{3} - ML^2\right)_{P=0,\ M=0}$$

$$= -\frac{qL^4}{8EI}$$

$$\theta = \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_{P=M=0} = \frac{1}{2EI}\left(\frac{qL^3}{3} - PL^2 + 2ML\right)_{P=0,\ M=0}$$

$$= \frac{qL^3}{6EI}$$

சுமைகள் இல்லா இடங்களில் 0 அளவுள்ள சுமைகள் செயல்படுவதாய்க் கொண்டு (அவற்றின் மதிப்புகளைத் தீர்வில்தான் 0 எனக்கொள்கிறோம்) ஆயும் இம் முறையில் இவ்வாறு

0 அளவுள்ளதாய்க் கொள்ளப்படும் சுமைகள், போலிச் சுமைகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. அதனால், இம்முறை போலிச்சுமை முறை (Dummy Load Method) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

முதலில் மொத்த விகல ஆற்றலைக் கணக்கிட்டுப் பின்னர் வகைப்பாடு செய்வதில் கணக்கீடுகள் சற்று அதிகமாயிருப்பதைக் காண்கிறோம். அதனால், இத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தும் மாற்றுவடிவு ஒன்றனை நோக்குவோம்.

$$U = \int_L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$ என்பது அறிவோம்

அதனால்,

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\int_L \frac{M^2\,dx}{2EI}\right) = \int_L \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{M^2}{2EI}\right)dx$$

என உரைக்கலாம்.

அஃதாவது, $$\frac{\partial U}{\partial P} = \int_L \frac{2M}{2EI}\,\frac{\partial M}{\partial P}\,dx$$

அல்லது, $$\frac{\partial U}{\partial P} = \int_L \frac{M}{EI}\,\frac{\partial M}{\partial P}\,dx$$

அல்லது $$\Delta_i = \int_L \frac{M}{EI}\,\frac{\partial M}{\partial P_i}\,dx \qquad (11.44)$$

சமன்பாடுகள் 11.44, 11.39 இரண்டும் வடிவில் ஒத்திருப்பதனை நோக்கலாம். $\frac{\partial M}{\partial P_i} = m_i$ என உணர, இரண்டு சமன்பாடுகளும் ஒன்றேயென்பதைக் காணலாம். இவ் எடுத்துக்காட்டில்,

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(-M + P_x - \frac{q}{2}x^2\right) = +\ x$$

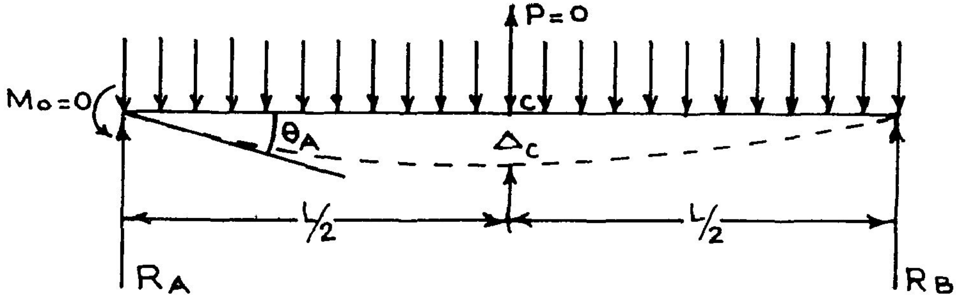
என்பதனைக் காண்கிறோம். சமன்பாடு 11.44 இல் Δ_i என்பது பொதுவான இடப்பெயர்ச்சிக் கூறு; இது விலக்கங்கள் Δ , சரிவுகள் θ யாவற்றையும் உள்ளடக்கவல்லது. இவ்வாறு P_i என்பது விசைகள், திருப்புமைகள் யாவற்றையும் உள்ளடக்கும் பொதுவாய விசைக் கூறாகும்.

எ.கா. 11.10.

ஓர் எளிமைதாங்கி விட்டத்தின் நீட்டம் L, வெட்டுமுகப் பண்புகள் சீராயவை எனில், விட்டத்தின் மீது நீட்டம் முழுவதும் சீர்தொடர்சுமை q செலுத்தப்படின், விட்டத்தின் மைய விலக்கம் (Central Deflection) முனைச் சாய்வு (End rotation) இவற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

விட்டமும் சுமைகளும் படம் 11.20 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.



படம் 11.20

இச் சுமைகளால் விட்டத்தின் இட முனைத் தாங்கியின் எதிர்வினை

$$R_A = \frac{qL}{2} - \frac{P}{2} + \frac{M_o}{L}$$

ஆயத்தொலைவு x கொண்ட வெட்டுமுகத்தில் வளைதிருப்புமை

$$M_x = R_A\, x - \frac{q x^2}{2} - M_o \qquad x < L/2$$

$$= R_A\, x - \frac{q x^2}{2} - M_o + P\left(x - \frac{L}{2}\right) \quad x > \frac{L}{2}$$

ஆனால், $R_A = \frac{qL}{2} - \frac{P}{2} + \frac{M_o}{L}$

இதனால், $M_x = \left(\frac{qL}{2} - \frac{P}{2} + \frac{M_o}{L}\right)x - \frac{q x^2}{2} - M_o, \quad x < L/2$

$$= \left(\frac{qL}{2} - \frac{P}{2} + \frac{M_o}{L}\right)x - \frac{q x^2}{2} - M_o + P(x - L/2), \quad x > L/2$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = -\frac{x}{2}, \; x < L/2$$

$$= \left(\frac{x - L}{2}\right) \qquad x > L/2$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_o} = \frac{x}{L} - 1$$

அதனால், கேஸ்டிலியானோவின் தேற்றத்தின்படி

$$\Delta = \int_0^L \frac{M_x}{EI} \frac{\partial M_x}{\partial P} \, dx$$

$$= \int_0^{L/2} \left\{\left(\frac{qL}{2} - \frac{P}{2} + \frac{M_o}{L}\right) x - \frac{qx^2}{2} - M_o \left(-\frac{x}{2}\right)\right\} dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_{L/2}^{L} \left\{\left(\frac{qL}{2} - \frac{P}{2} + \frac{M_o}{L}\right) x - \frac{qx^2}{2} - M_o + p(x - L/2)\right\} \times \frac{(x-L)}{2} \, dx$$

இவ்விரு தொகையங்களும் வரம்புள்ளவை (Definite). அதனால் தொகைப்படுகோவையில் (Integrand), 0 மதிப்புப் பெறும் அளவுகள் நீக்கப் பெறலாம். நீக்க,

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \frac{q}{4} (x^3 - Lx^2) \, dx + \int_{L/2}^{L} \frac{q}{4} (Lx - x^2)(x - L) \, dx$$

$$= -\frac{5L^4}{384 EI}$$

அடுத்து இடமுனைச் சாய்வு. $\theta_A = \int_0^L \frac{M_x}{EI} \frac{\partial M_x}{\partial M_o} \, dx$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{qL}{2} - \frac{P}{2} + \frac{M_o}{L}\right) x - \frac{qx^2}{2} - M_o \left(\frac{x}{L} - 1\right) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_{L/2}^{L} \left(\frac{qL}{2} - \frac{P}{2} + \frac{M_o}{L}\right) x \; \frac{qx^2}{2} - M_o + P\left(x - \frac{L}{2}\right)\left(\frac{x}{L} - 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} \frac{qx}{2}(L-x)\left(\frac{x}{L}-1\right)dx + \int_{L/2}^{L} \frac{qx}{2}(L-x)\left(\frac{x}{L}-1\right)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{L} -\frac{qx}{2}\left(\frac{L-x}{L}\right)^2 dx = -\frac{q}{2EIL}\int_0^{L} x(L-x)^2\,dx$$

$$\theta_A = -\frac{qL^3}{24EI}$$

Δ_C , θ_A இரண்டும் P , M_o ஆகியவற்றின் திசைக்கு எதிரானவை.

பயிற்சிகள்:

11.11 எடுத்துக்காட்டுகள் 11.9, 11.10 ஆகியவற்றுள் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டங்களின் *இடமுனையிலிருந்து a அளவு தூரத்திலுள்ள* வெட்டுமுகத்தில் விலக்கம், சாய்வு இவற்றுக்காய கோவைகளைக் கேஸ்டிலியானோவின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

11.12 ஓர் எளிமை தாங்கி விட்டத்தின் நீட்டம், L சீரான EI கொண்ட இவ் விட்டத்தின்மீது ஒரு பாதி நீட்டத்தில் சீர்தொடர்சுமை q செயல்படுகிறதெனில் விட்டத்தின் மையவெட்டு முகத்தில் விலக்கம், சாய்வு இவற்றைக் கணக்கிடுக.
விட்டத்தின் பொதுவாயதொரு வெட்டுமுகத்தில விலக்கமும் சாய்வும் கணக்கிடுதற்குரிய கோவைகளை நிறுவுக.

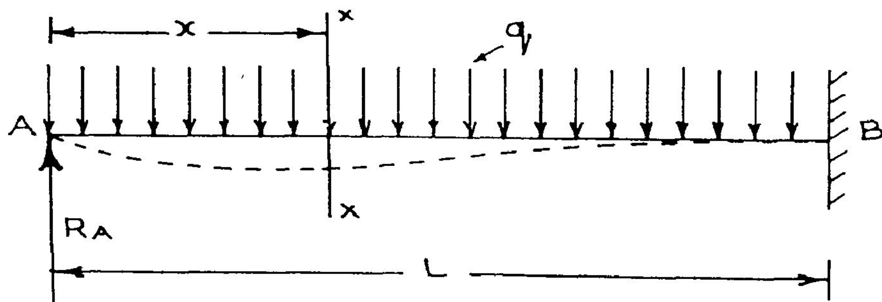
11.13 பயிற்சி *11.12* இல் *தரப்பட்ட* விட்டப் பொருளின் நீள்மைக்கெழு $E = 200\ kN/mm^2$, நீட்டம் 8m , சுமைதாங்கும் பகுதியில் $I = 3 \times 10^6\ mm^4$; எஞ்சியபகுதியில் $EI = 2 \times 10^6 mm^4$; செலுத்தப்படும் தொடர்சுமை $q = 20kN/m$ எனில், விட்டத்தில் $x = 2m$, $x = 4m$, $x = 6m$ ஆகிய ஆயத்தொலைவுகளிலுள்ள வெட்டுமுகங்களில், விலக்கம், சாய்வு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

11.14 6m நீட்டம் கொண்ட துருத்துவிட்டம் ஒன்றன்மீது செயல்படும் தொடர்சுமை, $q = 12$ kN/m. இவ் விட்டப் பொருளின் நீள்மைக் கெழு, $E = 8\ kN/mm^2$. இவ் விட்டத்தின் வெட்டுமுகம் அதன் நீட்டம் முழுதும் 600 mm சீரான உயரமும், அகலம் தொங்கு முனையில் 100 mm, தாங்கு முனையில் 250 mm கொண்டதெனில், விட்டத்தின் தொங்கு முனையில் விலக்கமும் சாய்வும் கணக்கிடுக.

கேஸ்டிலியானோவின் தேற்றம், விலக்கங்கள் காணுதற்குப் பயன்படுவதொடு மிகைதாங்கி அமைப்புகளின் தீர்வுகளுக்கும் பயன்படுகிறது. (அச்சு விசையேற்கும் நலிவுசார் அமைப்புகளின் தீர்வுகளை மூன்றாம் அத்தியாயத்தில் மீண்டும் நோக்குக). இதனை எடுத்துக்காட்டு ஒன்றுடன் விளக்குவோம்.

படம் 11.21 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டம் AB இன் முனை A இல் உருளைத் தாங்கியும், முனை B இல் உறுதித்தாங்கியும் அமைந்துள்ளன (நீட்டம் முழுவதிலும் வெட்டு முகம், சுமை இவை சீராகக் கொள்வோம்). இது மிகைத் தாங்கி அமைப்பு என்பதனைக் காணலாம். அதனால் சமனிலைச் சமன்பாடுகளை மட்டும்கொண்டு தீர்வு காணல் இயலாது. ஏனெனில், சமனிலைச் சமன்பாடுகள் இரண்டே ($\Sigma F_y = 0, \Sigma M = 0$) தெரியாத விசைகள் மூன்று; அவை

தாங்கி A இன் எதிர்வினை F_{yA}, தாங்கி B இன் எதிர்வினைகள் F_{yB}, M_B.



படம் 11.21

இங்குத் தாங்கிகளின் இடப்பெயர்ச்சிக் கூறுகளினால் எதிர் வினைகளுக்குத் தீர்வு காண இயலும். எடுத்துக்காட்டாய்த் தாங்கி, A இல் எதிர்வினை + R_A எனக் கொள்வோமெனில்,

$$M_x = R_A x - \frac{q x^2}{2}$$

எனலாம். கேஸ்டிலியானோவின் தேற்றப்படி தாங்கி A இல் விட்டத்தின் விலக்கம்

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{M_x}{EI} \frac{\partial M_x}{\partial R_A} \, dx$$

அஃதாவது $$\Delta_A = \int_0^L \left(R_A x - \frac{q x^2}{2} \right) (x) \, dx$$

$$\Delta_A = R_A \frac{L^3}{3} - \frac{q L^4}{8}$$

ஆனால், விட்டத்தின் முனையில் உருளைத் தாங்கியிருப்பதால், $\Delta_A = 0$

அதனால், $$R_A \frac{L^3}{3} - \frac{qL^4}{8} = 0$$

அல்லது $$R_A = \frac{3qL}{8}$$

இதிலிருந்து விட்டத்தில் வளைதிருப்புமைகளை

$$M_x = \frac{qx}{2}\left(\frac{3}{4}L - x\right)$$

எனவும், நறுக்கு விசைகளை,

$$Q_x = q\left(\frac{3}{8}L - x\right)$$

எனவும் , உரைத்து முழுமையான தீர்வு பெறலாம். மிகை எதிர்வினைகள் ஒன்றனுக்குமேல் பல இருப்பினும் கேஸ்டிலியானோவின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணலாம். எடுத்துக்காட்டொன்று காண்போம்.

படம் 11.22 இல் இருமுனைகளிலும் உறுதித்தாங்கிகள் (Fixed Suports) அமைக்கப்பட்ட விட்டம் ஒன்றனைக் காண்கிறோம். இங்கு எதிர்வினை மிகைமை. 2. ஆனால் எவையேனும் இரண்டு எதிர்வினைக் கூறுகளைப் புறவிசைகளாகக்கொண்டு தீர்வு காண்போம். படம் 11.22 (b) இல் R_A, M_A இரண்டும அளவு தெரியாத புறவிசைக்கூறுகள்.

இவற்றால், வளைதிருப்புமைகள்,

$$M_x = R_A x - M_A \qquad x < a$$

$$= R_A x - M_A - P(x-a) \qquad a < x < L$$

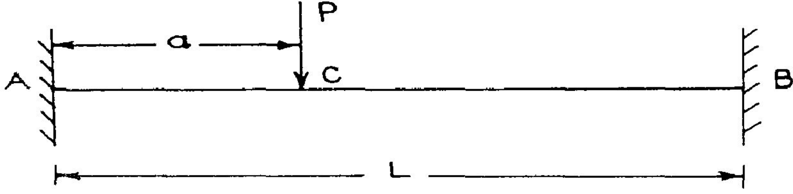
என உரைக்கலாம். மேலும்,

$$\frac{\partial M_x}{\partial R_A} = x \; ; \quad \frac{\partial M_x}{\partial M_A} = -1$$

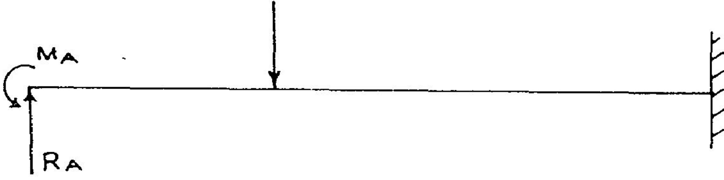
இவற்றால், $\Delta_A = \theta_A = 0$ என்னும் தாங்கி நிலைகளை

$$\Delta_A = \int_0^a (R_A x - M_A)\, x\, dx + \int_a^L R_A x - M_A - P(x-a)\, x\, dx = 0$$

$$\theta_A = \int_0^a (M_A - R_A x)\, dx + \int_a^L M_A - R_A x + P(x-a)\, dx = 0$$



a. விட்டமும் சுமைகளும்



b. முனை A இல் தாங்கிக்குப் பதிலாகத் தாங்கி எதிர் விளைகள் R_A, M_A

படம் 11.22

என உரைக்கலாம். தொகையங்களைக் கணிக்க

$$R_A \frac{L^3}{3} - M_A \frac{L^2}{2} + Pa \frac{L^2}{2} - P \frac{L^3}{3} - \frac{Pa^3}{6} = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$- R_A \frac{L^2}{2} + M_A L + \frac{PL^2}{2} - PaL + \frac{Pa^2}{2} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

இவற்றின் தீர்வாய்,

$$R_A = P \left\{ 1 - \frac{3a^2}{L^2} + 2 \frac{a^3}{L^3} \right\}$$

$$M_A = \frac{Pa}{L^2} (L - a)^2$$ எனும் தீர்வுகளைப் பெறுகிறோம்.

இவ்வாறு மிகைத் தாங்கி எதிர்வினைகள் எத்துணை இருப்பினும் அவை ஒவ்வொன்றனையும் சார்ந்த விகல ஆற்றலின் வகைக்கெழுக்களை 0 வுக்கு சமன் செய்வதனால் தீர்வு காணும் முறையை கேஸ்டிலியானோவின் தேற்றம் நமக்கு உரைத்துள்ளது. இங்கு மற்றொரு கூற்றினையும் நோக்க வேண்டும். மறுமுனை எதிர்வினைகளாய் R_B, M_B என்பனவற்றின் வாயிலாயுரைத்திருப்பின்

$$\frac{\partial U}{\partial M_B} = \frac{\partial U}{\partial R_B} = 0$$

எனப் பயன்படுத்தியிருப்போம். தாங்கி எதிர்வினைகள் எத்துணையிருப்பினும், அவற்றின் செயல் முனைகள் இடப்பெயர்ச்சி அடைவதில்லையெனில்,

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{11.45}$$

என உரைக்கலாம். மாறாய்த், தாங்கி எதிர்வினைகளின் செயல் முனைகளில் இடப் பெயர்ச்சிகள் இல்லாத வகையில் நிகழும் இடப்பெயர்ச்சிகளின்போது, மொத்த விகல ஆற்றல் U மிகக் குறைந்த அளவில் (Minimum) இருக்கும் எனலாம். இக்கூற்று விகல ஆற்றல் சிறுமக் கோட்பாடு (Principle of Minimum strain Energy) என அழைக்கப்படுகிறது. இதன் பயன்களைக் கட்டுமான ஆய்வியலில் பரவலாய்க் காணலாம்.

மேக்ஸ்வெல் எதிரிடைத் தேற்றம் (Maxwell's Reciprocal Theorem)

எந்தவொரு அமைப்பிலும் ஒருவெட்டுமுகத்தில் விசை செலுத்தப்படும்போது பிறிதொரு வெட்டுமுகத்தில விலக்கம் காண நாம் பயன்படுத்திய முறையை மீண்டும் நோக்குவோம்.

படம் 11.23 ஐ நோக்குவோம். இவ் விட்டத்தில் B என்ற வெட்டு முகத்தில் சுமை, P, செலுத்தப்படுவதால் C என்ற வெட்டுமுகத்தில் தோற்றுவிக்கப்படும் விலக்கத்தை Δ_{CB} எனக் குறிப்பிடுவோமெனில், இதனைக் காண, வெட்டுமுகம் B இல் சுமை P செலுத்தப்படுவதால் விட்டத்தின் வெட்டுமுகங்களில் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமை, M_{xB} அல்லது M_B எனவும், வெட்டுமுகம் C இல் அலகுவிசை செலுத்தப்படுவதால் விட்டத்தின் வெட்டுமுகங்களில் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமைகளை m_{xc} அல்லது m_c எனவும் கொண்டு,

$$\Delta_{CB} = \int_0^L \frac{M_B \cdot m_c}{EI}\, dx$$ எனக் கணக்கிடலாம்.

விசைகளின் விளைவுகளால் விட்டத்தில் எப் பகுதியிலும் விகலங்கள் மீட்சி எல்லைக்குள் இருப்பதாய்க் கொள்ளும்வரை,

$M_B = P.m_B$ என்பது உண்மை.

படம் 11.23

அதனால்,

$$\Delta_{CB} = P \int_0^L \frac{m_B \cdot m_C \cdot dx}{EI} \qquad (11.46)$$

இது புதிய விடை அன்று. நாம் ஏற்கனவே கற்பனை வேலைக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்திப் பெற்ற முடிவுதான். இனி, வெட்டுமுகம் C இல் விசை P செலுத்தப்படும்போது வெட்டுமுகம் B இல் தோற்றுவிக்கப்படும் விலக்கத்தை Δ_{BC} எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$\Delta_{BC} = \int_0^L \frac{M_C \cdot m_B \cdot dx}{EI} = \int_0^L \frac{P \cdot m_C \cdot m_B \cdot dx}{EI}$$

அல்லது,

$$\Delta_{BC} = P \int_0^L \frac{m_C \cdot m_B \cdot dx}{EI} \qquad (11.47)$$

எனப் பெறுகிறோம். இதனைச் சமன்பாடு 11.46 உடன் ஒப்பிட,

$$\Delta_{BC} = \Delta_{CB} \qquad (11.48)$$

என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதன் பொருள், ஒருவெட்டுமுகத்தில் புறவிசை செலுத்தப் படும்போது, பிறிதொரு வெட்டுமுகத்தில் தோற்றுவிக்கப்படும் விலக்கம், அவ் வெட்டுமுகத்தில் அதே அளவு புறவிசை செலுத்தப்படும்போது, முந்தைய வெட்டுமுகத்தில் தோற்றுவிக்கப்படும் விலக்கத்திற்குச் சமம். இதனையே மேக்ஸ்வெல் எதிரிடைத் தேற்றம் (Maxwell's Reciprocal Theorem) என அழைக்கிறோம்.

சமன்பாடுகள் 11.46, 11.47, 11.48 இவற்றில் விசைகள் என்பன திருப்புமைகளையும் உள்ளடக்குவனவாயும், விலக்கங்கள் என்பன சரிவுகளையும் உள்ளடக்குவனவாயும் பொதுமையான முறையில் உரைக்கப்படலாம். இப் பொருளில் சமன்பாடுகளை நோக்கும் போது, வெட்டுமுகம் B இல் அலகு விசை செலுத்தப்படும்போது, வெட்டுமுகம் D இல் விட்டத்தின் சாய்வும், அதன்கண் அலகுதிருப்புமை செலுத்தப்படும்போது வெட்டுமுகம் B இல் விட்டத்தின் விலக்கமும் அளவிற் சமமாயிருக்கும் என்பன போன்ற முடிவுகளைப் பெறுதல் இயலும். அஃதாவது θ_{DB} ஐ ரேடியன்களில் உரைக்க M_D இன் கணங்களில் நீளத்தை எந்த அலகால் உரைக்கிறோமோ, அதே அளவில் அலகில் Δ_{BD} இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாய் P நியூட்டன் அலகுகளிலும், M நியுட்டன் மீட்டர் அலகுகளிலும் உரைக்கப்படின், θ_{BD} எத்துணை ரேடியன்கள் இருக்குமோ, அத்துணை மீட்டர்களில் Δ_{DB} இருக்கும். இத் தேற்றத்தின் பயன்களையும் கட்டுமான ஆய்வியலில் மிக விரிவாகக் காணல் இயலும்.

12. விட்டங்களில் விலக்கங்கள் (Deflection of Beams)

இதுவரை விட்டங்களில் சுமைகளால் தோற்றுவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமை, நறுக்கு விசை போன்ற அகவிசைகளையும், அவைகளால் தோற்றுவிக்கப்படும் தகைவுகளை ஆயும் முறைகளையும் இவ்வாய்வுகளின் துணைகொண்டு விட்டங்களை வடிவமைக்கும் வழிமுறை களையும் கற்றறிந்துள்ளோம். விசைகளால் விட்டங்களில் தோற்றுவிக்கப்படும் விலக்கங்கள் சுழற்சிகள் ஆகிய விளைவுகளும் வடிவமைப்பிலும் பயன்பாட்டிலும் முக்கிய இடம் பெறுகின்றன. சில எளிய விட்டங்களின் விலக்கங்களையும் சரிவுகளையும் காணும் முறைகளை இங்குக் கற்போம்.

அடிப்படைச்சமன்பாடு

வளைதல் கோட்பாட்டைக் கற்கும்போது, இந்நிகழ்வினை விளக்கும் வளைதல் சமன் பாட்டினை .(Bending Equation) நன்கு பயின்றுள்ளோம். அது,

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$$

என்பதாகும். இது மூன்று சமன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. இதில் $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ என்னும் சமன் பாட்டின் விரிவாய பயன்பாடுகளையே வளைதகைவு ஆய்வுகளிற் கண்டோம்.

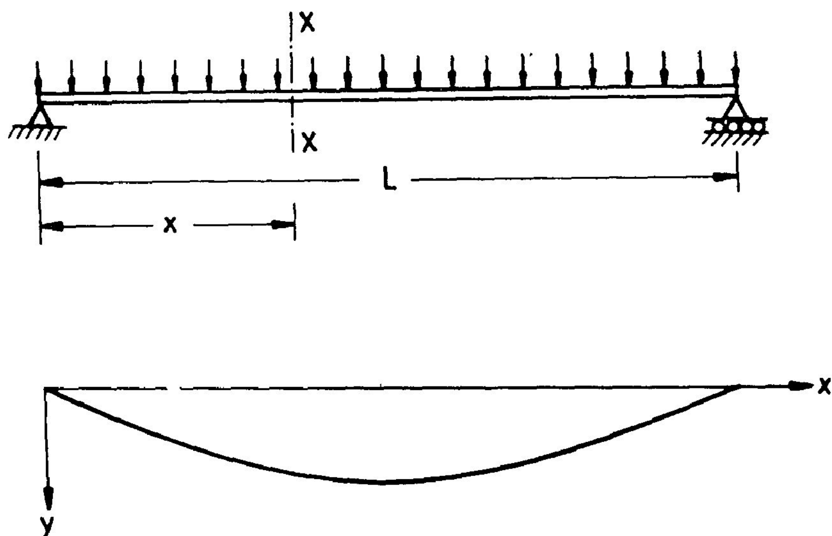
இதன் மற்றுமொரு சமன்பாடாய்

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$$

என்பதனை நோக்குவோம் (இதில் M என்பது வளைதிருப்புமை, I என்பது உறழ்திறன், E என் பது நீள்மைக் குணகம், R என்பது விட்டத்தில் வளைவாரம் என்பதனை மீண்டும் நினைவு படுத்திக் கொள்க.

இச்சமன்பாட்டை,

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$



படம் 12.1

என மாற்றியுரைக்கலாம். இதில் $\frac{1}{R}$ என்பதனை விட்ட அச்சின் வளைமை (Curvature) என அழைக்கிறோம். விலக்கமுற்றுள்ள விட்டத்தில் அச்சின் விலக்கங்களை y எனக் கொண்டு, இது விட்டத்தின் நீளவாட்டு (அஃதாவது x) ஆயத்தின் சார்பலனாக

y = y (x) என உரைத்தால்

$$\text{வளைமை,} \quad \frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

என உரைக்கலாம். இது சற்றுச்சிக்கலான உறவு. ஆனால், விலக்கங்களின் அளவு மிகச் சிறியதாயிருக்கும் போது, ($\frac{dy}{dx}$ உம் மிகச்சிறிதாயிருக்கும்போதும்)

தோராயமாக வளைமை, $\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$

என எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஆனால், ஒரு சிறு வேறுபாட்டை நோக்கவேண்டும். தொங்கல் (Sagging) விளைக்கின்ற வளைதிருப்புமையையே நாம் நேர் வளைதிருப்புமை (Positive Bending Moment) என எடுத்துக் கொண்டு, கீழ்நோக்கிய விலக்கங்களையே நேர் விலக்கங்கள் என எடுத்துக் கொள்வதால்,

வளைமை , $\frac{1}{R} = \frac{-d^2y}{dx^2}$ என உரைக்கிறோம்.

அஃதாவது , $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ எனலாம்.

இங்கு, சமன்பாட்டின் வலப் பகுதியான $-\frac{M}{EI}$ என்பதனை $\frac{M_x}{EI_x}$ (அல்லது EI சீராயிருப்பின் $\frac{M_x}{EI}$ என நீளவாட்டு ஆயத்தின் சார்பலனாயுரைப்பதால், இச் சார்பலனின் முதல் தொகையம் விட்டச் சரிவான $\frac{dy}{dx}$ ஐயும், இரண்டாம் தொகையம் விலக்கங்களையும் தருமென்பதை உணரலாம். அதனால் விலக்கங்களின் ஆய்வில் அடிப்படைச் சமன்பாடாய்

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad (12.1)$$

என்பதனை எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

சமன்பாடு 12.1ஐ தொகைப்படுத்த நேரடியான தொகையமுறை (Direct Integration) யன்றியும் பிறமுறைகளும் வகுக்கப்பட்டுள்ளன. சில எளிய எடுத்துக்காட்டுகளின் துணை கொண்டு நேரடித் தொகைய முறையைக் கற்போம்.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{M(x)}{EI(x)}$$

இதில் விட்டத்தின் மீது வளைதிருப்புமை M மட்டும் மாறுவதாயும் விட்டத்தின் வளைவிறைப்பு (Flexural Rigidity), EI, நீட்ட முழுவதும் சீராகவிருப்பதாயும் கொண்டால் $\frac{M_x}{EI_x}$ என்பது $\frac{M_x}{EI}$ என மாற்றமடைகிறது. இதனைத் தொகையப்படுத்தல் எளிது. எனவே

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI}\int M(x)\,dx = \theta(x) + C_1$$

$$y = \frac{-1}{EI} \int \left[\int M(x) \ dx \right] dx = y(x) + C_1 x + C_2$$

இருமுறை தொகையப்படுத்துதலால், இங்கு C_1, C_2 என்னும் இரு தொகைய மாறிலிகள் இடம் பெறுகின்றன. இவற்றின் மதிப்பு, விட்டம் எவ்வாறு தாங்கப்பட்டுள்ளதோ அதற்கேற்ப அமையும். இவற்றை மதிப்பிடத் தாங்கிகளில் விலக்கம், சரிவு நிலைகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாய் எளிமை தாங்கி விட்டத்தில், இரு தாங்கு முனைகளிலும் விலக்கம் இல்லை என்பதனைப் பயன்படுத்தலாம். (அஃதாவது படம் 12.1 இல் $x = 0$ விலும் $y = 0$; $x = L$ என்னும் இடத்திலும் $y = 0$). அவ்வாறே தூருத்து விட்டங்களில், பற்றுமுனை (Fixed End) யில் விலக்கமும், சரிவும் இல்லை என்பதனைப் பயன்படுத்தலாம் (அஃதாவது $x = 0$ என்னும் இடத்தில் $y = \frac{dy}{dx} = 0$).

சீர்பரவு சுமையேற்கும் எளிமை தாங்கி விட்டம் :

சீர் பரவு சுமையேற்றப்பட்டுள்ள எளிமை தாங்கி விட்டம் ஒன்று படம் 12.1 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இவ்விட்டத்தில் இடத் தாங்கிமுனை (A)யிலிருந்து x தொலைவில் உள்ள வெட்டுமுகத்தில் வளைதிருப்புமையை $M_x = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$ என எழுதுவோம் .

ஆகவே $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M_x}{EI} = \frac{-q}{2EI} \left\{Lx - x^2\right\}$$

ஃ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-q}{2EI} \left\{\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1\right\}$$

மற்றும், $$y = \frac{-q}{2EI} \left\{\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2\right\} \qquad 12.3$$

C_1 , C_2 காணல்:

தாங்கி முனைகளில் விலக்கம் $y = 0$ என்பதனைப் பயன்படுத்துவோம். அஃதாவது $x = 0$ எனில் $y = 0$ சமன்பாடு 12.3 இல் பெய்ய,

$$y = \frac{-q}{2EI} \left\{\frac{L}{6} 0^3 - \frac{0^4}{12} + C_1 \times 0 + C_2\right\} = 0$$

இதிலிருந்து $C_2 = 0$ என்பதனைப் பெறுகிறோம்.

அடுத்து $x = L$ எனில் $y = 0$ என்பதனை சமன்பாடு 12.3 இல் பயன்படுத்துவோம்.

$$y = \frac{-q}{2EI}\left\{\frac{L \cdot L^3}{6} \; \frac{-L^4}{12} + C_1 L\right\} = 0$$

அஃதாவது $\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12} + C_1 L = 0$

இதிலிருந்து $C_1 = \frac{-L^3}{12}$ எனப் பெறலாம்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள விட்டத்தின் விலக்கத்திற்குரிய கோவை:

$$y = \frac{-q}{2EI}\left\{\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{L^3 x}{12}\right\}$$

என்பதனைப் பெறுகிறோம்.

இதனையே
$$y = \frac{q}{24EI}\left\{L^3 x - 2Lx^3 + x^4\right\} \qquad (12.4)$$

என எளிய வடிவிற் பெறலாம். மேலும் C_1 ன் மதிப்னைச் சமன்பாடு 12.2 இல் பெய்ய, விட்டத்தின் சரிவினை

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_x = \frac{-q}{2EI}\left\{\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{12}\right\}$$

அல்லது
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_x = \frac{q}{24EI}\left\{L^3 - 6Lx^2 + 4x^3\right\} \qquad (12.5)$$

விட்டத்தில் சரிவுக் கோணம் $\theta = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$ என்பதே சரியான கோவையென்றாலும், சரிவு மிகச் சிறியதாய் இருக்கும்போது $\theta = \tan\theta$ எனக் கொண்டு, சரிவுக் கோணத்தின் மதிப்பினை $\frac{dy}{dx}$, இன் மதிப்பாகவே எடுத்துக்கொள்ளலாம் . இங்குக் கோணத்தின் அளவு ரேடியன்களில் தரப்படுகிறது என்பதனை நினைவிற் கொள்ளவேண்டும்.

விட்டத்தின் விலக்கங்கள் படம் 12.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. சீராயிருப்பதால் மைய நீட்டத்தில் (Midspan) தான் உச்ச விலக்கம் இருக்கும் என அறியலாம். பொதுவாய் y உச்ச மதிப்புப் பெருமிடத்தில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக இருக்குமென்றும் உறவினைப் பயன்படுத்தி, எங்கு y உச்சமதிப்புப் பெறுகிறது என்பதையும், இவ் உச்ச மதிப்பினையும் பெறமுடியும்.

விலக்கங்களின் நேர்திசையைக் கீழ்நோக்கி எடுத்துக்கொண்டிருப்பதால் சரிவுக் கோணங்கள் கடிகைத்திசையில் (Clockwise direction) அளக்கப்படுகின்றன என்பதனையும் கருத்திற்கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.1

வளைவிறைப்பு $25000 KNm^2$, 8 மீட்டர் நீட்டம் கொண்ட எளிமை தாங்கிவிட்டமொன்றின் நீட்டம் முழுதும் 60 KN/m சீர்பரவு சுமை செலுத்தப்படுகிறது. விட்டத்தின் உச்ச விலக்கம், உச்சச் சரிவு, இடப்பக்கத் தாங்கி முனையிலிருந்து 3 மீட்டர் தொலைவிலுள்ள வெட்டுமுகத்தின் விலக்கம், சரிவு இவற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு: நீட்டம், $L = 8$ m

வளைவிறைப்பு, $EI = 25000 \ KNm^2$

சீர்பரவுசுமை, $q = 60$ KN/m.

சமன்பாடுகள் 12.4, 12.5 இவற்றை பயன்படுத்தித் தீர்வுகள் காணமுடியும் (இதனை பயிற்சியாய் மேற்கொள்க); எனினும், இதற்கு அடிப்படைச் சமன்பாட்டிலிருந்தே தீர்வு காணும் முறையை மேற்கொள்வோம்.

$$M_x = \frac{qLx}{2} - \frac{q x^2}{2}$$

$$= \frac{60}{2} \times 8x - \frac{60}{2} x^2$$

$$= 240x - 30x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{25000} \left\{ 240x - 30x^2 \right\}$$

அல்லது

$$25000 \frac{d^2y}{dx^2} = 30x^2 - 240x$$

$$25000 \frac{dy}{dx} = 10x^3 - 120x^2 + C_1$$

$$25000 \, y = 2.5x^4 - 40x^3 + C_1 x + C_2$$

எளிமை தாங்கி விட்டங்கள் அனைத்தும் இடப்பக்க தாங்கி முனையில் $x = 0$ எனக் கொள்வதால் $C_2 = 0$ ஆகவே இருக்கும்.

சமன்பாடுகள் 12.4, 12.5ஐப் பயன்படுத்தி முறையே விட்டத்தின் வெட்டுமுகம் எங்கணும் விலக்கத்தினையும் சாிவினையும் கணக்கிடலாம். சில வெட்டுமுகங்களில் விலக்ககங்களும், சாிவுகளும் கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

x	0	0.1L	0.2L	0.3L	0.4L	0.5L	0.6L	0.7L	0.8L	0.9L	L
$\frac{EI\, y \times 10^3}{qL^4}$	0	4.0875	7.733	10.59	12..4	13.021	12.4	10.59	7.733	4.0875	0
$\frac{EI \frac{dy}{dx} \times 10^3}{qL^3}$	41.667	39.33	33	23.667	12.33	0	72.33	– 23.667	– 33	– 39.33	– 41.667

வலத்தாங்கி முனையில், $x = 8m.$

$$25000\, y = 2.5 \times 8^4 - 40 \times 8^3 + 8\, C_1 = 0$$

எனவே, $C_1 = \dfrac{40 \times 8^3 - 2.5 \times 8^4}{8} = +1280$

எனவே $25000\, y = 1280\, x - 40\, x^3 + 2.5\, x^4$

அல்லது $y = \dfrac{1}{25000}\left\{1280\, x - 40\, x^3 + 2.5\, x^4\right\}$

மேலும் $25000\, \dfrac{dy}{dx} = 1280 - 120\, x^2 + 10\, x^3$

அல்லது $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{25000}\left\{1280 - 120\, x^2 + 10\, x^3\right\}$

மையநீட்டத்தில் ($x = 4m$) விலக்கம் உச்சமாயிருக்கும்.

$$\therefore\ y_{max} = (y)_{x=4} = \frac{1}{25000}\left\{1280 \times 4 - 40 \times 4^3 + 2.5 \times 4^4\right\}$$

$$= \frac{3200}{25000} = 0.128m = 128mm.$$

தாங்குமுனைகளில் சரிவு உச்சமாயிருக்கும்.

$$\theta_{max} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{25000}\left\{1280 - 120 \times 0^2 \times 10 \times 0^3\right\}$$

$= 0.0512$ ரேடியன்கள்.

அல்லது, 2° 56′ 0.76″

$x = 3m$ எனும் வெட்டுமுகத்தில்:

$$y = \frac{1}{25000}\left\{1280 \times 3 - 40 \times 3^3 + 2.5 \times 3^4\right\}$$

$$= 0.1185m. = 118.5mm.$$

சரிவு, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{25000}\left\{1280 - 120 \times 3^2 + 10 \times 3^3\right\}$

$= 0,0188$ ரேடியன்கள்

அல்லது, 1° 04′ 37.8″

விட்டத்தில் உச்ச விலக்கம், உச்சச் சரிவைக் காணப் பொதுவாய கோவைகள்

$$y = \frac{q}{24EI}\left\{L^3 x - 2L x^3 + x^4\right\} \qquad 12.4$$

இதில் $x = \frac{L}{2}$ எனப் பெய்ய

$$y_{max} = y_{x = L/2} = \frac{q}{24EI}\left\{\frac{L^4}{2} - 2L\frac{L^3}{2} + \frac{L^4}{2}\right\}$$

$$= \frac{q}{384EI}\left\{8L^4 - 4L^4 + L^4\right\}$$

$$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad 12.6$$

உச்சச் சரிவு, சமன்பாடு 12.5 இலிருந்து காணப்படுகிறது.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{max} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{q}{24EI}\left[L^3 - 6L(0)^2 + 4(0)^3\right]$$

$$\theta_{max} = \frac{qL^3}{24EI} \qquad 12.7$$

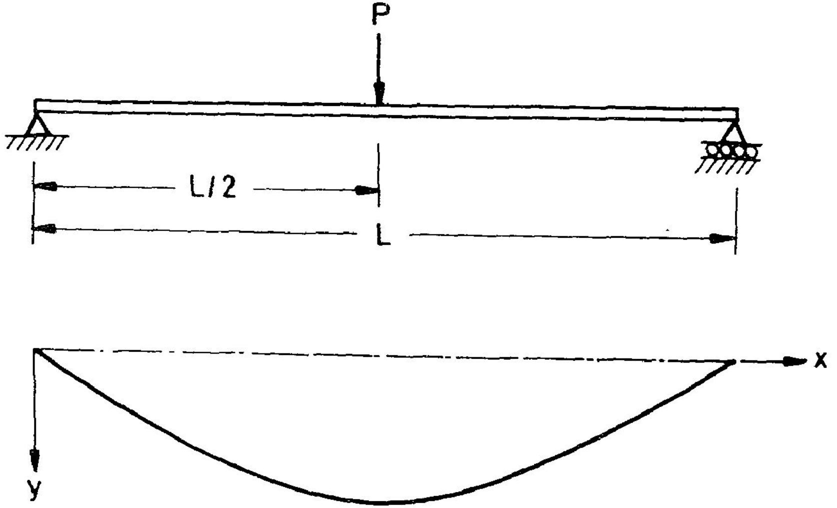
மறுமுனையில், $(x = L)$ எனும் வெட்டுமுகத்தில்

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} = \frac{q}{24EI}\left[L^3 - 6L \cdot L^2 + L^3\right] = \frac{-qL^3}{24EI}$$

$$\theta_L = \frac{-qL^3}{24EI} \qquad 12.8$$

மையக் குவிசுமையேற்கும் எளிமை தாங்கிவிட்டம்

மையக்குவி சுமை P, நீட்டம் L உம், வளைவிறைப்பு EIயும் கொண்டதொரு எளிமை தாங்கிவிட்டத்தின் மையநீட்டத்தில் செலுத்தப்படும்போது தோற்றுவிக்கப்படும் விலக்கங்களையும் சரிவுக்களையும் ஆய்வோம். (படம் 12.2 காண்க)



படம் 12.2

இங்கு வளைதிருப்புமை M_x க்கு ஒரே கோவையைத் தர இயலாது.

$$M_x = \frac{P}{2}x, \qquad 0 < x \leq L/2$$

மற்றும் $$M_x = \frac{P}{2}x - P(x - L/2), \qquad L/2 \leq x \leq L$$

என நீட்டத்தின் இருவேறு பகுதிகளில், இருவேறு கோவைகளைப் பெறுகிறோம். எனவே,

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{-}{EI}\frac{Px}{2}, \qquad 0 \leq x \leq L/2$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{-1}{EI}\ \frac{P}{2}x - P(x - L/2), \qquad L/2 \leq x \leq L/2$$

இவ்விரண்டிற்கும் தனித்தனியே தொகையம் காணில், விலக்கங்களுக்காய இருவேறு கோவைகள், $y_1(x)$, $y_2(x)$ உடன் நான்கு தொகைய மாறிலிகளும் கிடைக்கப்பெறுவோம். இம்மாறிலிகளின் மதிப்புக்காண, நான்கு சமன்பாடுகள் தேவைப்படும் அவை.

$x = 0$ எனில் $y_1 = 0$

$x = L$ எனில் $y_2 = 0$

$x = L/2$ எனில் $y_1 = y_2$

$x = L/2$ எனில் $\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}$.

இது சிக்கல் மிகுந்தது என்பது மட்டுன்றிக் தீர்வின் வழிமுறையை கூர்ந்து நோக்கும் போது மேலும் குவிசுமைகள் செலுத்தப்பட்டால், ஒவ்வொரு குவிசுமையாலும் விலக்கத்திற்குரிய கோவை ஒவ்வொன்றும் (y_3, y_4......), தொகைய மாறிலிகள் இரண்டிரண்டும் அதிகரிக்கத் தீர்வில் சிக்கல் கூடிக் கொண்டே போவதை உணரமுடியும். அதனால் இம் முறையில் (மையக் குவிசுமை தாங்கு விட்டங்களுக்குச் சிக்கல் அதிக மில்லையென்றாலும் நாம் நேரடியான தீர்விற்கு முயல்வதனைவிடுத்து, மெக்காலே (Macauley) என்பார் வகுத்த எளிய முறையொன்றனை நன்கு கற்போம்.

மெக்காலே முறை

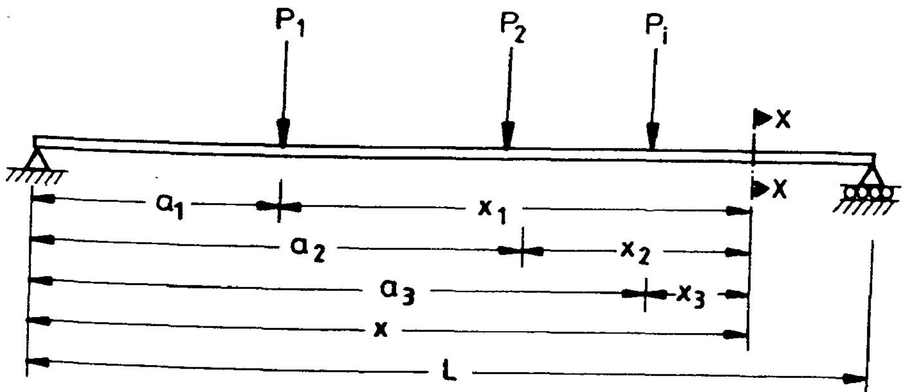
விட்டத்தின் இடப்பக்க முனையிலிருந்து a தொலைவில் குவிசுமை P_1 ஒன்றும் a_2 தொலைவில் குவிசுமை P_2 வும் செலுத்தப்படுகின்றன. (படம் 12.3). இவ் விட்டத்தின் வளை திருப்புமையை வரையறுக்க மூன்று கோவைகள் தேவைப்படுகின்றன. அவை.

$$M_x = R_A x \qquad x \le a_1$$

$$= R_A x - P_1 (x - a_1) \qquad a_1 \le x \le a_2$$

$$= R_A x - P_1 (x - a_1) - P_2 (x - a_2) \qquad a_2 \le x \le L$$

(எத்தனை குவிசுமைகள் இருப்பினும் $- P_i (x - a_i)$ என்னும் புதிய உறுப்புகளைச் சேர்த்துக் கொண்டே போகலாம்)



படம் 12.3

மெக்காலே, கோவை மாறும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் புதிய ஆயமையம் ஒன்றனை எடுத்துக் கொண்டு, அதற்கேற்ப நீளத்திசை மாறியையும் கொண்டு கோவைகள் அமைக்கப் பட்டால், இவ் வெல்லாக் கோவைகளுக்கும் பொதுவாய தொகைய மாறிலிகள் அமைகின்றன என்று கண்டார். எத்தனை கோவைகள் மொத்தத்தில் இருப்பினும், தொகைய மாறிலிகள் இரண்டே இரண்டுதான் என்பதால் $(y)_{x=0} = 0$, $(y)_{x=L} = 0$ என்னும் இரு தாங்கி விலக்க நிலைகளிலிருந்தே தீர்வை அடைய முடிவதால், மிகச் சிக்கலான தீர்வு மிகவும் எளிமையாக்கப் பட்டுவிடுகிறது.

மெக்காலே முறையில் ஆயங்களும், ஆயத்தொலைவுகளும் வரையறுக்கப்படும் முறை படம் 12.3. இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன்படி,

$$M_x = R_A x \Big|_{a_1} - P_1 x_1 \Big|_{a_2} - P_2 x_2 \ldots\ldots\ldots \quad (12.11)$$

$$EI \frac{d^2 y}{d x^2} = - R_A x \Big|_{a_1} + P_1 x_1 \Big|_{a_2} + P_2 x_2 \ldots\ldots\ldots$$

$$EI \frac{dy}{dx} = C_1 - R_A \frac{x^2}{2} \Bigg|_{a_1} + P_1 \frac{x_1^2}{2} \Bigg|_{a_2} + P_2 \frac{x_2^2}{2} \quad (12.12)$$

$$EIy = C_2 + C_1 x - R_A \frac{x^3}{6} \Bigg|_{a_1} + P_1 \frac{x_1^3}{6} \Bigg|_{a_2} + P_2 \frac{x_2^3}{6} \quad (12.13)$$

எளிமை தாங்கிவிட்டங்களில் $y_{x=0} = 0$ என்பதால் C_2 எப்போதும் 0 ஆகவே இருக்குமென முன்னரே கண்டோம்.

$$EIy = C x - R_A \frac{x^3}{6} \Bigg|_{a_1} + P_1 \frac{x_1^3}{6} \Bigg|_{a_2} + P_2 \frac{x_2^3}{6} \ldots\ldots \quad (12.12)$$

என்பதே விலக்கம் காண்பதற்குரிய பொதுவாய கோவையாகும். இதில் x = L எனும் வெட்டுமுகத்தில் x_1, x_2 முதலிய மாறிகளுக்கும் உரிய ஆயத் தொலைவுகளைப் பயன்படுத்தி, C_1 இன் மதிப்பினைக் கணக்கிட்டபின் எந்த வெட்டுமுகத்தில் வேண்டுமானாலும் கோவை 12.12 ஐப் பயன்படுத்திச் சரிவையும், கோவை 12.12. ஐப் பயன்படுத்தி விலக்கத்தையும் கணக்கிட முடியும்.

இங்கு கோவைகள் 12.11, 12.12, 12.13 இவற்றின் பயன்பாடு குறித்து ஒரு கருத்தினைத் தெளிவாய் நினைவுகூர வேண்டும். இக் கோவைகளில் $\Big|_{a_1}$, $\Big|_{a_2}$ எனும் குறியீட்டில் சில திரைகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் பொருள் x இன் பதிப்பு a_i ஐவிடக் குறைவாகவோ, a_i க்குச்

சமமாகவோ இருப்பின், திரை $|_{a_i}$ க்கு வலப் பக்கமுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தையும் விட்டுவிட வேண்டும். திரைக்கு இடப்புறமுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் கோவைகளில் இடம் பெற வேண்டும். (அதனால் தான் பொதுவான தொகைய மாதிரி C_1 முதல் திரைக்கும் முன்னதாகவே இடம்பெறுகிறது). இதனைக் கவனமாய்க் கொண்டு கணக்கீடுகள் நிகழ்த்த மிக எளிதில் தீர்வுகளைப் பெறமுடியும்.

இனிப் படம் 12.2 இல் காட்டப்பட்டுள்ள, மையக் குவிசுமையேற்கும் ஓர் எளிய தாங்கி விட்டத்தின் விலக்கச் சரிவுகளை ஆய, இம் முறையைப் பயன்படுத்துவோம். சுமை நீட்ட மையத்தில் செலுத்தப்படுவதால், $R_A = R_B = \frac{P}{2}$ என எளிதில் உரைக்கலாம். வளைமைக்குரிய கோவை,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-1}{EI}\left[R_A x \;\Big|_{L/2} - P x_1\right]$$

(இங்கு $x_1 = x - L/2 \;,\; x > L/2$)

அல்லது $$EI\frac{d^2 y}{d x^2} = -R_A x \;| + P x_1$$

$$EI\frac{dy}{dx} = C_1 - R_A\frac{x^2}{2} \;| + P\frac{x_1^2}{2}$$

$$EIy = C_1 x - R_A\frac{x^3}{6} \;| + P\frac{x_1^3}{6}$$

வலப்பக்கத் தாங்கி முனையில், $x = L \;.\; x_1 = L/2 \qquad y = 0$

எனவே $$EIy_{x=L} = 0 = C_1 L - R_A\frac{L^3}{6} + \frac{P}{12}\frac{L^3}{4}$$

ஆனால் $$R_A = P/2$$

எனவே $$C_1 L = \frac{P}{2}\frac{L^3}{6} - \frac{P}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

$$= \frac{PL^3}{12} - \frac{P}{6}\frac{L^3}{8}$$

$$= \frac{PL^3}{16}$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{PL^2}{16}$$

இதிலிருந்து

$$EIy = \frac{PL^2x}{16} - \frac{Px^3}{12}\bigg|_{L/2} + \frac{Px_1^3}{6}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{PL^2}{16} - \frac{Px^2}{4}\bigg|_{L/2} + \frac{Px_1^2}{2}$$

12.14

ஆகிய பொதுவாய விலக்க சரிவு கோவைகளைப் பெறுகிறோம்.

விட்ட மையத்திற்கு இருபுறமும் சமச்சீர்மை காணப்படுவதால் $x > L/2$ பகுதிகளிலும் மேற்கண்ட அட்டவணையைப் பயன்படுத்தியே சரிவு, விலக்கங்களைப் பெற முடியும்.

எ.கா. $y_{x=0.7} = y_{x=0.3}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0.85} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0.15}$$

மற்றும் y யின் உச்சமதிப்பு $x = L/2$ என்னும் வெட்டுமுகத்திலும் $\frac{dy}{dx}$ இன் உச்ச மதிப்பு $x = 0$ என்னும் வெட்டுமுகத்திலும் இருக்குமென்பது தெளிவு. எனவே,

$$y_{max} = y_{x=L/2} = \frac{1}{EI}\left\{\frac{PL^2}{16}\,\frac{L}{2} - \frac{P}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3\right\}$$

$$y_{max} = \frac{PL^3}{48\,EI}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{max} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L/2} = \frac{1}{EI}\left\{\frac{PL^2}{16} - \frac{P}{4}\,(0)^2\right\}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{max} = \frac{PL^2}{16EI}$$

மைய நீட்டம் வரை விலக்கங்களும் சரிவுகளும் கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. விலக்கங்கள் படம் 12. 2b இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

$^{x}/L$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$\frac{EIy \times 10^3}{PL^3}$	0	3.1146	6.1667	9.09375	11.833	14.323	16.5	18.302	19.667	20.531	20.833
$\frac{EI\frac{dy}{dx}}{PL^2}$	0.0625	.061875	0.06	0.056875	0.0525	0.04685	0.04	0.031875	0.0225	0.011875	0

எடுத்துக்காட்டு 12.2 :

6 மீட்டர் நீட்டமும் 10000 kNm^2 வளைவிறைப்பும் கொண்ட தொரு எளிமை தாங்கிவிட்டத்தின் மையநீட்டத்தில் 80 kN குவிவிசை ஒன்று செலுத்தப்பட்டால், தோற்று விக்கப்படும் உச்ச விலக்கம், உச்சச் சரிவு, தாங்கியிலிருந்து 2m தூரத்திலுள்ள வெட்டுமுகத்தின் விலக்கம், சரிவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

நீட்டம், $L = 6m$

வளைவிறைப்பு $EI = 10000\ KNm^2$

மையக் குவிவிசை, $P = 80\ kN.$

உச்ச விலக்கம் $= \dfrac{PL^3}{48EI} = \dfrac{80 \times 6^3}{48 \times 10000}\ m = 0.036m = 36\ mm$

உச்சச்சரிவு $= \dfrac{PL^2}{16EI} = \dfrac{80 \times 6^2}{16 \times 1000} = 0.018\ rad = 1°01'\ 07"$

இனி விலக்கம், சரிவு காணும் பொதுக்கோவைகளைப் (சமன்பாடு 12.14) பயன்படுத்தி x=2m என்னும் வெட்டுமுகத்தின் விலக்கத்தையும் சரிவினையும் கணக்கிவோம்.

$$x = 2m < L/2$$

எனவே, $$EIy = \frac{PL^2x}{16} - \frac{Px^3}{12}$$

அல்லது $$y = \frac{P}{EI}\left[\frac{L^2x}{16} - \frac{x^3}{12}\right]$$

$$y_{x=2} = \frac{80}{10000}\left[\frac{6^2 \times 2}{16} - \frac{2^3}{12}\right] = 0.030667m$$

$$= 30.667\ mm.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \frac{P}{EI}\left[\frac{L^2}{16} - \frac{x^2}{4}\right]$$

$$= \frac{80}{10000}\left[\frac{6^2}{16} - \frac{2^2}{4}\right] = .01\ rad$$

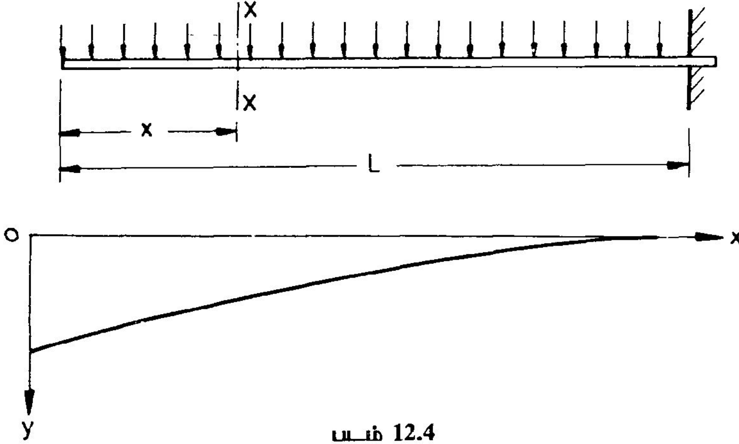
$$= 0°34"22.65"$$

குறிப்பு : x = 4.5 என்னும் வெட்டுமுகத்தில் விலக்கமும் சரிவும் தேவைப்படின் $y_{4.5} = y_{1.5}$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{4.5} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1.5}$ ஆகிய உறவுகளைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடல் எளிய முறையாகும்.

துருத்துவிட்டங்களில் விலக்கங்கள் (Deflections in Cantilever Beams)

1. நீட்டமுழுதும் சீர் பரவுசுமையேற்கும் துருத்துவிட்டங்கள்

நீட்டம் L வளைவிறைப்பு EI கொண்ட துருத்துவிட்டம் ஒன்றன்மீது சீர்பரவு சுமை q செலுத்தப்பட்டுள்ள நிலையைப் படம் 12.4 காட்டுகிறது. தொங்குமுனையில் (Free end) x, y அச்சுகளின் ஆய மையத்தைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டு ஆய்வுகளைத் தொடங்குவோம்.



படம் 12.4

ஆய மையத்திலிருந்து x அளவு தொலைவில் உள்ள வெட்டுமுகம் ஒன்றன்மீது செயல்படும், வளைதிருப்புமை,

$$M_x = \frac{-qx^2}{2}$$ என அறிந்துள்ளோம்.

எனவே, $$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}$$

இதிலிருந்து, $$EI\frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI\,y = \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

என்னும் தொகையங்களைப் பெறுகிறோம்.

தாங்குமுனையில் $(x = L)$, $y = \frac{dy}{dx} = 0$

எனவே, $EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} = \frac{qL^3}{6} + C_1 = 0$

அஃதாவது, $C_1 = \frac{-qL^3}{6}$

$$EI\,y_{x=L} = \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^3}{6} + C_2 = 0$$

அஃதாவது, $C_2 = \frac{qL^4}{6} - \frac{qL^4}{24} = \frac{qL^4}{8}$

ஆகவே, $y = \frac{q}{EI}\left[\frac{L^4}{8} - \frac{L^3}{6}x + \frac{x^4}{24}\right]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{EI}\left[\frac{x^3}{6} - \frac{L^3}{6}\right]$$

அல்லது

$$y = \frac{q}{24EI}\left[3L^4 - 4L^3x + x^4\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-q}{6EI}\left[L^3 - x^3\right] \quad 12.15$$

சமன்பாடு 12.15 உம், விட்டத்தின் அமைப்பும் தொங்குமுனையில் தான் உச்ச விலக்கவும், உச்சச் சரிவு கோணமும் இருக்கு மென்பதனைக் காட்டுகின்றன.

எனவே, $y_{max} = y_{x=0}\ \frac{q \times 3L^4}{24EI} = \frac{ql^4}{8EI}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{max} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=o} = \frac{-qxL^3}{6\ EI} = -\frac{qL^3}{6EI}$$

இவையன்றி, எந்தவொரு வெட்டுமுகத்திலும், விலக்கம், சரிவு இவற்றைக் காணச் சமன்பாடுகள் 12.15 பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.3

வளைவிறைப்பு 10000 kNm^2 நீட்டம் 4m கொண்ட துருத்து விட்டம் ஒன்றனுக்கு x=4m என்னும் முனையில் பற்றுத் தாங்கி அமைக்கப்பட்டு விட்டத்தின் நீட்டம் முழுதும் சீர்பரவுசுமை 30 kN/m செலுத்தப்படுகிறதெனில், x = 0, x = 1m, x = 2m, x = 3m ஆகிய வெட்டுமுகங்களில் விட்டத்தின் விலக்கம், சரிவு இவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

வளைவிறைப்பு $EI = 10000\ kNm^2$

சீர்பரவுசுமை $q = 30\ kN/m^2$

நீட்டம் $L = 4m.$

எனவே,

விலக்கத்திற்குரிய பொதுக் கோவை, $$y = \frac{q}{24\ EI}(3L^4 - 4L^3x + x^4)$$

$$= \frac{30}{24 \times 10000}(3 \times 4^4 - 4 \times 4^4 x + x^4)$$

$$= 1.25 \times 10^{-4}(768 - 256x + x^4)\ m$$

அல்லது $$y = 0.125\ (768 - 256x + x^4)\ mm.$$

சரிவுக்குரிய பொதுக்கோவை $$\frac{dy}{dx} = \frac{-q}{6EI}\left(L^3 - x^3\right)$$

$$= \frac{-30\,(4^3 - x^3)}{6 \times 10000} = -5 \times 10^{-4}\,(4^3 - x^3)$$

ரேடியன்கள்

இக் கோவைகளைப் பயன்படுத்தித் தேவைப்படும் வெட்டுமுகங்களில் விலக்கம், சரிவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவோம்.

x mm		0	1	2	3
y mm		96	64.125	34	10.125
$\frac{dy}{dx}$	ரேடியன்கள்	-32×10^{-3}	-31.5×10^{-3}	-28×10^{-3}	-18.5×10^{-3}
	பாகைகள்	$-\frac{1}{2}$ 50'0.47"	− 1° 48′ 17"	1° 36′ 15"	− 1° 03" 36"

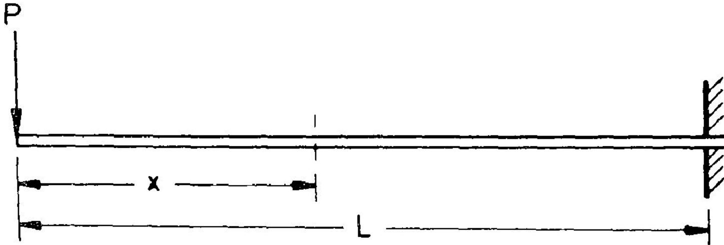
பயிற்சிகள் :

12.1 3m நீட்டமும் வளைவிறைப்பு 5000 kNm^2 உம் கொண்ட தொரு துருத்துவிட்டத்தில் உச்சவிலக்கம் 110 mm க்கு மேல் இருக்கக் கூடாதெனில் விட்டத்தின் நீட்டம் முழுதும் செலுத்தப்படும் சீர்பரவு சுமையின் உச்ச வரம்பு காண்க.

12.2. 5m நீட்டம் கொண்டதொரு துருத்துவிட்டத்தின் நீட்டமுழுவதிலும் சீர்பரவு சுமை 24 kN/m செலுத்தப்படுகிறது. விட்டத்தின் உச்ச விலக்கம் 16 mm எனில், விட்டத்தின் வளைவிறைப்பு எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

குவிசுமையேற்கும் துருத்துவிட்டத்தின் விலக்கம்

குவிசுமை P தொங்குமுனையில் செலுத்தப்படும் துருத்துவிட்டம் ஒன்றன் (**படம் 12.5**) நீட்டம் L, வளைவிறைப்பு EI எனக் கொள்வோம். தொங்கு முனையை ஆய மையமாய்க் கொண்டு வளைமைச் சமன்பாடு எழுத,



படம் 12.5

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_x = +Px$$

$$EI\frac{dy}{dx} = +\frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$EI\,y = +\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2$$

தாங்கு முனையில் $(x = L)$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ எனும் வரம்பு நிலைகளைப் பயன்படுத்தி, C_1, C_2 எனும் தொகைய மாறிலிகளுக்கு மதிப்புக் காண்போம்.

x = L. என்னும் வெட்டுமுகத்தில்

$$EI\frac{dy}{dx} = +\frac{PL^2}{2} + C_1 = 0$$

$$\therefore \quad C_1 = -\frac{PL^2}{2}$$

$$EIy = +\frac{PL^3}{6} + C_1 L + C_2 = 0$$

$$= +\frac{PL^3}{6} - \frac{PL^2 \times L}{2} + C_2 = 0$$

எனவே, $$C_2 = \frac{-PL^3}{6} + \frac{PL^3}{2} = +\frac{PL^3}{3}$$

ஆகவே, $$y = \frac{P}{EI}\left[\frac{x^3}{6} - \frac{L^2x}{2} + \frac{L^3}{3}\right]$$

$$= \frac{P}{6EI}\left[x^3 - 3L^2x + 2L^3\right]$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} - \frac{PL^2}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2EI}(x^2 - L^2)$$

எடுத்துக்காட்டு 12.4.

3.6m நீட்டமும் வளைவிறைப்பு 8000 kNm^2 உம் கொண்டதொரு துருத்து விட்டத்தின் தொங்குமுனையில் குவிசுமை 60 kN செலுத்தப்படுகிறதெனில், தொங்கு முனையின் விலக்கம், சரிவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

நீட்டம்	L	=	3.6 m
வளைவிறைப்பு	EI	=	8000 kNm^2
குவிசுமை	P	=	60 kN.

விட்டத்தின் விலக்கத்திற்குரிய கோவை

$$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3L^{2x} + 2L^3)$$

உரிய மதிப்புகளைப் பெய்ய

$$y = \frac{60}{6 \times 8000} (x^3 - 3 \times 3.6^2 \times 3.6^3)$$

$$= 0.0012\,5\,(x^3 - 38.88\,x + 93.312)\ m$$

அல்லது, $$y = 1.25\,(x^3 - 38.88x + 93.312)\ mm$$

தொங்குமுனை விலக்கம்

$$y_{x=0} = 1.25 \times 93.312 = 116.64\ mm$$

சரிவு, $$\frac{dy}{dx} = 1.25 \times 10^{13}\ (3x^2 - 38.8) \times 10^{-2}$$

தொங்குமுனையின் சரிவு,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = (1.25 \times -38.8)\ 10^{-3} = 4.85 \times 10^{-2} \text{ ரேடியன்கள்}$$

$$= 2°46'\ 44''$$

பயிற்சிகள் :

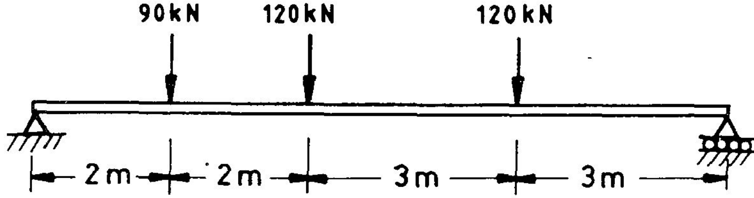
12.3. நீட்டம் 4.5 மீட்டர், வளைவிறைப்பு 12000 kNm^2 கொண்ட துருத்துவிட்டம் ஒன்றன் தொங்குமுனையில் குவிசுமை 75 kN செலுத்தப் பட்டால், துருத்துவிட்டத்தின் உச்ச விலக்கமும், உச்சச் சரிவும் கணக்கிடுக.

12.4. 3m நீட்டம் கொண்டதொரு துருத்துவிட்டத்தின் தொங்கு முனையில் 24kN குவிசுமை செலுத்தப்படுகிறது. விட்டத்தின் உச்ச விலக்கம் 9 mm எனில், அதன் வளைவிறைப்பு எவ்வளவு இருக்கவேண்டும்?

இரட்டைத் தொகைய முறையின் மிக எளிய எடுத்துக்காட்டுகளையே முன்னர்க் கற்றோம். ஒன்றனுக்கு மேற்பட்ட குவிசுமைகளோ, பல்வேறுவகையான சுமைகளோ ஏற்கும் விட்டங்களில் விலக்கங்களை ஆயும் போதுதான் மெக்காலே முறையின் எளிமைச் சிறப்பும், அம் முறையைப் பயன்படுத்துவதில் கையாளவேண்டிய நுட்பங்களையும் தெளிவாயுணரமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.5:

படம் 12.6 இல் காட்டப்பட்டுள்ள எளிமை தாங்கிவிட்டத்தின் வளைவிறைப்பு 100,000 kNm^2 எனில், 1 மீட்டர் இடைவெளிகளிலுள்ள வெட்டுமுகங்களில் விலக்கம், சரிவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவதுடன், உச்ச விலக்கம், உச்சச்சரிவு இவற்றையும் காண்க.



படம் 12.6

தீர்வு :

முதலில் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் கண்டுபிடிப்போம். வல முனைத் தாங்கியை மைய மாய்க் கொண்டு மொத்த விசைகளின் திருப்புமை காண்போம். இடப்பக்கத் தாங்கியின் எதிர் வினை R_A எனக் கொள்க.

$$-R_A \times 10 + 90 \times 8 + 120 \times 6 + 120 \times 3 = 0$$

அஃதாவது $10\,R_A = 90 \times 8 + 120 \times 6 + 120 \times 3 = 1800$

$$R_A = \frac{1800}{10} = 180 \text{ kN}$$

மொத்தப் புறச்சுமை $= 90 + 120 + 120 = 330$ kN

எனவே, வலப்புறத் தாங்கியின் எதிர்வினை, $R_B = 330 - 180$

$= 150$ kN.

இனி மெக்காலே முறையில் திருப்புமைக்குரிய கோவையை எழுதுவோம்.

$$M_x = 180\,x \Big|_{x=2} - 90\,x_1 \Big|_{x=4} - 120\,x_2 \Big|_{x=7} - 120\,x_3$$

(இங்கு $x_1 = x - 2$, $x_2 = x - 4$, $x_3 = x - 7$ என முன்னரே அறிந்துள்ளோம்.

எனவே,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_x = -180\,x \Big|_{x=2} + 90\,x_1 \Big|_{x=4} + 120\,x_2 \Big|_{x=7} + 120\,x_3$$

$$EI\frac{dy}{dx} = C_1 - 90x^2 \Big|_2 + 45x_1^2 \Big|_4 + 60x_2^2 \Big|_7 + 60x_3^2$$

$$EIy = C_2 + C_1 x - 30x^3 \Big|_2 + 15x_1^3 \Big|_4 + 20x_2^3 \Big|_7 + 20x_3^3$$

இடப்புறத் தாங்குமுனையில் $(x = 0)$ விலக்கம் $y = 0$ என அறிவோம். ஆகவே தொகைய மாறிலி $C_2 = 0$

வலப்புறத் தாங்குமுனை $(x = 10)$ யிலும் $y = 0$ என்னும் தாங்கி நிலையைப் பயன் படுத்து வோம்.

$x = 10$, எனில் $x_1 = 8$, $x_2 = 6$, $x_3 = 3$

எனவே,

$$EIy = C_1 \times 10 - 30 \times 10^3 + 15 \times 8^3 + 20 \times 6^2 + 20 \times 3^2 = 0$$

அதாவது $10C_1 = 30 \times 10^3 - 15 \times 8^3 - 20 \times 6^3 - 20 \times 3^3$

$= 17460$

$\therefore \quad C_1 = 1746$

ஆகவே, $EIy = 1746x - 30x^3 \Big|_2 + 15x_1^3 \Big|_4 + 20x_2^3 \Big|_7 + 20x_3^3$

என எழுதலாம்.

இங்கு $EI = 10^5\ kNm^2$

அல்லது $y = \dfrac{1}{10^5}\left[1746x - 30x^3 \Big|_{x=2} + 15x_1^3 \Big|_{x=4} + 20x_2^3 \Big|_{x=7} + 20x_3^3\right]$

சரிவு $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{10^5}\left[1746 - 90x^2 \Big|_{x=2} + 45x_1^2 \Big|_{x=4} + 60x_2^2 \Big|_{x=7} + 60x_3^2\right]$

இக் கோவைகளைப் பயன்படுத்தி விலக்கங்களையும், சரிவுகளையும் இனிக் கணக்கிடலாம்.

வெட்டுமுகம் $x = 1$:

$x \le 2$ வரை திரைக்குப் பிறகு வரும் உறுப்புகள் தேவையில்லை.

எனவே, $y_{x=1} = \frac{1}{10^5}\left[1746 \times 1 - 30 \times 1^3\right] m$

$= 1716 \times 10^{-5} m = 17.16mm.$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{10^5}\left[1746 - 30 \times 1^2\right] = 1716 \times 10^{-5}$ Radians.

வெட்டுமுகம் x = 2 :

$y_{x=2} = \frac{1}{10^5}\left[11746 \times 2 - 30 \times 2^3\right] = 3252 \times 10^{-5} m$

$= 32.52$ mm.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{10^5}\left[1746 - 30 \times 2^2\right] = 1626 \times 10^{-5}$ Radians.

வெட்டுமுகம் x = 3:

இங்கு இரண்டாம் திரைக்குப் பின்னர் உள்ள உறுப்புகள் தேவையில்லை. மேலும், $x_1 = x - 2 = 1$ எனவே

$y_{x=3} = \frac{1}{10^5}\left[1746 \times 3 - 30 \times 3^3 + 15 \times 1^3\right] m$

$= 4443 \times 10^{-5} m = 44.43$ mm.

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3} = \frac{1}{10^5}\left[1746 - 90 \times 3^2 + 45 \times 1^2\right]$

$= 981 \times 10^{-5}$ Radians.

வெட்டுமுகம் x = 6 :

இங்கு, $x_1 = x - 4$; $x_2 = z - 4 = 2$; மூன்றாம் திரைக்குப் பின்னர் வரும் உறுப்புகள் தேவையில்லை. எனவே,

$y_{x=6} = \left[1746 \times 6 - 30 \times 6^3 + 15 \times 4^3 + 20 \times 2^3\right]$

$= 5116 \times 10^{-5} m = 51.16$ mm.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=6} = \frac{1}{10^5}\left[1746 - 90 \times 6^2 + 45 \times 4^2 + 60 \times 2^2\right]$$

$$= -534 \times 10^{-5} \text{ Radians.}$$

அடுத்து விலக்கத்தின் உச்சமதிப்புக் காண்போம். விலக்கத்திற்கு நான்கு கோவைகள் கிடைக்கப்பெற்றுள்ளோம். விட்டத்தின் எப் பகுதியில் விலக்கம் உச்சமாயிருக்கு மென்பதனைத் தோராயமாய் ஊகித்துக் கொண்டால், எளிதில் கணக்கீடுகளை முடிக்கலாம். பொதுவாய் மையநீட்டத்திற்கு (Midspan) அண்மையில் தான் விலக்கம் உச்சமாயிருக்கும். அஃதாவது $4 < x < 7$ என்னும் விட்டப் பகுதியில் y_{max} இருக்குமெனக் கருதி முயல்வோம். இங்கு y உச்சமாயுள்ள வெட்டுமுகத்தில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

அஃதாவது, $$\frac{1}{10^5}\left[1746 - 90x^2 + 45(x-2)^2 + 60(x-4)^2\right] = 0$$

இங்கு x இன் மதிப்புத் தேவைப்படுவதால், x_1, x_2 ஆகிய மாறிகளும் x இன் சார்புகளாகவே எடுத்துக் கொள்ளப்பட வேண்டும்.

அஃதாவது, $1746 - 90x^2 + 45(x-2)^2 + 60(x-4)^2 = 0$

அல்லது, $15x^2 - 660x + 2886 = 0$

அல்லது $x^2 - 44x + 192.4 = 0$

$x = 4.9237, \quad 39.0763$

இங்கு 4.0-7.0 இடைவெளியிலுள்ள மதிப்புதான் எடுத்துக்கொள்ளப்பட வேண்டும்.

எனவே $y_{max} = y_{x=4.9273}$

$$= \frac{1}{10^5}\left[1746 \times 4.9273 - 30 \times 4.9273^3 + 15 \times 2.9273^3 + 20 \times 0.9273^3\right]$$

$$= 5406.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 54.065 \text{ mm}$$

$(2 < x < 4)$ என்ற விட்டப் பகுதியில் $\frac{dy}{dx} = 0$ என்பதனைத் தேட முயன்று பார்ப்போம்.

அஃதாவது $$\frac{1}{10^5}\left[1746 - 90x^2 + 45(x-2)^2\right] = 0$$

$$\therefore \quad 1746 - 90x^2 + 45(x-2)^2 = 0$$

$$-45x^2 - 180x + 1926 = 0$$

அல்லது $$x^2 + 4x - 42.8 = 0$$

$$x = 4.8451, \ -8.841$$

இவ்வாறே எல்லா வெட்டுமுகங்களிலும் கணக்கிடப்பட்ட விலக்கங்களும் சரிவுகளும் கீழே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இக் கணக்கீடுகளைப் பயிற்சியாய் மேற்கொண்டு சரிபார்க்க.

x_m	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
y_{mm}	17.16	32.52	44.43	53.04	54.05	51.16	43.47	31.48	16.49
$\left(\frac{dy}{dx}\right)$ Radian	0.01716	0.01626	0.00981	0.00396	– 0.00039	– 0.00534	– 0.00999	– 0.01374	– 0.01759

இவ் விரண்டில் எந்தத் தீர்வும் 2 < x < 4 என்னும் வரம்பிற்குள் அமையாமையால், விட்டத்தின் இப் பகுதியில் $\frac{dy}{dx} = 0$ என்னும் நிபந்தனை எவ் விடத்திலும் நிறைவாகாது என்பதனை உணர்ந்து, வேறுபகுதிகளில் தேட முயல வேண்டும். எனவே, விலக்கம் உச்சமாயிருக்கக் கூடிய விட்டப் பகுதியைச் சரியாய் ஊகிக்க முடிந்தால், வீணான கணக்கீடுகள் தவிர்க்கப்படலாம். எளிமை தாங்கி விட்டங்களிற் சரிவுகளின் உச்ச மதிப்புகள் தாங்குமுனைகளிலேயே காணப்படும்.

இடப் புறத்தாங்கியில்,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{10^5}\left[1746 - 90 \times 0\right] = 0.01746 \text{ Radians}$$

வலப்புறத்தாங்கியில், $(x = 10m, \quad x_1 = 8m, \quad x_2 = 6m, \quad x_3 = 3m)$

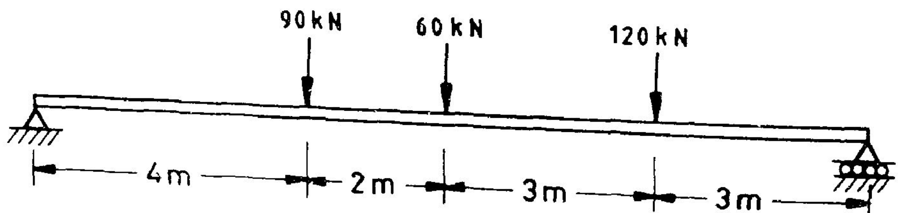
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=10} = \frac{1}{10^5}\left[1746 - 90 \times 10^2 + 45 \times 8^2 + 60 \times 6^2 + 60 \times 3^2\right]$$

$$= -0.01674 \text{ Radians.}$$

பயிற்சிகள் :

12.5 : மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் x = 4m என்னும் வெட்டு முகத்திற்குப் பதிலாக x = 5m என்னும் வெட்டுமுகத்தில் 120 kN குவி சுமை செயல்படுகிறது எனில், விட்டத்தின் உச்ச விலக்கம் எவ்வளவு என்பதைக் கணக்கிடுக.

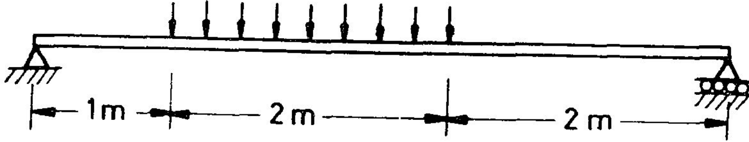
12.6 : படம் 12.7 இல் காட்டப்பட்டுள்ள எளிமை தாங்கி விட்டத்தின் உச்ச விலக்கம், தாங்க முனைச் சரிவுகள் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. விட்டத்தின் வளைவிறைப்பு $EI = 10^5$ kNm^2 எனக் கொள்க.



படம் 12.7

எடுத்துக்காட்டு 12.6 :

படம் 12.8 இல் காட்டப்பட்டுள்ள எளிமை தாங்கி விட்டத்தின் வளைவிறைப்பு EI = 10000 kNm^2 எனக் கொண்டு, உச்சவிலக்கம், தாங்குமுனைச் சரிவுகள் இவற்றைக் கணக்கிடுக.



படம் 12.8

தீர்வு :

முதலில் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் கணக்கிடுவோம். வலமுனைத் தாங்கியில் திருப்பு மைக்குரிய கோவையை எழுத,

$$-R_A \times 5 + 60 \times 2 \times 3 = 0$$

$$\therefore \quad R_A \times 5 = 360$$

$$R_A = \frac{360}{5} = 72 \text{ kN}$$

$$R_B = 120 - 72 = 48 \text{ kN.}$$

வளைதிருப்புமைக்குரிய கோவைகள் மூன்று விட்டப் பகுதிகளில் வெவ்வேறா யிருக்கும். அவை,

$$M_x = 72x, \quad x \leq 1m$$

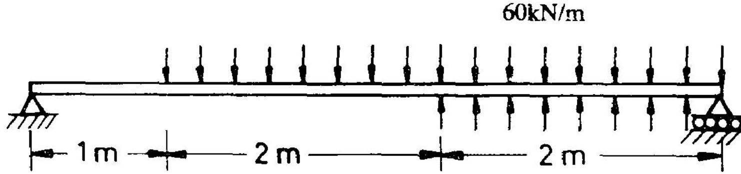
$$M_x = 72x - 30x^2, \quad 1\,m \leq x \leq 3\,m$$

$$M_x = 72x - 120(x-2), \quad x \geq 3\,m$$

என்பனவாம். இக் கோவைகளை நேரடியாய் மெக்காலே முறையில் எழுத முடியாது.

$$M_x = 72x \Big|_{x=1} - 30x^2$$

என்று கோவை எழுதப்படின், x = 1 எனும் வெட்டுமுகத்திலிருந்து விட்டத்தின் வலப்புற வரம்புவரை சீர்பரவுசுமை q = 60 KN/m செயல்படும் நிலையை உரைப்பதாகும். ஆனால் x = 3m எனும் வெட்டுமுகம் வரைதான் சீர்பரவு சுமை செலுத்தப்படுகிறது. அதனால் இவ் வெட்டு முகத்திலிருந்து விட்டத்தின் வலப்புற வரம்புவரை மேல் நோக்கிய சீர்பரவு சுமை q = 60 kN/m செயல்படுவதாய்க் கொள்வதால் வீட்ட முழுவதிலும் சரியான திருப்புமைக் கோவைகளை அமைக்கலாம் (படம் 12.9) . இவ் வகையில்



படம் 12.9

$$M_x = 72\,x\,\Big|_{x=1} - 30\,x_1^2\,\Big|_{x=1} + 30\,x_2^2$$

என்பது விட்ட முழுவதிலும் திருப்புமைக்குரிய கோவையாகும்

எனவே

$$EI\,\frac{d^2 y}{d x^2} = -\,72\,x\,\Big|_{x=1} + 30\,x_1^2\,\Big|_{x=3} - 30\,x_2^2$$

$$EI\,\frac{dy}{dx} = C_1 - 36\,x^2\,\Big|_{x=1} + 10\,x_1^3\,\Big|_{x=3} - 10\,x_2^3$$

$$EIy = C_2 + C_1 x - 12\,x^3\,\Big|_{x=1} + 2.5\,x_1^4\,\Big|_{x=3} - 2.5\,x_2^4$$

எளிமை தாங்கி விட்டங்கள் அனைத்திலும் $C_2 = 0$ $(\because x = 0$ எனில் $y = 0)$

$$\therefore \quad EIy = C_1 x - 12\,x^3\,\Big|_{x=1} + 2.5\,x_1^4\,\Big|_{x=3} - 2.5\,x_2^4$$

x = 5 எனில், y = 0 எனும் நிபந்தனையைப் பயன்படுத்துவோம்.

(x = 5 எனில், $x_1 = x - 1 = 4;\quad x_2 = x - 3 = 2$)

$$EIy = 5C_1 - 12 \times 5^3 + 2.5 \times 4^4 - 2.5 \times 2^4 = 0$$

$$5C_1 = 12 \times 5^3 - 2.5 \times 4^4 + 2.5 \times 2^4$$

$$= 900$$

$$\therefore \quad C_1 = 180$$

எனவே $$y = \frac{1}{EI}\left[180x - 12x^3 \Big|_{x=1} + 2.5x_1^4 \Big|_{x=3} - 2.5x_2^4\right]$$

அல்லது $$y = 10^{-4}\left[180x - 12x^3 \Big|_{x=1} + 2.5x_1^4 \Big|_{x=3} - 2.5x_2^4\right]$$

சரிவு $$\frac{dy}{dx} = 10^{-4}\left[180 - 36x^2 \Big|_{x=1} + 10x_1^3 \Big|_{x=3} - 10x_2^3\right]$$

உச்ச விலக்கம் இருக்குமிடத்தில் $\frac{dy}{dx} = 0$. உச்ச விலக்கம் விட்டத்தின் $1 < x < 3$ எனும் பகுதியில் இருக்குமா எனச் சோதிப்போம்.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 10^{-4}\left[180 - 36x^2 + 10(x-1)^3\right]$$

அல்லது $$180 - 36x^2 + 10x^3 - 30x^2 + 30x - 10 = 0$$

$$\therefore \quad x^3 - 66x^2 + 3x + 17 = 0$$

தீர்வுகாண, $x = 2.4007m$ (இங்கு $x_1 = x - 1 = 1.4007m$) ; எனவே உச்ச விலக்கம்,

$$y_{max} = y_{x=2.4007} = 10^{-4}\left[180 \times 2.4007 - 12 \times 2.4007^3 + 2.5 \times 1.4007^4\right]$$

$$= 2.75716 \times 10^{-2} m = 27.5716 \text{ mm.}$$

இடப்புறத் தாங்குமுனையில் சரிவு

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 10^{-4} \times 180 = 0.018 \text{ Radians.}$$

வலப்புறத் தாங்குமுனையில் சரிவு, (இங்கு $x = 5$, $x_1 = 4$, $x_2 = 2$)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=5} = 10^{-4}\left[180 - 36 \times 5^2 + 10 \times 4^3 - 10 \times 2^3\right]$$

$$= -0.016 \text{ Radians.}$$

எ.கா. தொடர்ச்சி : இனி கூடுதல் விடைகளாக 0.5 இடைவெளியில் வெட்டுமுகங்களில் விலக்கங்களும் சரிவுகளும் கணக்கிடுவோம். கணக்கீட்டு விடைகள் கீழே பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன. இவற்றைப் பயிற்சியாய் மேற்கொண்டு விடைகளை ஒப்பிடுக.

வெட்டுமுகத்தூரம் x m	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
விலக்கம் y mm	8.85	16.8	22.966	26.65	27.516	25.6	21.3	15.2	7.9
சரிவு $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ Radian	0.0171	0.0144	0.01	0.0046	– 0.001125	– 0.0064	– 0.0106	0.0136	– 0.0154

பயிற்சிகள்:

(i) நீட்டம் 9m, வளைவிறைப்பு 1000 kNm^2 கொண்ட எளிமை தாங்கி விட்டம் ஒன்றன்மீது இடமுனையில் தொடங்கி 6m நீளத்திற்குச் சீர்பரவு சுமை q = 20kN/m செலுத்தப் படுகிறது எனில் x = 6m என்றும் வெட்டுமுகத்தில் விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

(விடை: 108 mm)

(ii) முந்தைய எடுத்துக்காட்டின் எளிமை தாங்கி விட்டத்தின் வளைவிறைப்பு EI = 10000 kNm^2 $2m \le x \le 6m$ எனவும், பிறபகுதிகளில் EI = 8000 kNm^2 எனவும் அமைக்கப் பட்டால் x = 6 என்னும் வெட்டுமுகத்தில் விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

(விடை: 115.444m)

(iii) 16m நீளம் கொண்ட விட்டம் ஒன்றுக்கு x = 0 என்னும் வெட்டுமுகத்தில் கூர் முனைத்தாங்கியும் x = 12m என்றும் வெட்டுமுகத்தில் உருளைத்தாங்கியும் அமைக்கப் பட்டு முழுநீளத்திலும் சீர்பரவுசுமை q = 60kN/m^2ம் தொங்குமுனை (x = 16m)யில் குவிசுமை P = 60kN^2ம் செலுத்தப்படுகின்றன. விட்டத்தின் உச்சவிலக்கம், தொங்கு முனை விலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(விடைகள்: உச்சவிலக்கம் = 9808.933/E I

தொங்குமுனை விலக்கம் = − 2560/EI)

(iv) 12m நீளம், 10^5 kNm^2 வளைவிறைப்பு கொண்டதொரு விட்டத்திற்கு x = 0 எனும் வெட்டுமுகத்தில் கூர்முனைத்தாங்கியும், x = 10m எனும் வெட்டுமுகத்தில் உருளைத் தாங்கியும் அமைக்கப்படுகின்றன. விட்டத்தின்மீது சுமைகள்:

சீர்மாறுசுமை, q(x) = 12x kN $0 \le x \le 6m$ x = 12m எனும் வெட்டுமுகத்தில் குவிசுமை, P = 48kN x = 0 எனும் வெட்டுமுகத்தில் விட்டத்தின் சரிவினைக் கணக்கிடுக.

(விடை: $\theta_{x=0}$ = 0.01087 radians)

(v) 12m நீட்டம் கொண்ட எளிமை தாங்கிவிட்டம் ஒன்றன் இடமுனையிலிருந்து 8m நீளத் திற்குச் சீர்பரவுசுமை q = 36 kN/m செலுத்தப்படுகிறது எனில் விட்டத்தின் உச்சவிலக்கம் உச்ச சரிவு இவற்றைக் கணக்கிடுக.

(விடைகள்: உச்சவிலக்கம் = $y_{x=5.6806m}$ = 60742/EI

உச்சசரிவு = $\theta_{x=0}$ = 2048/EI)

எ.கா. 12.7:

படம் 12.10 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின் தொங்கு முனையில் விலக்கம், சரிவு, மற்றும் உச்சவிலக்கம், தாங்கி வெட்டுமுகங்களின் சரிவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. வளை விறைப்பு, $EI = 10^5\ kNm^2$ எனக் கொள்க.

தீர்வு:

முதலில் தாங்கி எதிர்விளைவுகளைக் கணக்கிடுவோம். தாங்குமுனை A ஐ மையமாய்க் கொண்டு விசைகளின் திருப்புமை காண,

$$R_B \times 3 - 120 \times 10 - 240 \times 5 - 240 \times 2 - 60 \times 6 \times 5 = 0$$

இதிலிருந்து

$$R_B = 600\ kN$$

$$\therefore\ R_A = 960 - 600 = 360\ kN$$

இவ் விசைகளைக் கொண்டு விட்டத்தில் வளைதிருப்புமைச் சமன்பாட்டினை,

$$M_x = 360x \Big|_{x=2} - 240x_1 - 30x_1^2 \Big|_{x=5} - 240x_2 \Big|_{x=8} + 600x_3 + 30x_3^2$$

என எழுதலாம். அஃதாவது,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -360x \Big|_{x=2} + 240x_1 + 30x_1^2 \Big|_{x=5} + 240x_2 \Big|_{x=8} - 600x_3 - 30x_3^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = C_1 - 180x^2 \Big|_{x=2} + 120x_1^2 + 10x_1^3 \Big|_{x=5} + 120x_2^2 \Big|_{x=8} - 300x_3^2 - 10x_3^3$$

$$EIy = C_2 + C_1x - 60x^3 \Big|_{x=2} + 40x_1^3 + 2.5x_1^4 \Big|_{x=5} + 40x_2^3 \Big|_{x=8} - 100x_3^3 - 2.5x_3^4$$

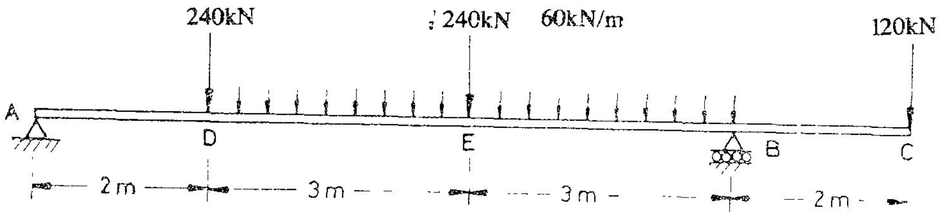
$x = 0$ எனும் வெட்டுமுகத்தில் $y = 0$ ஆகலின் $C_2 = 0$

$x = 8$ எனும் வெட்டுமுகத்தில் $y = 0$ என்பதற்குச் சமன்பாடு எழுத,

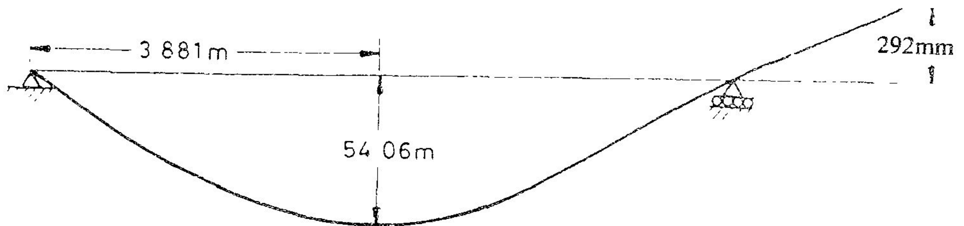
$$8C_1 - 60 \times 6^3 \Big|_{x=2} + 40 \times 6^3 + 2.5 \times 6^4 \Big|_{x=5} + 40 \times 3^3 = 0$$

இதிலிருந்து $C_1 = 2220$ எனக் கணக்கிடலாம்.

வெட்டுமுகம் x m	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	9.0
விலக்கம் y_{mm}	21.6	39.4	50.825	54	48.825	36.3	18.425	−15.8
சரிவு Rad	0.024	0.015	0.0073	− 0.001	− 0.0093	− 0.0158	− 0.0174	− 0.0044
$\frac{dy}{dx}$ பாகை	1°10′08″	0°51′34″	0°25′6″	0°3′26″	− 0°31′58″	− 0°54′19″	− 0°59′49″	− 0°49′30″



படம் 12.10



படம் 12.11

எனவே விலக்கத்தின் பொதுக்கோவை.

$$y = 10^{-5}\left(2220\,x - 60\,x^3 \Big|_{x=2} + 40\,x_1^3 + 2.5\,x_1^4 \Big|_{x=5} + 40\,x_2^3 \Big|_{x=8} - 100\,x_3^3 - 2.5\,x_3^4\right)$$

அவ்வாறே,

$$\frac{dy}{dx} = 10^{-5}\left(2220 - 180\,x^2 \Big|_{x=2} + 120\,x_1^2 + 10\,x_1^3 \Big|_{x=5} + 120\,x_2^2 \Big|_{x=8} - 300\,x_3^2 - 10\,x_3^3\right)$$

இனி இக் கோவைகளைப் பயன்படுத்தித் தேவையான வெட்டுமுகங்களில் விலக்கம், சரிவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுவோம்.

(i) தொங்குமுனையில் விலக்கம்:

இங்கு $x = 10,\quad x_1 = 8.\quad x_2 = 5,\quad x_3 = 2.$

$$y_{x=10} = 10^{-5}\left(2220 \times 10 - 60 \times 10^3 + 40 \times 8^3 + 2.5 \times 8^4 + 40 \times 5^3 - 100 \times 2^3 - 2.5 \times 2^4\right)$$

$$= -2.92 \times 10^{-2}\,\text{m} = -29.2\ \text{mm}$$

(ii) தொங்குமுனையில் சரிவு:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=10} = 10^{-5}\left(2220 - 180 \times 10^2 + 120 \times 8^2 + 10 \times 8^3 + 120 \times 5^2 - 300 \times 2^2 - 10 \times 2^3\right)$$

$$= -0.0102\ \text{radians} = 0^\circ\, 35'\, 45''$$

(iii) உச்ச விலக்கம்:

உச்சவிலக்கத்தை $x = 2$, $x = 5$ எனும் இரு வெட்டு முகங்களுக்கிடையே உள்ள பகுதியில் முதலில் தேடுவோம்.

(குறிப்பு: மைய நீட்டத்தைக் கொண்டுள்ள பகுதியில் தேடுதல் பெரும்பாலும் சரியான தீர்வு தரும். இல்லையெனில் அதற்கு அண்மியுள்ள பகுதியில் தீர்வு கிடைக்கப்பெறுதல் உறுதி)

உச்சவிலக்கம் அடையும் வெட்டுமுகத்தில்

$$\frac{dy}{dx} = 10^{-5}\left\{2220 - 180x^2 + 120(x-2)^2 + 10(x-2)^3\right\} = 0$$

அஃதாவது $10(x-2)^3 + 120(x-2)^2 - 180x^2 + 2220 = 0$

சுருக்கிட, $x^3 - 12x^2 - 36x + 265 = 0$

அதன் தீர்வுகள், $x = 3.917,\ 13.2065,\ -5.123$

இவற்றுள் x = 3.917 என்னும் தீர்வுதான் சமன்பாடு பொருந்தும் வரம்பில் அமைந்துள்ளது. அதனால்,

உச்சவிலக்கம் $y_{max} = y_{x=3.917}$

$$= 10^{-5}\left\{2220 \times 3.917 - 60 \times 3.972 + 40 \times 1.881^3 + 2.5 \times 1.881^4\right\}$$

$$= +5.406 \times 10^{-2}\,m = 54.06\ mm.$$

(iv) இடமுனைத்தாங்கி A யில் சரிவு :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 10^{-5} \times 2220$$

$$= 0.0222\ radians = 1°16'\ 19''$$

(v) தாங்கி B யில் சரிவு :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=8} = 10^{-5}\left\{2220 - 180 \times 8^2 + 40 \times 6^2 + 2.5 \times 6^4 + 40 \times 3^4\right.$$

$$= -0.0174\ radians = 0°\ 59'\ 49''$$

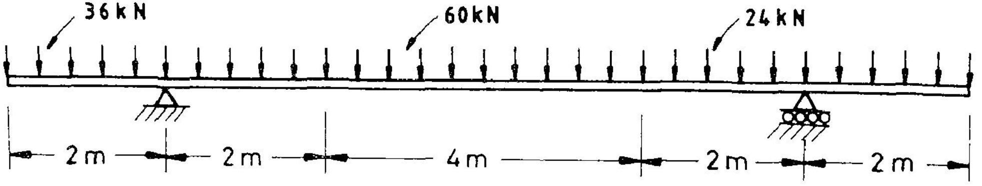
பயிற்சி :

படம் 12.12 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தின் வளை விறைப்பு $8 \times 10^4\ kNm^2$ எனில், விட்டத்தின் இடப்புறத் தொங்கு முனையில் விலக்கமும் சரிவும் கண்டுபிடிக்க.

விடை: விலக்கம் $y_{x=0} = 19.925$ mm.

சரிவு $\frac{dy}{dx}_{x=0} = 0.00981$ radians.

(குறிப்பு : உம் விடையில் பிழையிருப்பின் முதலில் மெக்காலே கோவையைச் சரிபார்க்க).



படம் 12.12

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} \quad = \quad 18\,x^2 \Big|_{x=2} - 264\,x_1 \Big|_{x=4} + 12\,x_2^2 \Big|_{x=8} - 18\,x_3^2 \Big|_{x=10} - 216\,x_4$$

நேரடியான இரட்டைத் தொகைய முறையை மெக்காலே முறை எந்த அளவிற்கு எளிமையாக்கியுள்ளது என்பதனைச் சில எடுத்துக்காட்டுகளால் கண்டோம். எல்லா எடுத்துக் காட்டுகளிலும் விட்டத்தின் வளைவிறைப்புச் சீராக இருப்பதாய்க் கருதிக் கணக்கீடுகளை மேற்கொண்டோம். குவிசுமைகள்மட்டுமே தாங்கும் விட்டங்களின் தீர்வுக்கு மெக்காலே முறையே மிக எளிதானதெனலாம். ஆனால், விட்டத்தின் குறுக்கு வெட்டு மாற்றங்கள், சிக்கலான சுமைகள் ஆகியவை, மெக்காலே கோவையை மேலும் கடின மாக்குகின்றன. அதனால், மாற்றுமுறைகள் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன. மாற்று முறைகளுள் ஒன்றாகிய பரப்புத் திருப்புமை முறை (Area Moment method) நேரடித் தொகைய முறையின் வடிவியல் விளக்கம் எனக் கூறலாம். இம் முறை, பரப்புத் திருப்புமைத் தேற்றங்கள் (Area Moment Theorems) இரண்டன் அடிப்படையில் விளங்குவதால் இத் தேற்றங்களை முதலிற் கற்போம்.

பரப்பு - திருப்புமைத் தேற்றங்கள்

விட்டத்தின் வளைதிருப்புமை, அதன் நீட்டப் போக்கு ஆயத்தின் சார்பலனாய M_x என்பது அறியப்படுகிறதெனில்,

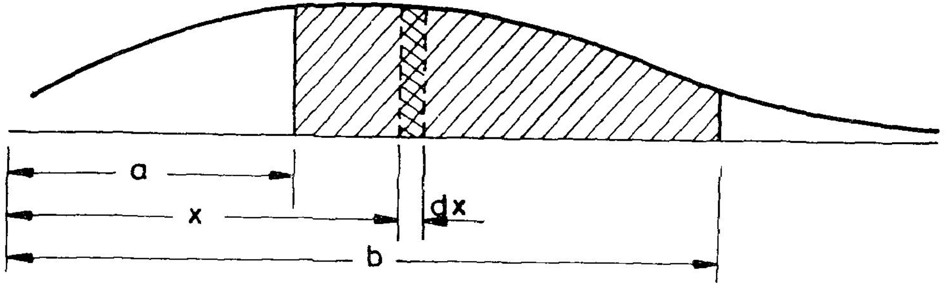
$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} \quad = \quad -\,M_x$$

எனும் உறவு (தோராயமாய்) நிறுவப்படுகிறது எனக் கண்டோம். இதிலிருந்து விட்டத்தின் வளைமைக்குரிய சார்பலனை

$$K_x \quad = \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_x \quad = \quad \frac{-\,M_x}{EI} \qquad (12.1)$$

என உரைக்கலாம்.

படம் 12.13ஐ நோக்குக. இதில் ஒருவிட்டத்தின் நீட்டவாக்கில் வளைமைச் சார்பலன் (Curvature Function) காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 12.13

x = a, x = b எனும் இருவெட்டுமுகங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இவ் விரண்டற்குமிடையே உள்ள K(x) சார்பலனின் பரப்பினை

$$\int_a^b K(x)\,dx$$ எனும் தொகையும் தருகிறது.

இதனைச் சமன் (12.1) ஐ பயன்படுத்தி,

$$\int_a^b K(x)\,dx = \frac{dy}{dx}$$ அல்லது θ_x எனச் சொல்லலாம்.

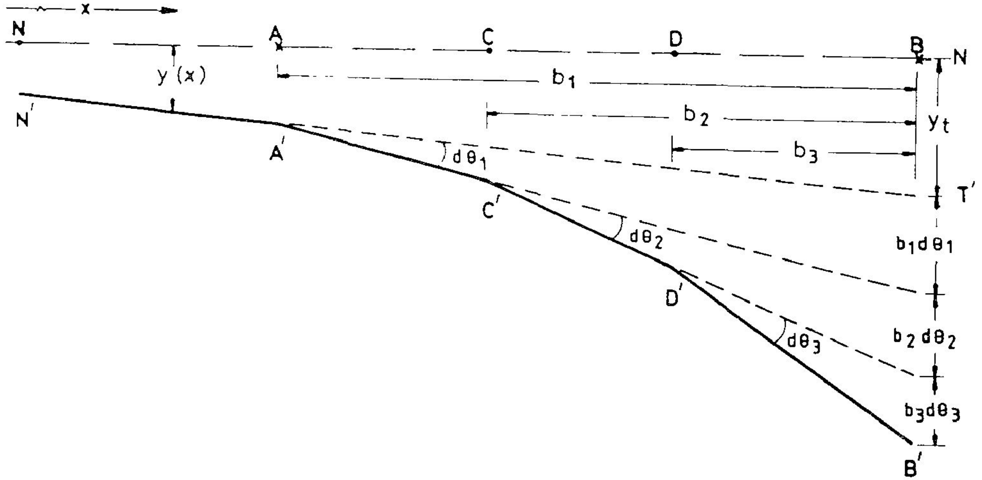
ஆகவே, $\theta_x = \int K(x)\,dx$ எனில்

$$\theta_b - \theta_a = \int_a^b K(x)\,dx \qquad (12.2)$$

எனப் பெறலாம். இங்கு நாம்பெறும் கணக்கீட்டு எளிமை யாதெனில், தொகையெச்சத்தின் மதிப்பினைப் புறக்கணிக்க முடிகிறது. சமன்பாடு (12.2) தரும் உறவே முதலாம் பரப்புத் திருப்புமைத் தேற்றம் எனப்படுகிறது. உரைவாயிலாய்.

ஒருவிட்டத்தின் இருவெட்டுமுகங்களின் சரிவு வேறுபாடு (Difference in slope), அவ்விருவெட்டுமுகங்களுக்கிடையிலாய வளைமைப் படத்தின் பரப்பிற்குச் சமம்.

இனி இரண்டாம், பரப்புத் திருப்புமைத் தேற்றத்தினைக் கற்க. படம் 12.14ஐ நோக்குவோம். இங்குக் கற்பிதமாய் எடுத்துக் கொள்ளப்படும் விட்டம், (கருத்து எளிமைக்காகச்) சில நேர்க் கோட்டுத் துண்டங்களைக் கொண்டதாய்க் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 12.14

படம் 12.14இல் சுமை செலுத்துமுன்னர் விட்டத்தின் அச்சு NB என்னும் கிடைக் கோட்டினால் காட்டப்பட்டுள்ளது. இடையில் A, C, D, B என்னும் நான்கு வெட்டு முகங் களைக் கருதுவோம். விட்டத்தில் சுமையேற்றப்பட்டபின் அச்சின் நிலை N′ A′ C′ D′ B′ எனக் காட்டப்பட்டுள்ள வரையில் கொடுக்கப்படுவதாய்க் கருதுவோம். (விட்டத்தின் பொதுவான விலக்கம் ஆயம் x இன் சார்பலன் y_x என்னும் பொதுக் குறியீட்டையும் நினைவிற் கொள் வோம்). வெட்டுமுகம் A இல் விட்டத்தின் தொடுகோடு A'T' எனக் காட்டப்பட்டுள்ளது. விட்டத் தில் A என்னும் வெட்டுகத்திற் கூடுதல் சரிவு $d\theta_1$, எனக் கொள்வோம். இதனால், B என்னும் வெட்டுமுகத்தில் விட்டத்தின் அச்சு தொடுகோட்டிலிருந்து விலக்கமடைகிறது. A என்னும் வெட்டுமுக்ம் B யிலிருந்து b_1 தொலைவிலிருப்பதால் இவ் விலக்கத்தை $b_1\, d\theta_1$, எனக் கணக்கி டலாம். ($d\theta$, மிகச்சிறியது என்றால் இது சரியான அளவீடாகும்). இவ்வாறே B யிலிருந்து b_2 தொலைவிலுள்ள C வெட்டுமுகத்தில் கூடுதல் சரிவு $d\theta_2$ எனில், அச்சின் விலக்கம் மேலும் $b_2\ d\theta_2$ மிகுதிப்படும். அவ்வாறே வெட்டு முகம் D யின் கூடுதல் சரிவு $d\theta_3$ காரணமாய் மிகுதிப்

படும் விலக்கம் $b_3 \ d\theta_3$ எனலாம். எனவே, தொடுகோட்டு முனை T இலிருந்து விட்டத்தின் அச்சுமுனை B விலகும் தொலைவைக் கணக்கிட,

$$T'B' = b_1 \, d\theta_1 + b_2 \, d\theta_2 + b_3 \, d\theta_3$$

$$= \Sigma \, b_i \, d\theta_i$$

இனி $d\theta_1$ (அல்லது $d\theta_i$) என்பது யாதென நோக்குவோம். முதலாம் பரப்புத் திருப்புமைத் தேற்றத்தின்படி A என்னும் வெட்டு முகத்தில் சிறுதொலைவு, dx நீட்டத்தில் மட்டும் உள்ள வளைமைப் படத்தின் பரப்பு, அஃதாவது $K_x \, dx$ என்பதே கூடுதல் சரிவு $d\theta$ க்காய அளவீடாகும். ஆகவே, $b_i \, d\theta_i$ என்பது B யில் வளைமைப் பரப்பு $K_x \, dx$ இன் திருப்புமை ஆகும். விட்டத்தின் நீட்டம் முழுவதிலும் வளைமை இருக்குமெனில்,

$$\Sigma \, b_i \, d\theta_i = \Sigma \, b_i \left\{ K_{x_i} \cdot dx \right\} = \int b_x K_{x_i} \, dx$$

எனலாம். இவ் வுறவு இரண்டாம் பரப்புத் திருப்புமைத் தேற்றம் என அமைக்கப்படுகிறது. இதனைச் சொற்களால் உரைக்க.

> ஒருவிட்டத்தில் A, B என்ற இருவெட்டுமுகங்களை எடுத்துக் கொண்டால், இவ் விரண்டு வெட்டுமுகங்களுக்கிடையிலுள்ள வளைமை படத்தின் பரப்பிற்கு வெட்டுமுகம் Bயில் கணக் கிடப்படும் திருப்புமையின் அளவு, வெட்டுமுகம் A இல் விட்டத் திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டிலிருந்து வெட்டுமுகம் B இன் விலக்கத்திற்கு சமம் ஆகும்.

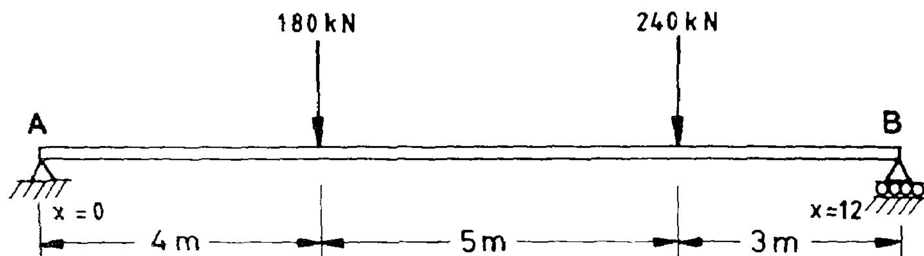
இவ்விரு தோற்றங்களின் பயன்பாட்டை விளக்கச் சில எடுத்துக் காட்டுகளை நோக்குவோம்.

எ.கா. **12.8:**

படம் 12.15 இல் காட்டப்பட்டுள்ள எளிமை தாங்கி விட்டத்தின் உச்ச விலக்கத்தையும் அதன் வெட்டுமுகத்தையும் பரப்புத் திருப்புமை முறையில் காண்க. மேலும், விட்டத்தின் இடப் புறத் தாங்கியிலிருந்து 5 மீட்டர் தொலைவில் உள்ள வெட்டுமுகத்தின் சரிவு, விலக்கம் இவற்றையும் கணக்கிடுக. (வளைவிறைப்பு $EI = 10^5 \ kNm^2$ எனக் கொள்க.)

தீர்வு :

முதலில் விட்டத்தின் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் கணக்கிடுவோம். தாங்கி A இல் விசைகளின் மொத்தத் திருப்புமை காண.



படம் 12.15 a விட்டமும் சுமைகளும்

$$R_B \times 12 - 180 \times 4 - 360 \times 9 = 0$$

எனவே, $$R_B = \frac{180 \times 4 + 360 \times 9}{12} = 330 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad R_A = 180 + 360 - 330 = 210 \text{ kN}$$

அடுத்து வளைதிருப்புமைகளைக் கணக்கிட்டு வளைமைப்படம் வரைவோம். விட்டத்தின் மீது குவிசுமைகளே செயல்படுவதனால் வளை திருப்புமைப் படம் நேர்க்கோடுகளாலேயே அமையும். அதனால், C, D ஆகிய வெட்டுமுகங்களில் வளைதிருப்புமை கணக்கிட்டால் போதும். (வளைமை $= \frac{-M}{EI}$)

$$M_C = 210 \times 4 = 840 \text{ kNm}$$

C யில் வளைமை $$K_C = \frac{-840}{10^5} = -.0084$$

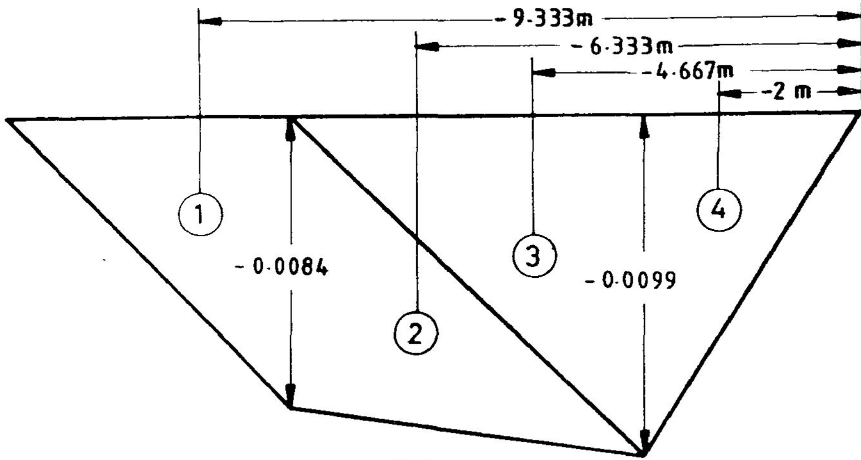
$$M_D = 210 \times 9 - 180 \times 5 = 990 \text{ kNm}$$

Dயில் வளைமை $$K_D = \frac{-990}{10^5} = -.0099$$

இம் மதிப்புகளைக் கொண்டு வரையப்பட்ட வளைமைப் படம் 12.15 -b இல் காண்க.

தாங்கி வெட்டுமுகங்களில் சரிவுகள் (θ_A, θ_B) காணல்.

வெட்டுமுகம் A யில் சரிவு θ_A எனவும், வெட்டுமுகம் B யில் சரிவு θ_B எனவும் கொள்வோம். முதலாம் பரப்புத் திருப்புமைத் தேற்றத்தின் படி,



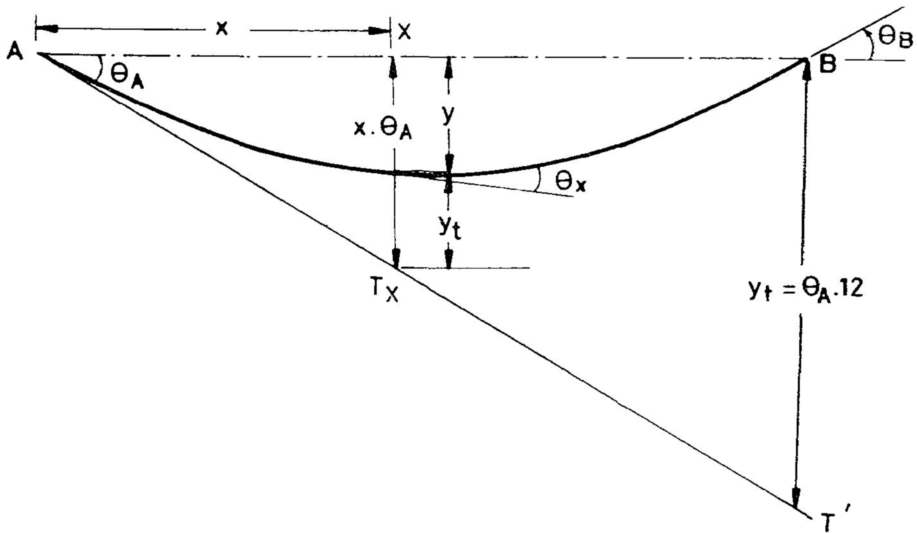
படம் 12.15 b வளைமைப் படம்

$$\theta_A - \theta_B = \text{வளைமைப்படத்தின் மொத்தப் பரப்பு}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-.0084\times 4+\left\{(-.0084)+(-.0099)\right\}\times 5 + (-.0099)\times 3\right\}$$

$$= -0.0774 \text{ Radians.}$$

இனி θ_A மட்டும் கணக்கிடப் படம் 12.15 c - ஐ நோக்கவோம்.



படம் 12.15 c θ_A கணக் கிடு முறை:

விட்டத்திற்கு A யில் வரையப்படும் தொடுகோடு AT'. θ_A சிறிதுஎனில்,

$$BT' = AB.\theta_A$$ எனக் கணக்கிடலாம்.

மற்றும் B தாங்கிமுனையாதலின் விலக்கம் = 0

அஃதாவது தொடுகோட்டிலிருந்து விட்ட அச்சின் விலக்கம் BT' க்குச் சமம். இவ் விலக்கம் வளைமைப் பரப்பிற்கு B யில் கணக்கிடப்படும் திருப்புமைக்குச் சமம் என்பதனை இரண்டாம் பரப்புத் திருப்புமைத் தேற்றம் உரைக்கிறது. ஆகவே,

$AB.\theta_A$ = B யில் வளைமைப்படத்தின் பரப்பின் திருப்புமை.

வளைமைப் படத்தின் திருப்புமை கணக்கிட, அதனை நான்கு முக்கோணப் பரப்புகளாய்ப் பகுத்துக் கொள்ளலாம் (படம் 12.15b). ஒவ்வொரு முக்கோணப் பரப்பிற்கும் B யிலிருந்து சார்பு மையக் கிடைத்தூரங்களும் இப் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவற்றைக்கொண்டு வளைமைப் பரப்பின் திருப்புமையைக் கீழ்க்காணுமாறு கணக்கிடலாம்.

$$\theta_A.AB = \frac{-.0084 \times 4}{2} \times -.9.333 + \frac{-.0084 \times 5}{2} \times -6.333$$

$$+ \frac{-.0099 \times 5}{2} \times -4.6667 + \frac{-.0099 \times 3.0}{2} \times -2.0$$

$$= +0.435$$

$$\therefore \quad \theta_A = \frac{0.435}{12.0} = 0.0365 \text{ radians}$$

ஆனால், $\theta_B - \theta_A = -0.0774$ radians

எனவே, $\theta_B = -0.0774 + 0.03625$

$$= -0.04115 \text{ radians}$$

இனி, எந்தவொரு வெட்டுமுகத்திலும் சரிவு விலக்கம் இவற்றைக் கணக்கிடும் பொதுவாய முறையைக் காண்போம்.

தாங்கி A யிலிருந்துx தொலைவில் உள்ள X என்னும் வெட்டு முகத்தின் சரிவு θ_x என்றும், விலக்கம் y என்றும் கொள்வோம்.

முதலாம் பரப்பு - திருப்புமைத் தேற்றத்தின்படி,

$\theta_x - \theta_A$ = A, x இரண்டுக்குமிடையேயுள்ள வளைமைப் படத்தின் பரப்பு
(இப்பரப்பு படம் 12.15 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.)

$$= \quad -0.0084x\frac{4}{2} + -0.0084(x-4) - 0.0003\,(x-4)\,\frac{(x-4)}{2}$$

$$= \quad -0.0168 - 0.0084x + 0.336 - 0.00015\,(x^2 - 8x + 16)$$

$$= \quad 0.0144 - 0.0072x - 0.00015x^2$$

$$\theta_x = \theta_A + 0.0144 - 0.0072x - 0.00015x^2$$

$$= \quad +0.03625 + 0.0144 - 0.0072x - 0.00015x^2$$

$$\theta_x = 0.05065 - 0.0072x -- 0.00015x^2 \qquad (12.3)$$

அடுத்து இரண்டாம் பரப்பு - திருப்புமைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விலக்கத்திற்குரிய கோவையை நிறுவுவோம்.

A -யில் வரையப்படும் தொடுகோடு $AT_X T'$ படம் 12.15c-யில் காட்டப் பட்டுள்ளது. வெட்டுமுகம் x இல் இதன் விலக்கம் XT_x – எனில்,

$$XT_x. = x \,.\, \theta_A$$

தொடுகோட்டிலிருந்து விட்டத்தில் விலக்கம்.

y_t = A க்கும் x க்கும் இடையிலாய வளைமைப் படப்பரப்பிற்கு x இல் திருப்புமை (இதனைக் கணக்கிடப் படம் 12.15 d ஐ நோக்குக.)

$$= \quad -.0084x\frac{4}{2}\;x - (x - 2.6667) + -.0084(x-4)\frac{-(x-4)}{2}$$

$$= \quad + -.0003\,(x-4)\,\frac{(x-4)}{2}\left\{\frac{-(x-4)}{3}\right\}$$

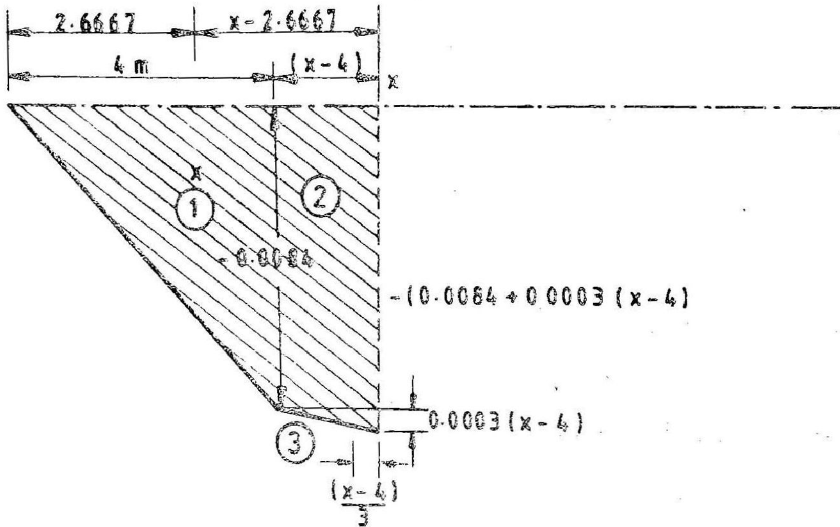
$$= \quad 0.0192 - .0144x + .0036x^2 - .00005x^3$$

எனவே, விட்டத்தின் விலக்கம்.

$$y = x.\theta_A - y_t$$

$$= \quad 0.03625x - \left\{0.115 - 0.048x + .0036x^2 + .00005x^3\right\}$$

$$y = -0192 + 0.05065x - 0.0036x^2 + 0.00005x^3$$



படம் 12.15 d

வெட்டுமுகம் x இல் சரிவும் விலக்கமும் கணக்கிடுமுறை

மேலே $\frac{dy}{dx}$, y ஆகியவற்றுக்குரிய பெறப்பட்டுள்ள கோவைகள் $4 < x < 9$ – என்னும் வரம்பிற்குள்தான் பயன்படத்தக்கவை பிற வெட்டுமுகங்களுக்குத் தேவையான கோவைகளை இதே முறையில் அந்த வெட்டுமுகம் வரையிலான வளைபரப்புப் படத்தினைக் கொண்டு பெறலாம்.

உச்ச விலக்கத்தினைக் கண்டுபிடிக்கும் முறை

விலக்கம் உச்சமாயிருக்கும் வெட்டுமுகத்தில் சரிவு $\theta_x = 0$ வாயிருக்கவேண்டும். சுமைகளின் அமைப்பினையும் இடங்களையும் கொண்டு (படம் 12.5 ன் உச்சவிலக்கம் $(\theta_x = 0)$ ஏற்படக்கூடிய இடம் $4 < x < 9$ – க்குள்ளாக இருக்கும் எனக்கருதலாம். அதனால், அதற்குத் பொருந்துவதான சமன் (12.3) ஐ பயன்படுத்தி

$$\theta_x = 0.05065 - 0.0072x - 0.00015x^2 = 0$$ என எழுதலாம்

$$\therefore \quad x^2 + 48x - 337.667 = 0$$

இதிலிருந்து $x = 6.22692$ m

எனவே, உச்சவிலக்கம், $y_{max} = (y)_{x=6.22692}$

$= -0.0192 + 0.05065 \times 6.22692 - 0.0036 \times 6.22692^2$

$- 0.00005 \times 6.22692^3$

$= 0.144533$ mm.

$x = 5$m எனும் வெட்டுமுகத்தில்

சரிவு $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=5} = 0.05065 - 0.0072 \times 5 - 0.00015 \times 5^2$

$= 0.0109$ radians $= 0° 0° 39.24"$

விலக்கம் $(y)_{x=5} = -0.0192 + 0.05065 \times 5 - 0.0036 \times 0.0036 \times 5^2$

$-- 0.00005 \times 5^3$

$= 0.1378$m $= 137.8$ mm.

(இவ்வாறே பிற வெட்டுமுகங்களுக்கும் அதற்குப் பொருந்துவதான சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடல் இயலும்) .

எ.கா . 12.9

படம் 12.16 இல் காட்டப்பட்டுள்ள தொங்கு முனைவிட்டத்தின் வளைவிறைப்பு EI இட முனையிலிருந்து 9 மீட்டர் தூரம் வரை 9×10^4 kNm^2 எனவும் எஞ்சிய பகுதியில் 6×10^4 kNm^2 எனவும் கொண்டு, இடமுனைத் தாங்கியில் சரிவு $\theta_{x=0}$, உச்சவிலக்கம், y_{max}, தொங்கு முனையில் சரிவு $\theta_{x=15}$ தொங்குமுனையில் விலக்கம், $y_{x=0}$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

முதலில் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் காண்போம்.

எல்லா விசைகளுக்கும் தாங்கி A யில் திருப்புமை

$= R_B \times 12 - 150 \times 3 - 120 \times 6 - 90 \times 9 - 60 \times 15 = 0$

எனவே, $12 \times R_B = 150 \times 3 + 120 \times 6 + 90 \times 9 + 60 \times 15 = 2880$ kNm

படம் 12.16

ஆகவே, $R_B = \frac{2880}{12} = 240$ kN

மொத்தப் புறவிசை = 150 + 120 + 90 + 60 = 420 kN

எனவே, $R_A = 420 - 240 = 180$ kN

வளைதிருப்புமைப்படம் நேர்வரைகளால் ஆனது (குவிசுமைகள்மட்டுமே செலுத்தப் படுவதால்) ஆகவே, குவிசுமைப் புள்ளிகள் வளைதிருப்புமைகள் கணக்கிடப்பட்டால் எளிதில் திருப்புமை படம் வரையலாம்.

$$M_C = R_A \times 3 = 180 \times 3 = 540 \text{ kNm}$$

$$M_D = 180 \times 6 - 150 \times 3 = 600 \text{ kNm}$$

$$M_E = 180 \times 9 - 150 \times 6 - 120 \times 3 = 360 \text{ kNm}$$

$$M_B = 60 \times -3 = -180 \text{ kNm}$$

$$M_F = 0$$

இவற்றைக் கொண்டு வரையப்பட்ட வளைதிருப்புமைப்படம், படம் 12.16. b இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. வளைமைப் படத்தைப் பெற வளைதிருப்புமைப் படத்தின் மதிப்புகளை வளைவிறைப்பின் மதிப்பினால் வகுப்பதுடன் எதிர் மறையாகவும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்

(அஃதாவது எவ்வொரு வெட்டு முகத்திலும் $K = \frac{-M}{EI}$) இதனால், பெறப்படும் வளைமைப் படம், படம் 15.16 c இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இனிச் சரிவு, விலக்கம் ஆகியவற்றை இவ் வளைமைப் படத்தின் துணைகொண்டு கணக்கிடும் முறை முந்தைய எடுத்துக்காட்டினைப் போன்றதேயாகும். தாங்கி வெட்டுமுகங்கள் A,B, இவற்றின் சரிவுகள் θ_A, θ_B எனக் கொண்டால்,

$\theta_B - \theta_A$ = இருதாங்கிடையேயுள்ள வளைமைப்படத்தின் பரப்பு.

இப் பரப்பினைக் கணக்கிட, வளமைப்படம் எளிய பகுதிகளாகப் பகுத்துக் கொள்ளப் பட்டுள்ளது. அதனால்,

$$\theta_A - \theta_B = \frac{-0.006 \times 3}{2} + -0.006 \times 3 + \frac{-0.001 \times 3}{2} + -0.004 \times 3 \ \frac{-0.003 \times 3}{2} + \frac{-0.006 \times 2}{2} + \frac{0.003 \times 1}{2}$$

$$= -0.009 + (-0.018) + (-0.0015) + (-0.012) + (-0.0045) + (-0.006) + 0.0015$$

$$= -0.0495 \text{ radians.}$$

வெட்டுமுகம் A யில் வரையப்படும் தொடு கோடு, தாங்கி B யிலிருந்துமவிலகியிருக்கும் தூரம் $\theta_A \times AB$ என அறிவோம். அஃதாவது இதன் மதிப்பு 12 θ_A எனக் கணக்கிடலாம். தாங்கி Bயில் விட்டத்தின் விலக்கம் 0 ஆகலின் 12 θ_A இன் மதிப்பு நீட்டம் AB யில் அமைந்துள்ள வளைமைப் படத்திற்கு வெட்டுமுகம் B யில் கணக்கிடப்படும் திருப்புமை க்குச் சமமாய் இருக்கவேண்டும் (காண்க படம் 12.16.d) எனவே,

$$12\,\theta_A = (-0.009 \times -10) + (-0.018)(-7.5) + (-0.0015)(-7) + (-0.012)(-4.5) + (-0.0045)(-5) + (-0.006)(-2.333) + (0.0015)(-0.333)$$

$$12\,\theta_A = 0.3195$$

$$\theta_A = 0.0260416 \text{ radians}$$

$$\theta_B = -0.0495 + 0.0260416 = -0.0234583 \text{ radians}$$

உச்சவிலக்கம் காண

விலக்கம் உச்சமாயிருக்குமிடத்தில் சரிவு சுழி (0) யாகும். இவ் வெட்டுமுகம் இருக்கும் பகுதியை நாம் தேட வேண்டுவதில்லை. வளைமைப்படப் பரப்புகளைக் கொண்டே θ சுழியாயிருக்கும் பகுதியை வரையறுக்கலாம். A யிலிருந்து X தொலைவிலுள்ள வெட்டுமுகத்தில் $\theta = 0$ என வைப்போம்.

$\theta_x = \theta_A$ + A x பகுதியிலுள்ள வளைமைப் படத்தின் பரப்பு. அதாவது $\theta_x = \theta_A$ + A x பகுதியிலுள்ள வளைமைப் படத்தின் பரப்பு. அஃதாவது A, x இருவெட்டுமுகங்களுக் கிடையுள்ள வளைமைப் படத்தின் பரப்பு $-\theta_A$ (– 0.026041666) ஆக இருக்க வேண்டும்.

AC யில் வளைமைப்படப் பரப்பு = – 0.009, $\therefore x > AC$

CD யில் வளைமைப் படப் பரப்பு = – 0.018 – 0.0015

∴ AD யில் வளைமைப் படப் பரப்பு = – 0.009 – 0.018 – 0.0015

= – 0.0285 $\therefore x < AD$

இவை இரண்டனையும் இணைக்க $AC < x < AD$ எனப் பெறலாம். அஃதாவது உச்ச விலக்கமடையும் வெட்டுமுகம் CD பகுதியில் உள்ளது. இப் பகுதியில் சரிவுக்குரிய கோவை.

$$\theta_x = 0.0260416 - 0.009 - 0.006\,(x-3) - \frac{0.001}{3}\,(x-3)\,\frac{(x-3)}{2}$$

$$= 0.033916672 - 0.006x - 0.00016x^2 = 0$$

அல்லது $x^2 + 36x - 203.5 = 0$

இதிலிருந்து $x = 4.967369$ m. எனப் பெறலாம்.

இவ் வெட்டுமுகத்தில் வளைமை $= -0.006 - 0.001 \times \frac{4.967368 - 3}{3}$

$= -0.006665579.$

இதிலிருந்து உச்ச விலக்கம்,

$y_{max} = y_{x=4.967368} = -0.0260416 \times 4.967368$

$= 0.009 \times (4.067368 - 2)$

$= 0.006 \times (4.967368 - 3) \frac{(4.967368 - 3)}{2}$

$(-0.00665579 - (-0.006) \times \frac{(4.967368-3)^3}{6}$

$= 0.0902\text{m} = 90.2\text{mm}.$

தொங்குமுனையில் சரிவு, விலக்கம் இவற்றை θ_F, y_F எனக் கொள்வோம்.

$\theta_F - \theta_B$ = F B பகுதியில் வளைமைப் படத்தின் பரப்பு

$= 0.0003 \times \frac{3}{2} = 0.00045$

$\theta_F = 0.00045 + \theta_B$

$= 0.00045 + (-0.0234583)$

$= -0.02301$ radians

θ_B யில் வரையப்படும் தொடுகோடு வெட்டுமுகம் F இல் அடையும் விலக்கம்,

$= -0.023458333 \times 3 = -0.070375$ m.

தொடுகோட்டிலிருந்து விட்ட அச்சின் விலக்கம்.

= BF பகுதியிலுள்ள வளைமைப் படத்திற்கு F இல் திருப்புமை

$= +0.003 \times \frac{3}{2} \times 2 = 0.009$m.

எனவே, தொங்குமுனை F இன் விலக்கம் = – 0.070375 + 0.009

= – 0.061375m

= – 61.375 mm (மேல் நோக்கியமைவது)

இவ்விரு எடுத்துக்காட்டுகளையும் நோக்கும் போது இரட்டைத் தொகைய முறையைவிடப் பரப்புத்திருப்புமை முறையில் கணக்கீடுகள் எளிமையானவையாயிருப்பதைக் காணலாம். குறிப்பாய் விட்டத்தின் வல முனைக்கு அண்மையிலுள்ள பகுதிகளில் விட்டத்தின் சரிவு, விலக்கம் இவற்றைக் கணக்கிடுதல் (வலமுனையிலிருந்து விலக்கச் சமன்பாடுகளை அமைப்பதன்மூலம்) மிக எளிதாய் அமைவதைக் காணமுடியும். ஆனால், செய்யப்படும் கணக்கீடுகளின் கருத்தைத் தெளிவாய் உணர்ந்துகொள்ள விளக்கப்படங்கள் மிகுதியாய்த் தேவைப்படுவதுடன் கூர்மையாய கவனமும் தேவை என்பது புலப்படும்.

பரப்பு-திருப்புமை முறையைக் கருத்தளவிலும் எளிதாக்க முற்பட்ட முயற்சிகளின் விளைவாகத் தோன்றியது இணைவிட்ட முறை (Conjucate Beam Mehtod). இம் முறையின் அடிப்படை ஓர் ஒப்புமை (Anology) என்பதனை முதலிற் காட்டுவோம்.

இணைவிட்ட முறை (Conjucate Beam Method)

வளைமை $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ இரு முறை தொகையீடுத்த, முதற்படியில் சரிவு $\frac{dy}{dx}$ உம் அடுத்தபடியில் விலக்கம் y யும் கிடைக்கப் பெறுதலைக் கண்டோம். முந்தைய அதிகாரத்தில், (அதி.5) பரவுசுமை வீதம் q ஐ தொகையீடுத்த நறுக்குவிசை + Q உம். அதனை மீண்டும் தொகையீடுத்த எதிர்வளைதிருப்புமை – M உம் கிடைப்பதையும் கண்டோம்.

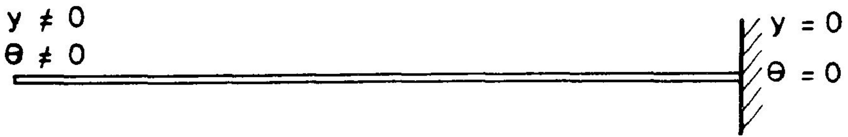
எதிர்வளைமை $\frac{-d^2y}{dx^2}$ யையும், பரவுசுமை வீதம் q ஐயும் ஒப்பிணை அளவுகளாகக் (Analogous Quantities) கருதுவோம். ஒருவிட்டத்தின் எதிர்வளைமையையே, சுமையாகக் கருதுவோமெனில் அச் சுமை காரணமாய்த் தோற்றுவிக்கப்படும் எதிர்நறுக்குவிசையின் அளவு விட்டத்தின் சரிவிற்குச் சமமாயும், அவ்வாறே வளைதிருப்புமையின் அளவு விட்டத்தின் விலக்கத்திற்குச் சமமாயும் இருக்கும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட விட்டத்தன்மீது செயல்படும் விசைகளால் விளைவிக்கப்படும் வளைதிருப்புமைப் பரவலைக் கணக்கிட்டு, அதிலிருந்து வளைமைப் பரவலைக் கணக்கிட்டு அதன் எதிர்மறை அளவினை இணைவிட்டத்தின்மீது சுமையாய்க் கொண்டால் எந்தவொரு வெட்டுமுகத்திலும் கணக்கிடப்படும் நறுக்குவிசை கடிகைத் திசைச் சரிவையும் (Clock-wise slope) வளைதிருப்புமை கீழ்நோக்கிய விலக்கத்தையும் தரும் என்பதை அறியலாம்.

இவ்வுறவுகளைக் கீழுள்ள பட்டியலில் விளக்கமாய்க் காணலாம்

விட்டத்தின் விசைஅளவுகள்	இணைவிட்டத்தின் அளவு	ஈடாய மெய்விட்ட அளவு
இணைசுமை வீதம் (Conjucate u.dl)	$\bar{q}$	$\frac{-d^2y}{dx^2}$ அல்லது $\frac{M}{EI}$
இணைநறுக்கவிசை (Conjucate S.F.)	$\bar{Q} = \int \bar{q}\, dx$	$\int \frac{-d^2y dx}{dx^2} = \int \frac{M\,dx}{EI} = \frac{-dy}{dx}$
இணைவளை திருப்புமை (Conjucate B.M.)	$\bar{M} = -\int \bar{Q}\, dx$	$= -\int -\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = y$

இக் கருத்தின் பயன்பாட்டை நோக்குமுன் இணைவிட்டம் என்றால் என்ன? என்பதனைத் தெளிவாய்ப் புரிந்துகொள்ளவேண்டும். அஃதாவது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மெய்விட்டம் தாங்கப்படும் விதத்திற்கும், அதற்குரியத்தாய இணைவிட்டம் தாங்கப்படும் விதத்திற்குரிய உறவுகளைப் பற்றி நாம் இதுவரை கருதவில்லை. இவ் வுறவுகளையும் தெளிவாய் அறிந்து கொண்ட பின்னரே ஒவ்வொரு விட்டத்திற்கும் உரித்தாய இணைவிட்டங்களை நிறுவ முடியும். படம் 12.17 இல் காட்டப்பட்டுள்ள துருத்துவிட்டத்தினை நோக்குவோம். இடமுனை A யில், விலக்கம் சரிவு இரண்டுமே சுழியல்லாத மதிப்புகள் கொண்டுள்ளன. இணைவிட்டத்தில் இதற்குரிய அளவுகளாய இணைவளைதிருப்புமை $\bar{M}$ இணைநறுக்கவிசை, $\bar{Q}$ இரண்டுமே





படம் 12.17

சுழியல்லாமல் இருக்க வேண்டுமாயின் இம்முனை உறுதிப் பற்றுமுனையாயிருக்க வேண்டும். அவ்வாறே வலமுனை B யில் விலக்கம், சரிவு இரண்டும் சுழிகளே. இணைவிட்டத்தில் இவற்றுக் குரியத்தாய அளவுகள் இணைநறுக்குவிசை, இணைவளைதிருப்புமை இரண்டும் சுழியாயிருக்க வேண்டு மெனில், B தொங்கு முயையாகயிருக்க வேண்டும். அதனால் படம் 12.17. a இல் காட்டப்படும் துருத்துவிட்டத்திற்கு உரித்தாய இணைவிட்டத்தில், தாங்கி முனையும் பற்று முனையும் ஒன்றற்கொன்று இடம் மாறுதலைக் காணலாம்.

ஆனால், எளிமை தாங்கிவிட்டத்தில் இருமுனைகளிலும், இரண்டுமே சுழியாய் இருப்பதால் மெய்விட்டமும், இணைவிட்டமும் ஒன்றாகவே இருக்கக் காணலாம். இவ்வாறே சிலவகை மெய் விட்டங்களுக்காய இணைவிட்டங்கள் படம் 12.18 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

இனி, இணைவிட்டமுறையில் எடுத்துக்காட்டு ஒன்றனைக் காண்போம்.

எ.கா .12.10 :

படம் 12.19 இல் காட்டப்பட்டுள்ள விட்டத்தில் உச்சவிலக்கம், C, D, E ஆகிய வெட்டு முகங்களின் விலக்கம், வெட்டுமுகம் E இன் சரிவு இவற்றை இணைவிட்டமுறைமூலம் காண்க. விட்டத்தின் வளைவிறைப்பு $EI = 60000\ kN/m^2$ எனக் கொள்க.

தீர்வு :

முதலில் விட்டத்தின் தாங்கி எதிர்வினைகளைக் கணக்கிட்டு வளைதிருப்புமைப் பரவலைக் காண்போம்.

எல்லா விசைகளுக்கும் தாங்கி A இல் திருப்புமை $= 0$

அஃதாவது, $-120 \times 3 - 180 \times 6 + R_B \times 9 - 40 \times 3 \times 10.5 = 0$

$$9R_B = 120 \times 3 + 180 \times 6 + 40 \times 3 \times 10.5 = 2700\ kNm$$

$$R_B = \frac{2700}{9} = 300\ kN$$

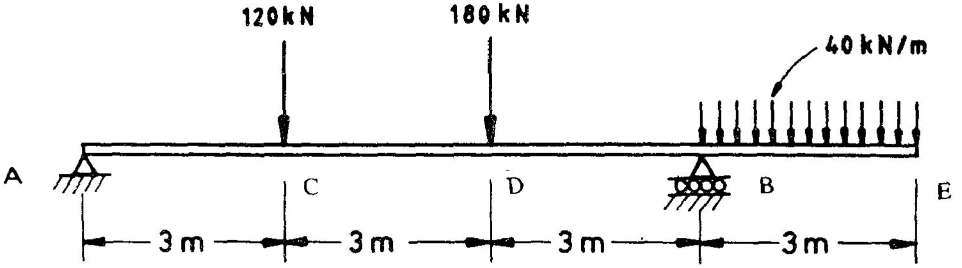
$$R_A = 120 + 180 + 40 \times 3 - 300 = 120\ kN$$

புறவிசைகளின் அனைத்தும் அறியப்படுவதால் இனி, எளிதில் வளைதிருப்புமைப் பரவவலைக் கணக்கிடலாம். நீட்டம் AB யில் குவிசுமைகள்மட்டுமே செயல்படுவதால் வளைதிருப்பு மைப்படம் நேர்க்கோடுகளால் அமையும். நீட்டம் BE இல் இது குழிபரவளையமாய் (Concave Parabala) எதிர்திசையில் அமையும்.

$$M_C = R_A \times AC = 120 \times 3 = 360\ kNm$$

மெய்விட்ட வகை	மெய்விட்ட அமைப்பு	இணைவிட்ட அமைப்பு
1. துருத்து விட்டம்	$\frac{dy}{dx} \neq 0$, $y \neq 0$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$	$\bar{Q} \neq 0$, $\bar{M} \neq 0$; $\bar{Q} = 0$, $\bar{M} = 0$
2 எளிமை தாங்கி விட்டம்	$y = 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$	$\bar{M} = 0$, $\bar{Q} \neq 0$; $\bar{M} = 0$, $\bar{Q} \neq 0$
3 ஒரு முனை தொங்கு விட்டம்	$y = 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$; $y \neq 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$	$\bar{M} = 0$, $\bar{Q} \neq 0$; $\bar{M} = 0$, $\bar{Q} \neq 0$; $\bar{M} \neq 0$, $\bar{Q} \neq 0$
4 இருமுனை தொங்கு விட்டம்	$y \neq 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$; $y \neq 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$	$\bar{M} \neq 0$, $\bar{Q} \neq 0$; $\bar{M} = 0$, $\bar{Q} \neq 0$; $\bar{M} = 0$, $\bar{Q} \neq 0$; $\bar{M} \neq 0$, $\bar{Q} \neq 0$
5 உட்கீல் அமைவிட்டம்	$y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; $y \neq 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$	$\bar{M} = 0$, $\bar{Q} = 0$; $\bar{M} \neq 0$, $\bar{Q} \neq 0$; $\bar{M} = 0$, $\bar{Q} \neq 0$
6 உட்கீல் அமைவிட்டம் (மாற்று வகை)	$y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; $y \neq 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$; $y \neq 0$, $\frac{dy}{dx} \neq 0$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$	$\bar{M} = 0$, $\bar{Q} = 0$; $\bar{M} \neq 0$, $\bar{Q} \neq 0$; $\bar{M} \neq 0$, $\bar{Q} \neq 0$; $\bar{M} = 0$, $\bar{Q} = 0$

படம் 12.18



படம் 12.19 a. மெய் விட்டமும் சுமைகளும்

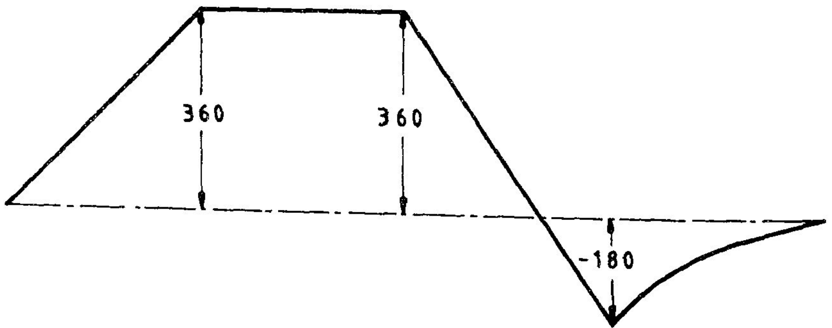
$$M_D = R_A \times AD - 120 \times CD$$

$$= 120 \times 6 - 120 \times 3 = 360 \text{ kNm}$$

$$M_B = 120 \times 9 - 120 \times 6 - 180 \times 3 = -180 \text{ kNm}$$

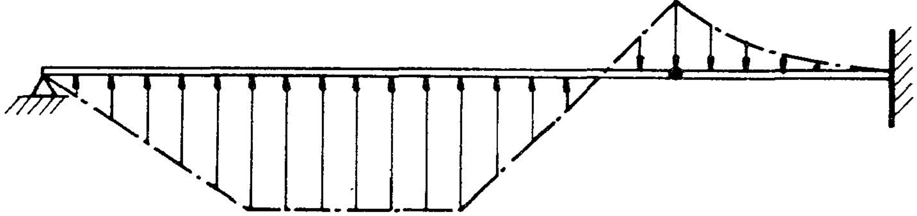
$$M_E = 0$$

இவ் வளவீடுகளைக் காட்டும் வளைதிருப்புமைப் பரவலைப் படம் 12.19 b காட்டுகிறது. வளைதிருப்புமை மதிப்புகளை, வளை விறைப்பினால் (60000) வகுக்க, எதிர்வளைமை $\left(\frac{-d^2y}{dx^2}\right)$ யில் பரவல் கிடைக்கின்றன. இதுவே இணைவிட்டத்தின்மீது செயல்படுவதாய்க் கருதப்படும்



படம் 12.19 b. வளை திருப்புமைப் படம்

இணைச்சுமைப் பரவலாகும். இணைவிட்டமும் அதன்மீது செயல்படும் சுமைகளும் படம் 12.19 c யில் காட்டப்பட்டுள்ளன. இப் படத்தின் துணைகொண்டே தேவையாய வெட்டு முகங்களில் விலக்கம், சரிவு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடலாம். (கணக்கீட்டு வசதிக்காகப் படம் 5 பகுதிகளாகப் பிரித்துக்கொள்ளப்படுகிறது).



படம் 12.19 c. இணைவிட்டமும் சுமைகளும்

இணைவிட்ட ஆய்வு :

முதலில் இணைவிட்டத்தின் தாங்கிவினைகளைக் கணக்கிடுவோம். (தாங்கி A யின் எதிர் வினைமட்டும் கணக்கிட்டாற் போதும்). தாங்கி A யின் எதிர்வினை $\overline{R}_A$ எனக் கொள்வோம். நீட்டம் AB யில் செயல்படும் அணைத்து விசைகளுக்கும் கீல் B யில் திருப்புமை 0 ஆகும்.

$$\overline{M}_B = \overline{R}_A \times 9 - 0.006 \times \frac{3}{2} \times 7 - 0.006 \times 3 \times 4.5 - 0.006 \times \frac{2}{2} \times 2.333$$

$$\left(-0.003 \times \frac{3}{2} \times 7\right) = 0$$

$$9\,\overline{R}_A = 0.1575$$

$$\overline{R}_A = \frac{0.1575}{9} = 0.0175.$$

(இங்கு $\overline{Q} = \overline{R}_A$ ஆகலின், வெட்டுமுகம் A யில் சரிவு $\theta_A = 0.0175$ radian. $\overline{R}_A$ என்பது மேல் நோக்கிய இணைவிசையாகும். இப்போது வெட்டுமுகம் E க்கு இடப்புறத்தில் முழு நீட்டத்திலும் புறஇணைவிசைகள் தெரியுமாதலால், எந்த வெட்டுமுகத்திலும் இணை நறுக்குவிசை (எதிர்ச்சரிவு), இணைவளை திருப்புமை (விலக்கம்) ஆகியவற்றை எளிதில் கணக்கிடலாம்.

வெட்டுமுகம் C யில் விலக்கம்.

$$y_c = \overline{M}_c = 0.0175 \times 3 - .009 \times 1 = .0435\text{m} = 43.5\text{mm}$$

வெட்டுமுகம் D யில் விலக்கம்,

$$y_D = \overline{M}_D = 0.0175 \times 6 - .009 \times 4 - .018 \times 1.5$$

$$= 0.042\text{m} = 42\text{mm.}$$

வெட்டுமுகம் E யில் சரிவு

$$\theta_E = \overline{Q}_E = -\left\{ -0.0175 + 0.009 + 0.018 + 0.006 \right\}$$

$$-0.0015 - 0.003\,*$$

$$= -0.011 \text{ radians}$$

வெட்டுமுகம் E இல் விலக்கம்

$$y_E = \overline{M}_E = 0.0175 \times 12 \times 12 - 0.009 \times 10 - 0.018 \times 7.5 - 0.006 \times 5.333$$

$$+ 0.0015 \times 3.333 + 0.003 \times 2.25^{**}$$

$$= -0.03525\text{m} = -35.25\text{mm.}$$

உச்சவிலக்கம் y_{max} காண இணைவிட்டத்தில் உச்ச வளைதிருப்புமை $\overline{M}_{max}$ காணவேண்டும். இதன் அமைவிடத்தில் $\overline{Q} = 0$ ஆக இருக்கும். தாங்கி A யிலிருந்து x தொலைவிலுள்ள வெட்டுமுகத்தில் இணைநறுக்குவிசை $\overline{Q}(x)$க் காய கோவை,

$$\overline{Q}(x) = -\overline{R}_A + 0.009 + 0.006(x-3) \quad 3 < x < 6$$

என விட்டப்பகுதி CD யில் எழுதலாம்.

அஃதாவது, $= -0.0175 + 0.009 + 0.006(x-3)$

$$0.006x = 0.0175 - 0.009 + 0.018$$

$$x = 4.416\text{m.}$$

x = 4.416 எனும் வெட்டுமுகத்தில் இணைவளைதிருப்புமை $M_{x = 4.416}$

---

* குழிபரவலயத்தின் பரப்பு $= \left(\frac{1}{3} \times b \times h\right)$

** (குழிபரவலயத்தின் ஈர்ப்புமையத்தூரம் O ஆயமுள்ள முனையிலிருந்து 3/4 அளவு தொலையில் இருக்கும்)

$$= \quad 0.0175 \times 4.416 - 0.009\,(4.416-2) - 0.006\left(\frac{4.416-3}{2}\right)^2$$

$$= \quad 0.049521\text{m} \quad = \quad 49.521 \text{ mm.}$$

இணைவிட்ட முறையைப் பற்றிய சில பொதுவாய கருத்துகளை இவ்வெடுத்துக்காட்டால் அறிமுடிகிறது.

1. இதே எடுத்துக்காட்டினைப் பரப்புத்திருப்புமை முறையில் பயிற்சியாய்ச் செய்துபார்க்க. இரண்டு முறைகளிலும் கணக்கீடுகள் முற்றிலும் ஒரே தன்மையனவாய் அமைவதைக் காண முடியும். அஃதாவது, பரப்புத் திருப்புமை முறைக்கு மற்றொரு பெயரே இணைவிட்டமுறை எனக் கூறலாம். ஆனால், பரப்புத் திருப்புமை முறையில் தேவைப்படும் கூடுதல் படங்கள் ஈண்டுத் தேவைப்படுவதில்லை. அப் படத்தினின்று பெறப்படும் கருத்துகளை நேரடியாகவே இங்குப்பெற்றுவிடுகிறோம். இதிலிருந்து இணைவிட்ட முறையில் கருத்து எளிமை கிட்டுகிறது என்பது தெளிவு.

2. பரப்புத்திருப்புமை முறை (இணைவிட்ட முறை) யில் வளைமைப் படங்களை நேர்க்கோடுகளாகவோ, பல்வகை வளைகோடுகளோகவோ, (விசை செலுத்தத்தைப் பொறுத்து) அமையலாம். இத்தகைய படங்களில் (படப்பகுதிகளின்) பரப்பு. ஈர்ப்புமையம் முதலியன இக் கணக்கீடுகளில் தேவைப்படுகின்றன. அதனால் இவற்றறில் நல்ல விளக்கமும் தெளிவும் பயிற்சியும் தேவையாகும்.

பயிற்சி 12.

எ.கா. 12.8, 12.9 ஆகிய வினாக்களுக்கு இணைவிட்ட முறையில் தீர்வு காண்க

13. சுருள் வில்கள்
(Coiled Springs)

13.1 சுருள்வலயவடிவ வில்லின் நீட்சி (Deflection of Helical Spring)

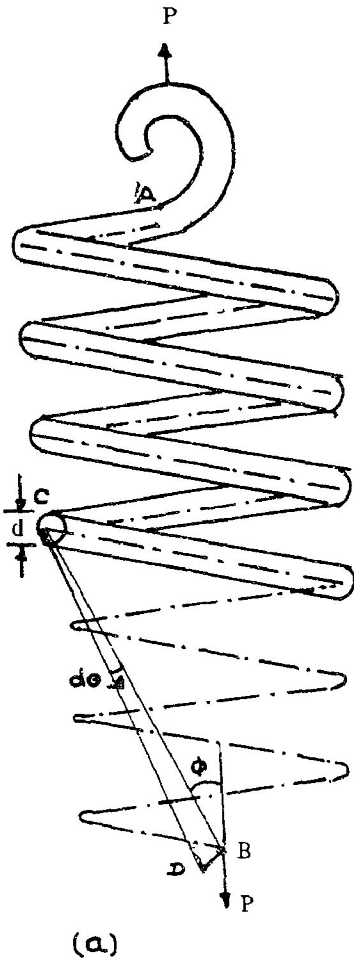
பொறியியல் அமைப்புகளில் விசைத்தாக்கங்கள், அதிர்ச்சிகள் தோற்றுவிக்கப்படும்போது அவற்றைத் தாங்கிக்கொண்டு, அவை தோற்றுவிக்கும் விளைவுகள், பிற உறுப்புகளை மிகுதியாய்ப் பாதிக்காமல் காக்கும் இடைநிலை உறுப்புகளாய் வில்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவற்றுள் வண்டிச் சக்கரங்களுக்குத் தாங்கியாய்ப் பயன்படும் பட்டைவில்களைப் (Leaf Springs) பற்றி ஆறாம் அத்தியாத்தில் கற்றோம். அடுத்து முக்கிய வகையான சுருள்வில்களைப் பற்றி இங்குக் காண்போம்.

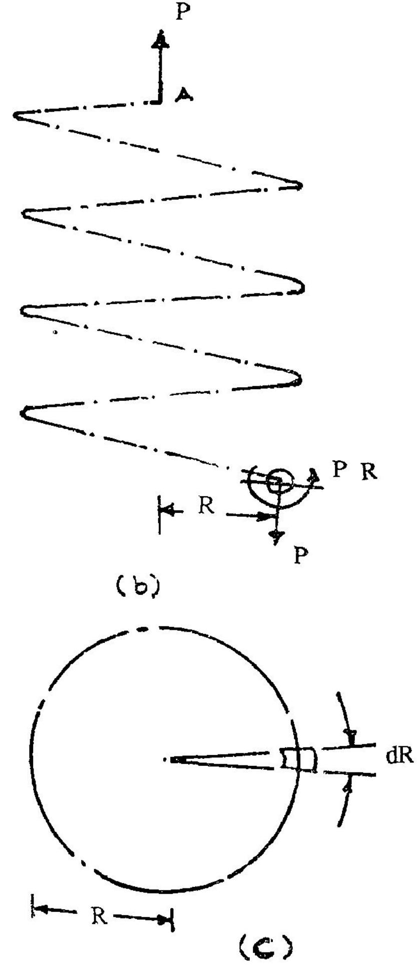
படம் 13.1 இல் சுருள் வில்லின் இருவகைகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. மீள்கம்பியை (Elastic Wire) சுருள்வலயவடிவத்தில் வளைத்து உருவாக்கப்படும் வில் சுருள்வலயவில் (Helical Spring) என அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு வில்லின் தன்மையைக் கீழ்க்காணும் அளவீடுகள் வரையறுக்கின்றன. அவை, கம்பியின் விட்டம் d, சுருளின் ஆரம் R, சுருள்களின் எண்ணிக்கை n, (இது பின்னமாகவும் இருக்கலாம்), கம்பிப் பொருளின் வலிமைப் பண்புகள், நறுக்க வலிமை τ, நறுக்கக்கெழு G, சுருள்களின் புரியிடைத் தூரம் P ஆகியனவாம். இவ் அளவீடுகள் வரையறுக்கப்பட்ட கம்பியொன்றன்மீது சுருளின் அச்சுத் திசையில் விசைகள் செலுத்தப்படுகின்றன. வில் தாங்கக் கூடிய அச்சுவிசை, நீள்விசையெனில் இதனை நீளுமைவில் (Tension Spring) என *அழைக்கின்றோம். விசை P செலுத்தப்படும்போது சுருள்கம்பியின் வெட்டுமுகங்களில் நேரடி நறுக்கு விசையாய்ச் செயல்படுவதுடன், முறுக்குத் திருப்புமையும் செலுத்துகிறது. இம் முறுக்குத் திருப்புமையின் அளவு P.R என்பதைப் படத்தை நோக்கியுணரலாம். இவ் விசைக் கூறுகள் தோற்றுவிக்கும் நலிவுகளின் மொத்த விளைவு அச்சுத் திசையில் வில்லின் நீளமாறுபாடு, δ (நீட்சி/குறுக்கம்). வில்லின் அளவீடுகள், செலுத்தப்படும் விசை ஆகியவற்றைச் சார்ந்திருக்கும். இவற்றுக்கு இடையிலாய உறவினை நிறுவுவோம்.

வில்லின்மீது நேரடியாய் செயல்படும் நறுக்கு விசையினால் வில்லின் குறுக்க, நீட்சிகள் மிகக் குறைந்த அளவிலேயே பாதிக்கப்படுகின்றன. அதனால் இவற்றைப் புறக்கணித்து முறுக்குத் திறனால் தோற்றுவிக்கப்படும் நலிவுகளில் கவனம் செலுத்துவோம். படம் 13.1(a)

---

* இறுக்கவிசையெனில் அதனை, அமுக்கவில் (Compression Spring) என அழைக்கிறோம்.





படம் 13.1

இல் வில் கம்பியின் மொத்த நீளத்தில் ஒரு சிறு துணுக்கு காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன் நீளம் dL எனக் கொள்வோம். இத் துணுக்கின் இரு முனைகளிலும் எதிரெதிர் திசைகளில் முறுக்குத் திருப்புமைகள் செலுத்தப்படுகின்றன.

இவற்றின் அளவு, T = P.R. நீளம், dL இல் சார்பு முறுக்கம்

$$d\theta = \frac{(PR) \, . \, dL}{G \, . \, J} \qquad (13.1)$$

P ஐ நீள்விசையாய்க்கொண்டு வில்லின் நீட்சி δ ஐக் கணக்கிடும் பொருட்டு வில், அதன் மேல்முனையில் தாங்கப்பட்டுக் கீழ்முனையில் இழுக்கப்படுவதாகக் கருதுவோம். துணுக்கு dL, இன் சுழற்சி d θ வினால் மட்டும் வில்லின்மீது தோற்றுவிக்கப்படும் சிதைவிலா இடப்பெயர்ச்சி (Rigid body displacement) படத்தில் BD எனக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இவ் இடப் பெயர்ச்சிக்குச் கிடைக்கூறு, நேர்க்குத்துக் கூறு இரண்டும் உள. ஆனால், வில்லானது வடிவத்தில் அச்சுச் சீர்மை (Axial symmety) கொண்டு விளங்குவால் இவ் இடப்பெயர்ச்சியின் கிடைக்கூறுக்கு (Horzontal component) எதிராய இடப்பெயர்ச்சி தரும் துணுக்குகள், ஒவ்வொரு துணுக்குக்கும் உண்டு. அதனால் மொத்த விளைவு ஏதுமில்லை. ஆனால் எல்லாத் துணுக்குகளும் விளைக்கும் இடப்பெயர்ச்சியின் நேர்க்குத்துக் கூறுகள் (Vertical Components) கீழ்நோக்கியே இருக்குமாதலால், இவற்றில் கூட்டுத்தொகையைக் கணக்கிட, வில்லின் நீட்சி, δ வின் அளவு கிடைக்கும்; விசை செலுத்துமுனை B இதிலிருந்து துணுக்கு C இன் உயரம் y எனில்,

$$BC = \sqrt{y^2 + R^2}$$

இவ்வளவீட்டை l எனக் குறிப்போம்:

$\angle ABC$ யை φ எனவும் குறிப்போம். துணுக்கின் முறுக்கம் dθ விளைவிக்கும் இடப்பெயர்ச்சி,

$$\dot{B}D = l\, d\theta$$

$$= l \frac{PR\ dL}{GJ}$$

இது BC க்குச் செங்குத்தாய திசையில் இருக்கும். இதன் நேர்க்குத்துக்கூறு dδ எனில்.

$$d\delta = BD \sin\theta$$

$$= l \frac{PR\ .\ dL}{GR} \cdot \frac{R}{l} = \frac{PR^2\, dL}{GJ}$$

அதனால் வில்லின் மொத்த நீட்சி

$$\delta = \int_0^L \frac{PR^2\, dL}{GJ}$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{PR^2 L}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{32\ PR^2 L}{G \pi d^4} \qquad (13.2)$$

கோவை 12.2 இல் நமக்கு வில்லின் நீளத்தைத் தவிர, மற்ற அளவீடுகள் யாவும் நேரடியாய் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. சுருள்களின் ஆரம் R எண்ணிக்கை n புரியிடைத் தூரம் p இவற்றால் வில்லின் மொத்த நீளம் L ஐயும் கணக்கிட்டு அறியலாம்.

வில்லின் ஒரு முழுச்சுற்றின் நீளத்திற்குக் கிடைத்திசை வீழல் = $2\pi R$

புரியிடைத் தூரம் p .

இதனால், ஒரு முழுச்சுற்றுக் கம்பியின் நீளம்

$$= \sqrt{4\pi^2 R^2 + p^2}$$

மாற்றுவழியில் கம்பியில் சாய்கோணம்

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{p}{2\pi R}$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\text{கம்பியின் ஒருமுழுச்சுற்று நீளம்} = \frac{2\pi R}{\cos\alpha}$$

$$\text{கம்பியின் மொத்த நீளம்} = \frac{2\pi R n}{\cos\alpha}$$

$$\delta = \frac{32\, PR^2}{G\pi d^4} \cdot \frac{2\pi R n}{\cos\alpha}$$

$$\delta = \frac{64\, .\, PR^3 n}{Gd^4 \cos\alpha} \qquad (13.3)$$

சுருள்வலய வடிவ வில்லின் நீட்சி δ வுக்குரிய அடிப்படை கோவையைச் சமன்பாடு 13.3 தருகிறது. இச் சமன்பாட்டில் கோணம்

$\alpha = 5°$ என்றால் $\cos\alpha = 0.9962$.

கோணம் α வின் அளவு இதனைவிடக் குறைவாயிருப்பின் cos α இன் மதிப்பு 1 என்றே வைத்துக்கொள்வோம்.

கொள்ள,

$$\delta = \frac{64\, PR^3 n}{G\, d^4} \qquad (13.4)$$

$\alpha = 5°$ ஆக இருக்க வேண்டுமெனில்,

புரியிடைத்தூரம்

$$p = 2R \tan 5° = 0.55 R$$

புரியிடைத்தூரம் p சுருளின் ஆரத்தில் 0.55 மடங்கு / அதற்கும் குறைவாயிருப்பின் அத்தகைய வில்களின் நீளத்தை

$L = 2\pi R n$ என்றே கொள்ளலாம்.

இவ்வாறு கொள்ளத் தக்க வில்களே பெரும்பாலும் புழக்கத்தில் இருக்கின்றன. இத்தகைய வில்களை நெருக்கச் சுருள்வலயவில்கள் (Close Coiled Helical Springs) என அழைக்கிறோம். இவற்றின் நீட்சியைச் சமன்பாடு 13.4 தருகிறது.

சமன்பாடு 13.3 / 13.4 வில்லின்மேல் செலுத்தப்படும் விசை, அது தோற்றுவிக்கும் நீட்சி δ இரண்டனையும் உறவுபடுத்துகிறது.

இவ்வுறவினை $\delta = f.P$ (13.5)

அல்லது $P = k\,\delta$ (13.6)

என்னும் வடிவங்களில் உரைக்கலாம்.

சமன்பாடு 13.5 இல், $f = \dfrac{64 . R^3 n}{G d^4 \cos\alpha}$;

P இன் அளவு ஓர் அலகு விசையெனில் δ = f எனப் பெறலாம். இக்காரணி, f, வில்லின் மீது அலகு நீள்விசை தோற்றுவிக்கும் நீட்சியைக் குறிப்பிடுகிறது. இதனையே வில்லின் இளக்கம் (Flexibility) என்கிறோம்.

இளக்கம், $f = \dfrac{64 R^3 n}{G d^4 \cos\alpha}$ (13.7)

சமன்பாடு 13.6 இல், $k = \dfrac{G d^4 \cos\alpha}{64 R^3 n}$,

δ என்பது ஓர் அலகு நீட்சியெனில், P = k எனப் பெறலாம். இக் காரணி k என்பது வில்லின்மீது ஓர் அலகு நீட்சியைத் தோற்றுவிக்கத் தேவையான விசையைக் குறிக்கிறது. இதனையே வில்லின் விறைப்பு (Stiffness) என்கிறோம்.

விறைப்பு, $k = \dfrac{G d^4 \cos\alpha}{64 R^3 n}$ (13.8)

வில்லின் விறைப்பு, k ஐ வில்மாறிலி (Spring constant) என்றும் அழைக்கிறோம்.

13.2 சுருள்வலயவில்லில் தகைவுகள் (Stresses in Helical Springs)

சுருள்வலயவில் கம்பியின் வெட்டுமுகம் ஒன்றன்மீது செயல்படும் விசை P திருப்புமை PR இரண்டும் படம் 13.1 இல் காட்டப்பட்டுள்ளன. வெட்டுமுகம் செங்குத்தாய தளத்துடன் α அளவு சாய்கோணம் எதிர்கொள்கிறது. அதனால், P, PR இரண்டும் வெட்டுமுகத்தின் குத்துத் திசை, தொடுதிசை இரண்டிலும் கூறுகள் கொண்டு விளங்கும்.

P	இன் குத்துக்கூறு (வெட்டுமுகத்தில் அச்சு விசை)	=	$P \sin \alpha$
P	இன் நறுக்குவிசைக்கூறு	=	$P \cos \alpha$
PR	இன் குத்துக்கூறு (கம்பிமீது முறுக்குத் திருப்புமை)	=	$PR \cos \alpha$
PR	இன் தொடுதிசைக்கூறு (கம்பிமீது வளைதிருப்புமை)	=	$PR \sin \alpha$

இக் கூறுகளில் $\cos \alpha = 1$ என எடுத்துக்கொள்வதில் பிழை மிகுதியில்லை.

அதனால், முறுக்குத் திருப்புமை $T = PR$

நறுக்குவிசை $Q = P$

முறுக்குத்திருப்புமை விளைவிக்கும் உச்சநறுக்குத் தகைவு $\tau_T = \frac{PR}{J} \cdot \frac{d}{2}$

நறுக்குவிசை விளைக்கும் தகைவு அளவில் குறைவாகவே இருப்பதால் அதன் அளவினைச் சில சமயங்களில் புறக்கணிக்கலாம்.

இதன் அளவு (தகைவில் தளத்தில்) $\tau_s^* = \frac{4}{3} \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}$

T இன் திசை ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அதன் வழியாய்ச் செல்லும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாயிருக்கும். ஆனால் τ_s இன் திசை கீழ்நோக்கியே இருக்கும் அதனால் தகைவில் அச்சின் ஒரு முனையில் தான் உச்ச நறுக்குத் தகைவு தோற்றுவிக்கப்படுகிறது.

இதன் அளவு, $\tau_{xy} = \tau_T + \tau_S = \frac{PR}{\frac{\pi d^3}{16}} + \frac{4}{3} \frac{P}{\frac{\pi d^2}{2}}$

$$\tau_{xy} = \frac{16P}{\pi d^3} \left(R + \frac{d}{3} \right) \qquad (13.10)$$

---

* நறுக்குவிசைப் பரவலை ஆய்ந்து காண்க.

நெருக்கச் சுருள் வில்லாயினும், அகன்ற சுருள் வில்லாயினும் (Open coil spring) அவற்றுள் தோற்றுவிக்கப்படும் உச்சநறுக்குத் தகைவின் அளவினை சமன்பாடு 13.10 ஐக் கொண்டே கணக்கிடலாம். மிகவும் துல்லியமாய் வேண்டுமெனில்,

$$\tau_{xy} = \frac{16P}{\pi d^3}\left(R + \frac{d}{3}\right)\cos\alpha \text{ எனக் கொள்ளலாம்.}$$

அடுத்து, அச்சுவிசை, வளைதிருப்புமை ஆகியவற்றால் தோற்றுவிக்கப்படும் (அச்சுத் திசையில்) குத்துத் தகைவு

$$\sigma_x = \frac{PR\sin\alpha}{\frac{\pi d^3}{32}} + \frac{P\sin\alpha}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$\sigma_x = \frac{32}{\pi d^3}\left(R + \frac{d}{8}\right) P\sin\alpha \qquad (13.11)$$

இத் தகைவுக் கூற்றினை அகன்ற சுருள்வில்களில் (Open Coil Spring) மட்டும் எடுத்துக்கொண்டு σ_x, τ_{xy} ஆகிய தகைவுகளின் கூட்டுநிலையை ஆராயலாம். நெருக்கச் சுருள்வில்லில் (Close coil springs), σ_x குறிப்பிடத்தக்க அளவில் τ_{xy} யின் பின்னமாயிருப்பினும் அதனால் தோற்றுவிக்கப்படும் கூட்டுவிளைவு மிகச் சிறிதேயாதலால் அதனை முற்றுமாய்ப் புறக்கணிக்கலாம்.

13.3 வில்களில் விகல ஆற்றல் (Strain Energy in Springs)

வில்களில் தேக்கப்படும் விகல ஆற்றலின் அளவினைக் கணக்கிட, வில் சும்பிமீது செயல்படும் விசைக்கூறுகளில் அளவில் மிகப் பெரியதாய முறுக்குத் திருப்புமையை மட்டும் கணக்கிலெடுத்துக் கொண்டால் போதும். முறுக்கத்தால் தேக்கப்படும் விகல ஆற்றல்,

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\, dx$$

இதில் $T = PR$, எனக் கொண்டு மாறிலிகளைத் தனிப்படுத்த

$$U = \frac{P^2R^2}{2GJ}\int_0^L dx = \frac{P^2R^2L}{2GJ}$$

$$= \frac{P^2R^2\, 2\pi R \cdot n}{2 \cdot G\,\frac{\pi d^4}{32}\cos\alpha} = \frac{32P^2R^2n}{G d^4\cos\alpha}$$

வில்லின்மீது அச்சு விசை P செலுத்தப்படுவதால் தோற்றுவிக்கப்படும் நீட்சி δ; இவ் விசை செய்த புறவேலை

$$V = \frac{P\delta}{2}$$

புற வேலையையும், தேக்கப்படும் விகல ஆற்றலையும் சமன்படுத்த

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{32\ P^2 R^3 n}{G d^4 \cos\alpha}$$

அதனால்,
$$\delta = \frac{64\ P R^3 n}{G d^4 \cos\alpha}$$

13.4 கூம்புவடிவ வில் (Conical Spring)

கூம்புவடிவ வில்லின் அமைப்பு படம் 13.2 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இவ் வில்லை நெருக்கச் சுற்றுவில்லாய்க் கொண்டு வில்லின் விறைப்பை விகல ஆற்றல் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம்.

வில்லின் மேற்பகுதியில் ஆரம் R_t, அடிப்பகுதி ஆரம் R_b, சுருள்களின் எண்ணிக்கை n, கம்பியின் விட்டம் d எனக் கொள்வோம். கம்பியில் தேக்கப்படும் விகல ஆற்றல்,

$$U = \int_{0}^{L} \frac{T^2\, dx}{2GJ} = \frac{1}{2GJ}\int_{R_1}^{R_2} P^2 R^2\, dL$$

என உரைக்கலாம். இங்கு ஆரம் R கொண்ட பகுதியில் ஒரு துணுக்கை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$dL = \frac{2\pi n\ .\ R\ .\ dR}{(R_b - R_t)}$$

அதனால்,
$$U = \frac{1}{2GJ}\int_{R_t}^{R_b} \frac{P^2 R^2\ 2\pi\ n\ R\ dR}{(R_b - R_t)}$$

$$= \frac{32\ P^2\ n}{G d^4 (R_b - R_t)}\int_{R_t}^{R_b} R^3\ dR$$

$$= \frac{32\ P^2\ n}{GD^4\ )R_b - R_t\ )} \left[\frac{R_b^4 - R_t^4}{4} \right]$$

$$\therefore \quad U = \frac{8P^2 n}{G\, d^4} \left(R_b^2 + R_t^2\right) \left(R_b + R_t\right) \tag{13.12}$$

இதனைப் புறவேலை, $\frac{P\,\delta}{2}$ உடன் சமன்படுத்த,

$$\frac{P\,\delta}{2} = \frac{8\ P^2\ n}{G\, d^4} \left(R_b^2 + R_t^2\right) \left(R_b + R_t\right)$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{16\ P\ n}{G\, d^4} \left(R_b^2 + R_t^2\right) \left(R_b + R_t\right) \tag{13.13}$$

$$\text{வில்விறைப்பு}, k = \frac{G\, d^4}{16 n \left(R_b^2 + R_t^2\right) \left(R_b + R_t\right)} \tag{13.14}$$

கூம்பு வில்லிலும், தகைவுகளைக் கணக்கிடும் அடிப்படை முறைகள் ஒன்றே. நெருக்கமாய சுற்றுகள் கொண்ட வில்லாகக் கருத வளைதிருப்புமை அச்சுவிசை ஆகியவற்றைப் புறக்கணித்து நேரடியாய நறுக்குவிசை P முறுக்குத் திருப்புமை ஆகியவற்றால் தோற்றுவிக்கப்படும் நறுக்குத் தகைவுகளைக் கணக்கிடலாம்.

முறுக்குத் திருப்புமையின் அளவு வெட்டுமுகம்தோறும் அவ் வெட்டுமுகத்தின் மையத்தில் சுருளின் வளைவாரத்தையொட்டி மாறுபடுகிறது. தகைவுகள் இவ்வளைவாரம் மிக அதிகமாயிருக்கும் வெட்டுமுகத்தில் தான் உச்சமாயிருக்கும்.

$$\text{வெட்டுமுகம் ஒன்றில் உச்சத்தகைவு } \tau_{max} = \frac{4\,P}{\frac{3\,\pi\, d^2}{4}} + \frac{16\ P R}{\pi\, d^3}$$

$$(\tau_{max}) = \frac{4\,P}{\pi\, d^3} \left(4\,R + \frac{d}{3}\right)$$

$$\text{இதன் உச்ச அளவு} \quad (\tau_{max})_{R = R_b} = \frac{4\,P}{\pi\, d^3} \left(4\ R_b + \frac{d}{3}\right) \tag{13.15}$$

13.5. சுருள்வில்களின் பயன், வடிவமைப்பு

பொறியியல் அமைப்புகளில் சுருள்வில்கள் பயன்படும்விதம், அவற்றுக்கேற்ற வடிவமைப்பு ஆகியவற்றை விளக்கும் எடுத்துக்காட்டுகள் சில காண்போம்.

எ.கா. **12.1**

நறுக்கு வலிமை 96 N/mm^2 நறுக்குக் கெழு G, 80 KN/mm^2 கொண்ட 6 mm கம்பியைக் கொண்டு விறைப்பு 0.4 N/mm கொண்ட சுருள்வவயவில் ஒன்று மொத்த விசை 50N தாங்குமாறு செய்யப்படவேண்டுமெனில் சுருள் ஆரம் R, சுருள்களின் எண்ணிக்கை n ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு :

வில்லின் விறைப்பு $k = \frac{G d^4}{64 R^3 n} = 0.4$ N/mm

$\therefore \quad R^3 n = \frac{G d^4}{0.4 \times 64} = \frac{8 \times 10^4 \times 6^4}{0.4 \times 64} = 4.05 \times 10^6$

உச்சத்தகைவு, $\tau_{max} = \frac{16 P}{\pi d^3} \left(R + \frac{d}{3}\right) \not> 96$ N/mm^2

அல்லது

$$= \frac{16 \times 50}{\pi 6^3} \left(R + \frac{6}{3}\right) < 96$$

$$\therefore \quad R < \left(\frac{96 \times \pi 6^3}{16 \times 50} - 2\right) \text{mm}$$

$R < 79.43$ mm

$R = 75$ mm எனக் கொண்டால்

$n = \frac{4.05 \times 10^6}{75^3} = 9.6$ சுற்றுகள்

எ.கா. **13.2**

நறுக்கு வலிமை 60 N/mm^2, நறுக்கக் கெழு G, 80 kN/mm^2 கொண்ட 12 mm கம்பியால் 100mm வளைவாரமும் 24 சுற்றுகளும் கொண்ட .சுருள்வில் ஒன்றன் விறைப்பு அது தாங்கக்கூடிய உச்சவிசை ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. இவ் வில்லின்மீது 120 N விசை செலுத்தப்படும்போது தோற்றுவிக்கப்படும் உச்சத் தகைவு யாது?

தீர்வு :

வில்லின் விறைப்பு, $k = \dfrac{G\,d^4}{64\ R^3 n}$

$= \dfrac{80000 \times 12^4}{64 \times 100^3 \times 24} = 1.08$ N/mm.

கம்பியின் நறுக்கு வலிமை $\tau = 60$ N/mm^2

அஃதாவது, $\dfrac{16\ P}{\pi\, d^3}\left(R + \dfrac{d}{3}\right) = 60$

இதிலிருந்து, $P = \dfrac{60 \times \pi\, d^3}{16\left(R + \dfrac{d}{3}\right)} = \dfrac{60 \times \pi \times 12^3}{16\left(100 + \dfrac{12}{3}\right)}$

வில்தாங்கக் கூடிய விசை, $P = 195.75$ N

$P = 120$ N எனில்

உச்சத் தகைவு, $\tau_{max} = \dfrac{16\ P}{\pi\ d^3}\left(R + \dfrac{d}{3}\right)$

$= \dfrac{16 \times 120}{\pi \times 12^3}\left(100 + \dfrac{12}{3}\right)$

$= 36.78$ N/mm^2

எ.கா. **13.3**

1800 kg பொருண்மை (Mass) கொண்ட வண்டியொன்று தண்டவாளத்தின்மீது மணிக்கு 3 km வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டுள்ளது. இதன் நிறுத்தத்தில் இரண்டு அடிதாங்கி வில்கள் (Buffer springs) 32 mm உருக்குக் கம்பிகளால் சுருள்வில்களாகப் பொறுத்தப்படுகின்றன. கம்பியின் நறுக்குவலிமை 90 N/mm^2 , நறுக்கக் கெழு, G, 80 kN/ mm ^{2} வண்டி நிறுத்தப்படும் போது அதன் மீது எதிர்முடுக்கும் (decelaration) g/3 - க்கு மேல் செலுத்தப்படாதவாறு வில்களை வடி வமைக்கவும்.

தீர்வு :

வண்டியின் பொருண்மை $= 1800$ kg

வண்டியின் வேகம், v = 3 km / hr = 0.833 m/sec.

வண்டியின் இயக்க ஆற்றல் = $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 1800 \times 0.833 = 625$ mN

$= 6.25 \times 10^5$ mmN

ஒவ்வொரு வில்லும் தேக்க
வேண்டிய விகல ஆற்றல் = 3.125×10^5 mmN

முடுக்கம், $a = g/3 = -9.81/3 = -3.27 \text{m/sec}^2$

அதனால், வில்லில் மோதியபின்
வண்டி நகரும் தூரம் $\delta = \frac{0.833 - 0}{2 \times 3.27} = 0.1062$ m

$= 106.2$ mm

அதனால், வில் குறைந்தபட்சம் 106.2 mm அமுங்க வேண்டும்.

வண்டியின் மீது செயல்படும்
உச்சவிசை = m.a. = $1800 \times 3.27 = 5886$ N

அதனால், ஒவ்வொரு வில்மீதும்
செலுத்தப்படும் விசை P = 2943 N

வில்லின் ஆரம் R எனில்

நறுக்குத் தகைவு $\tau = \frac{16 P}{\pi d^3}\left(R + \frac{d}{3}\right) = 90$

அதனால் வளைவாரத்தின்
உச்ச அளவு $R_{max} = \frac{90 \times \pi \times 32^3}{16 \times 2943} = \frac{32}{3}$

$= 186.09$ mm.

ஆரம் 125 mm கொண்டு வில் அமைப்போம்: வில் எத்தனை சுருள்களைக் கொண்டிருக்க வேண்டும் எனக் கணக்கிடுவோம்.

வில் தேக்க வேண்டிய விகல ஆற்றல். = 3.125×10^5 N . mm .

$$U = \frac{32 P^2 R^3 n}{G d^4} = 3.125 \times 10^5$$

அதனால்,

$$n = \frac{3.125 \times 10^5 \times 8 \times 10^5 \times 32^4}{32 \times 2943^2 \times 125^3} = 15.133$$

அதனால், 16 சுற்றுகள் கொண்ட சுருள்வில்கள் அமைக்கப்படலாம்.

பயிற்சிகள்:

13.1 எடுத்துக்காட்டு 13.3 இல் தேவைப்படும் வில்களை 28 mm கம்பிகளால் அமைக்க வேண்டுமாயின், வில்லின் அளவீடுகளைக் கணக்கிடுக.

13.2 நறுக்கு வலிமை 40 N/mm^2, நறுக்கக்கெழு 48 kN/mm^2 கொண்ட உலோகத்தால், வில்தராசு ஒன்று உருவாக்கப்படவேண்டும். இவ் வில்தராசின் முள்ளின் 1 mm இடப்பெயர்ச்சி 1 N விசையைக் குறிப்பதாயும், வில்தராசு 30 N எடை வரை அளக்கக்கூடியதாயும் வடிவமைப்புச் செய்க.

13.3 பயிற்சி 13.2இல் சுட்டப்பட்டுள்ள உலோகத்தாலாய 3mm கம்பியால் அடியாரம் $R_b = 60$ mm, மேல் ஆரம் R_t = 25 mm, இருக்குமாறு 14 சுருள்களால் அமைக்கப்படும் கூம்பு வடிவ வில்லின் விறைப்பினைக் கணக்கிட்டு, வில் தாங்கக்கூடிய உச்ச விசையைக் கண்டுபிடிக்க.

13.4 எடுத்துக்காட்டு 13.3 இல் வடிவமைக்கப்படும் வில்லின் புரியிடைத் தூரம் p = 75 mm எனில், செலுத்தப்படும் விசை, அஃதாவது 2943N தோற்றுவிக்கும் தகைவுக் கூறுகளைக் கணக்கிடுக. இவ் வில்லையும் நெருக்கச் சுற்றுவில் எனக் கொண்டு தகைவுகளைக் கணக்கிடுவதால் ஏற்படும் பிழைகளை ஆராய்க.

13.5 முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் P/R = 0.5,0.55 .... 1.0 வரை எடுத்துக்கொண்டு உச்ச நறுக்குத் தகைவு – P/R உறவின் படம் வரைக.

கலைச் சொற் பட்டியல்

(Glossary of Technical Terms)

Acceleration	-	முடுக்கம்
Angular acceleration	-	கோணமுடுக்கம், (சுழல்முடுக்கம்)
Anisotropic (Material)	-	திசைசார் மீள் (பொருள்)
Anticlockwise (Direction)	-	கடிகை எதிர் (திசை), இடஞ்சுழி
Arch	-	கமான்
Aspect angle	-	தளஞ்சுட்டுக்கோணம்
Assumption	-	துணிபு கற்பிதம்
Axial load	-	அச்சுச் சுமை
Axial force	-	அச்சு விசை
Axis	-	அச்சு
Axial symmetry	-	அச்சுச் சீர்மை, அச்சுச் சமச் சீர்மை
Balcony	-	துருத்து மாடம்
Beam	-	விட்டம்
Beam coloumn	-	விட்டத் தூண்
Beam of uniform strength	-	சீரான வலிமைகொண்ட விட்டம், சீர் வலிமை விட்டம்
Bending equation	-	வளைதல் சமன்பாடு
Bending theory	-	வளைதல் கோட்பாடு
Bending strength	-	வளைவலிமை
Bolt	-	மரையாணி
Buckling	-	நெளிதல்
Buffer spring	-	அடிதாங்கி வில்
Bulk modulus	-	பருமைக் கெழு, பருமக்கெழு
Built up section	-	இணைக்கப்பட்ட வெட்டுமுகம்
Calculus	-	கலன கணிதம், நுண்கணிதம்

Calibrate	-	அலகிடு, அளவிடு
Calibration	-	அலகிடல், அளவீடு
Calibrated	-	அலகிடப்பட்ட, அளவீடு செய்த
Cantilever	-	துருத்து விட்டம், கொடுங்கை
Carriage spring	-	வண்டிச்சக்கர வில்
Centroid	-	ஈர்ப்பு மையம்
Classification	-	வகைப்பாடு
Coefficient of Linear thermal expansion	-	வெப்பநீட்சிக் கெழு
Complementary shear stress	-	இணைநறுக்குத் தகைவு
Compression	-	இறுக்கம், அமுக்கம்
Compression spring	-	அமுக்கவில்
Compressive strength	-	இறுக்கவலிமை, அமுக்க வலிமை
Component	-	கூறு
Concentrated force (load)	-	குவிவிசை, குவிசுமை
Constant	-	நிலையெண், மாறிலி
Conversion factor	-	மாற்றல் காரணி
Conservative system	-	ஆற்றல் மாறா அமைப்பு
Couple	-	விசைஇணை, இரட்டை
Curve	-	வளைகோடு
Curvature	-	வளைமை
Cylinder	-	உருளை
Deflection	-	விலக்கம்
Deformation	-	நலிவு
Deformable solid	-	நலி (வுறு) திண்மம்
Degrees of freedom	-	பெயர்ச்சிக் கூறுகள்
Derived unit	-	வழியலகு
Design	-	வடிவமைப்பு
Dial	-	முகப்பு, முகப்புத்தட்டு
Dillatation	-	உப்பல்
Dimension	-	கணம், பருமானம்
Displacement	-	இடப்பெயர்ச்சி, பெயர்ச்சி
Distribution	-	பரவல்

Distributed forces	-	பரவல் விசைகள், பரவு விசைகள்
Dummy load	-	போலிச் சுமை
Elasticity	-	மீள்தன்மை
Elastic Modulus	-	மீள்மைக்குணகம்
Elongation	-	நீட்சி
Elastic Limit	-	மீட்சி எல்லை
Elastic constants	-	மீள்மை மாறிலிகள்
Energy	-	ஆற்றல்
Energy principles	-	ஆற்றல் கோட்பாடுகள்
Equilibrium	-	சமநிலை
Equivalent	-	ஈடான
Failure	-	சிதைவு
Factor of safety	-	காப்புக் காரணி
Finite	-	வரையறுக்கப்பட்ட, வரம்புள்ள
Fixed support	-	உறுதித்தாங்கி
Flange	-	விளிம்பு
Flexibility	-	இளக்கம்
Force	-	விசை
Force flow (in frames)	-	(சட்டகத்தில்) விசையோட்டம்
Fracture energy	-	முறிவு ஆற்றல்
Frame	-	சட்டகம்
Free body diagram	-	உறுப்பு விசைப்படம்
Free end	-	தொங்குமுனை
Girder	-	உத்தரம்
Graphical method	-	வரைப்பட முறை
Helix	-	சுருள்வலயம், சுருளை, எழுசுருள்
Helical spring	-	சுருள்வலயவில்
Hoggging	-	தூக்கல்
Homogeneity	-	கனச்சீர்மை
Horizontal	-	கிடை
Horizontality	-	கிடைமை
Impact	-	விசைத்தாக்கம்
Indeterminate	-	நலிவுசார்

Inertia	-	உறழ்வு
Instability	-	நிலைப்பிறழ்ச்சி, நிலைப்பின்மை
Intensity (of force)	-	(விசைச்) செறிவு
Internal instability	-	அகநிலைப் பிறழ்ச்சி, அக நிலைப்பீன்மை
Integer	-	முழுஎண், இயல்எண்
Integration	-	தொகுப்பு
Integral	-	தொகையம்
Integral calculus	-	தொகைக்கலனம்
Isotropy	-	திசைச்சீர்மை
Knife edge support	-	கூர்முனைத் தாங்கி
Longitudinal	-	நீளவாட்டு
Mechanics	-	விசையியல்
Method of joints	-	இணைப்புச் சமனிலை முறை
Method of sections	-	துண்டப் பகுப்பு முறை
Method of tension coefficients	-	நீள்விசைக்கெழு முறை
Modulus of resilience	-	மீள்திறக் குணகம்
Modulus of section	-	வெட்டுமுகக்கெழு
Moment	-	திருப்புமை
Moment capacity	-	திருப்புமை வலிமை
Moment equilibrium	-	திருப்புமை சமனிலை
Moment of Moment	-	திருப்புமையின் திருப்புமை
Moment of intertia	-	உறழ்திருப்புமை
Moment of intertia, polar	-	முனை உறழ்திருப்புமை
Neutral axis	-	தகைவில் அச்சு
Neutral plane	-	தகைவில் தளம்
Nondimensional	-	கணமில்லா, பருமானமில்லா
Normal (force)	-	குத்து (விசை)
Normal	-	குத்துக்கோடு
Normal stress	-	குத்துத் தகைவு, இயல்தகைவு
Nut	-	மரை வில்லை
Overhanging Beam	-	முனைதொங்குவிட்டம்
Partial derivative	-	பகுதி வகைக்கெழு
Permanent set	-	நிலைகுலைவு

Plasticity	-	குழைவு நிலை
Pin	-	இருசு, கீல்
Pin support	-	இருசுதாங்கி
Point load	-	குவிசுமை
Point of contraflexure	-	வளைமை மாறுபுள்ளி
Proudct of inertia	-	உறழ்பெருக்கம்
Poisson's ratio	-	பாய்சான் விகிதம்
Polar modulus	-	முனைமுகக் கெழு
Potential energy	-	நிலை ஆற்றல்
Prismatic bar	-	சீர்கம்பி
Pressure	-	அழுத்தம்
Proof stress	-	மீள்மைத் தகைவு
Principal stress	-	முதனிலைத் தகைவு
Principal Strain	-	முதனிலை விகலம்
Principal moment of inertia	-	முதனிலை உறழ்திருப்புமை
Principal plane	-	முதனிலைத் தளம்
Principal axis	-	முதனிலை அச்சு
Pure shear	-	தனிநறுக்கம்
Pure bending	-	நறுக்கம் இல்லா வளைதல், வட்ட வளைதல்
Reaction	-	எதிர்வினை
Reciprocal	-	தலைகீழி, எதிரிடை
Redundancy	-	தடைமிகைமை
Rigid body rotation	-	உறுதித் திண்மச் சுழற்சி
Rigidity modulus	-	நறுக்கக் குணகம்
Rivet	-	தறையாணி
Roller (Support)	-	உருளை(தாங்கி)
Rolled steel	-	உருட்டுருக்கு
Sagging	-	தொங்கல்
Section modulus (Modulus of section)	-	வெட்டுமுகக் கெழு
Simply supported beam	-	எளிமை (இலகு) தாங்கி உத்திரம்
Shaft	-	தண்டு, அச்சுத்தண்டு

Shell	-	கலன், கூடு
Shear stress	-	நறுக்குத் தகைவு
Shear flow	-	நறுக்கு வீச்சு
Shortening	-	குறுக்கம்
Shear centre	-	நறுக்க மையம்
Slab	-	பலகம்
Slope	-	சரிவு
Space	-	இடவெளி, புலம்
space convention	-	இடவெளி மரபு
Span	-	நீட்டம்
Spring constant	-	வில்விறைப்பு, வில்மாறிலி
Stability	-	நிலைபேறு, நிலைப்பு
Standard	-	செந்தரம்
Statics	-	நிலையியல்
Strength	-	வலிமை
Strength, torsionsal	-	முறுக்க வலிமை
Strength, Bending	-	வளைவலிமை
Strength, Tensile	-	நீள்வலிமை
Strength, Compressive	-	இறுக்க வலிமை
Strength, Shear	-	நறுக்க வலிமை
Strain	-	விகலம்
strain energy	-	விகல ஆற்றல்
Stress	-	தகைவு
stress concentration	-	தகைவுச் செறிவு
Stress distribution	-	தகைவுப் பரவல்
stress concentration factor	-	தகைவுச் செறிவுக் காரணி
Strength theories	-	வலிமைக் கோட்பாடுகள்
Strain hardening	-	விகல விறைப்பு
Strain energy density	-	விகல ஆற்றல் செறிவு
Stiffness	-	விறைப்பு
Support reaction	-	தாங்கி எதிர்வினை
Symmetry	-	வடிவச் சீர்மை, சமச் சீர்மை
Tangent Plane	-	தொடுதளம்

Tangential forces	-	தொடு விசைகள்
Tension	-	நீள்விசை
Tension coefficient	-	நீள்விசைக்கெழு
Tensor	-	பண்புரு
Torsion	-	முறுக்கம்
Torque	-	முறுக்கத் திருப்புமை, திருக்கம்
Toughness	-	உரப்பு
Traction	-	இழுப்பு
Troptometer	-	சுழற்சியளவி
Truss	-	கீல் சட்டகம்
Twist	-	முறுக்கச் சுழற்சி
Twisting Moment	-	முறுக்கத் திருப்புமை
Ultimate strength	-	முழுவலிமை, அறுதி வலிமை
Ultimate strees	-	உச்சத் தகைவு, அறுதித் தகைவு
Uniformly distributed load	-	சீர் தொடர்சுமை, சீர்பரவு சுமை
Uniformly varying load	-	சீர் மாறுசுமை
Unsymmetrical bending	-	சமச்சீரற்ற வளைதல்
Vertical	-	நேர்க்குத்து
Virtual displacement	-	கற்பனை இடப்பெயர்ச்சி
Virtual force	-	கற்பனை விசை
Virtual work	-	கற்பனை வேலை
Warping	-	உருக்கோட்டம்
Web	-	அகடு
Yielding	-	நெகிழ்ச்சி
Yield point	-	நெகிழ்ச்சி நிலை
Yield limit	-	நெகிழ்ச்சி எல்லை

கலைச்சொற்கள் பட்டியல் - 2

அகடு	-	Web
அச்சு	-	Axis
அச்சுச்சீர்	-	Axi - symmetric
அடிதாங்கி வில்	-	Buffer spring
அச்சுச்சீர்மை	-	Axial symmetry
அமுக்கவில்	-	Compression spring
அழுத்தம்	-	Pressure
அலகிடல்	-	Calibration
அலகிடப்பட்ட	-	Calibrated
ஆற்றல்	-	Energy
ஆற்றல் கோட்பாடுகள்	-	Energy Principles
ஆற்றல்மாறா அமைப்பு	-	Conservative system
ஆற்றல் மாறு அமைப்பு	-	Non-conservative system
இடவெளிமரபு	-	Space convention
இணைக்கப்பட்ட வெட்டுமுகம்	-	Built up section
இணையாற்றல்	-	Complementary energy
இணைநறுக்குத் தகைவு	-	Complementary shear stress
இணைப்புச் சமனிலை முறை	-	Method of joints
இளக்கம்	-	Flexibility
இருசு தாங்கி	-	Pin support
இழுப்பு	-	Traction
ஈர்ப்பு மையம்	-	Centroid
உச்சத் தகைவு	-	Ultimate stress
உப்பல்	-	Dilatation
உத்தரம்	-	Girder
உரப்பு	-	Toughness
உருக்கோட்டம்	-	Warping

உருளை		Cylinder, Roller
உருளை தாங்கி	-	Roller, Roller support
உருட்டு உருக்கு	-	Rolled Steel
உறழ்வு	-	Inertia
உறழ்திருப்புமை	-	Moment of inertia
உறுதித் தாங்கி	-	Fixed support
உறுதித் திண்மம்	-	Rigid body
உறுப்பு விசைப்படம்	-	Free body diagram
உறழ் பெருக்கம்	-	Product of inertia
எளிமை தாங்கி விட்டம்	-	Simply supported beam
கடிகைத் திசை	-	Clockwise direction
கடிகை எதிர்திசை	-	Anticlockwise direction
கணமில்(லா)	-	Non-dimensional
கமான்	-	Arch
கலன் (கூடு)	-	shell
கலன கணிதம்	-	Calculus
கற்பிதம்	-	Assumption, Hypothesis
கற்பனை இடப்பெயர்ச்சி	-	Virtual displacement
கற்பனை விசை	-	Virtual force
கற்பனை வேலை	-	Virtual work
கனச்சீர்மை	-	Homogeneity
கிடை	-	Horizontal
கிடைமை	-	Hozisontality
கீல்சட்டகம்	-	Truss
குத்துக்கோடு	-	Normal
குத்து (த்தகைவு)	-	Normal (Stress)
குவிப்பு விசை	-	Concentrated force
குவிசுமை	-	Concentrated load, Point load
குழைவு நிலை	-	Plasticity
குறுக்கம்	-	Shortening
கூர்முனைத் தாங்கி	-	Knife edge support
கூறு	-	Component
கோண முடுக்கம்	-	Angular acceleration

சட்டகம்	-	Frame
சட்டகப் பகுப்புமுறை	-	Method of sections
சரிவு	-	Slope
சமச்சீரற்ற வளைதல்	-	Unsymmetrical bending
சிதைவு	-	Failure
சீர்மை அச்சு	-	Axis of symmetry
சீரான வலிமை கொண்ட விட்டம்	-	Beam of uniform strength
சீர் தொடர் சுமை	-	Uniformly distributed load
சீர்மாறு சுமை	-	Uniformly varying load
சுருள் வலய வில்	-	Helical spring
சுருள் வலயம்	-	Helix
சுழற்சியளவி	-	Troptometer
(விசைச்) செறிவு	-	Intensity (of force)
தகைவு	-	Stress
தகைவில் அச்சு	-	Netural axis
தகைவில் தளம்	-	Netural plane
தகைவுச் செறிவு	-	Stress concentration
தகைவுச் செறிவுக் காரணி	-	Stress concentration factor
தகைவுப் பரவல்	-	Stress distribution
தடைமிகைமை	-	Redundancy
தண்டு	-	Shaft
தலைகீழி	-	Reciprocal
தளஞ்சுட்டு கோணம்	-	Aspect angle
தனிநறுக்கம்	-	Pure shear
தறையாணி	-	Rivet
தாங்கி	-	Support
தாங்கி எதிர்வினை	-	Support reaaction
திசைசார் மீள்பொருள்	-	Anisotropic material
திசைச்சீர்மை	-	Isotropy
முறுக்குச் திருப்புமை	-	Torque, Twisting moment
திருப்புமை	-	Moment
திருப்புமை சமனிலை	-	Moment equilibrium

திருப்புமையின் திருப்புமை	-	Moment of Moment
துருத்து மாடம்	-	Balcony
துருத்து விட்டம்	-	Cantilever
தூக்கல்	-	Hogging
தொங்கல்	-	Sagging
தொங்குமுனை	-	Free end
தொகையம்	-	Integral
தொகைக்கலனம்	-	Integral calculus
தொகுப்பு	-	Integration
தொடர்சுமை	-	Distributed load
தொடுதளம்	-	Tangent plane
தொடுவிசை	-	Tangential force
நலிவுறு (திண்மம்)	-	Deformable (solid)
நலிவு	-	Deformation
நலிவு சார்	-	Indeterminate
நறுக்கக்கெழு	-	Rigidity modulus
நறுக்கமில்லா வளைதல்	-	Pure bending
நறுக்க மையம்	-	Shear Centre
நறுக்குத் தகைவு	-	Shear stress
நறுக்கு வீச்சு	-	Shear flow
நிலை குலைவு	-	Permanent set
நிலை ஆற்றல்	-	Potential energy
நிலைப்பிறழ்ச்சி	-	Instability
நிலை பேறு	-	Stability
நிலையியல்	-	Statics
நீட்சி	-	Elongation
நீள்மைக் கெழு	-	Young's modulus
நீள்விசை	-	Tension
நீள்விசைக்கெழு	-	Tension coefficient
நீள் விசைக்கெழுமுறை	-	Method of tension coefficient
நீளுமைவில்	-	Tension spring
நீட்டம்	-	Span
நீளவாட்டு	-	Longitudinal

நெகிழ்ச்சி	-	Yielding
நெகிழ்ச்சி எல்லை	-	Yield point, Yield limit
நெளிதல்	-	Buckling
நேர்க்குத்து	-	Vertical
பட்டை வில்	-	Leaf spring
பகுதி வகைக்கெழு	-	Partial derivative
பன்புரு	-	Tensor
பலகம்	-	Slab
பரிதித்திசைத் தகைவு	-	Circumferential stress
பருமைக் கெழு	-	Bulk modulus
பருமைத் தகைவு	-	Volumetric stress
பருமை விகலம்	-	Volumetric strain
புலம்	-	Space, field
மரையாணி	-	Bolt
மரைவில்லை	-	Nut
மாறி	-	Variable
மாறிலி	-	Constant
மாற்றல் காரணி	-	Conversion factor
மீட்சி எல்லை	-	Elastic limit
மீள்மைத் தகைவு	-	Proof stress
மீள்தன்மை	-	Elasticity
மீள்மைக் கெழு	-	Elastic modulus
மீள்மை மாறிலிகள்	-	Elastic constants
மீள்திறம்	-	Proof resilience
மீள்திறக் குணகம்	-	Modulus of resilience
முடுக்கம்	-	Acceleration
முதனிலை(தகைவு)	-	Principal (stress)
முழுவலிமை	-	Ultimate strength
முறிவு	-	Fracture
முறிவு ஆற்றல்	-	Fracture energy
முறுக்கம்	-	Torsion
முறுக்கத்திருப்புமை	-	Torque, Twisting moment
முனை உறழ்திருப்புமை	-	Polar moment of inertia

முனைமுகக் கெழு	-	Polar modulus
முனை தொங்குவிட்டம்	-	Overhanging beam
வகைப்பாடு	-	Classification
வண்டிச்சக்கரவில்	-	Carriage spring
வடிவமைப்பு	-	Design
வலிமை	-	Strength
வளைதல் கோட்பாடு	-	Bending theorgy
வளைமை	-	Curvature
வளைவாரம்	-	Radius of curvature
வளைமைமாறு புள்ளி	-	Point of contraflexure
விகலம்	-	Strain
விகல ஆற்றல்	-	Strain energy
விகல விறைப்பு	-	Strain hardening
விசை	-	Force
விசையியல்	-	Mechanics
விசை இணை	-	Couple
விசைத்தாக்கம்	-	Impact
விட்டம்	-	Beam
விட்டத் தூண்	-	Beam column
வில் விறைப்பு	-	Spring constant
விகல ஆற்றல் செறிவு	-	Strain energy density
விளிம்பு	-	Flange
விறைப்பு	-	Stiffness
வெட்டுமுகக்கெழு	-	Modulus of section, section modulus
வெப்ப நீட்சிக் கெழு	-	Coefficient of linear Thermal expansion

துணை நூல்கள்:

1. S. M. A. Kazimi, "Solid Mechanics", Tata McGrawHill Publishing Company, New Delhi, 1981.

2. T. J. Landner and R. R. Archer "Mechanics of Solids — an Introduction" McGrawHill International Editions, 1994

3. Stephen H. Grandall, Norman C. Dahl and Thomas J. Landner, An Introduction to Mechanics of Solids, "Second Edition, McGrawHill International Editions, 1978

4. S. B. Junarkar, "Mechanics of Structures, Vol. 1, 21st Edition, Charotar Publishing House, Anand, India, 1995.

5. Feodosev, V., " Strength of Materials," Mir Publishers, Moscow, 1968.

அச்சிட்டோர் :

பாவை பிரிண்டர்ஸ் (பி) லிட்.,
சென்னை-600 014.

விலை ரூ. 126.00